

รายงานการวิจัยเรื่อง

ความหนาแน่นสถานะของก๊าซอิเล็กตรอนสองมิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กที่มีความเข้มสูงและศักย์ที่ไร้ระเบียบ : โดยวิธีเชิงตัวเลข

Density of States of a Two-Dimensional Electron Gas in a Strong Magnetic Fields and Random Potential : Numerical Method

นายนิคม ชุติริ

ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ
พฤษภาคม 2548

งานวิจัยนี้ได้รับเงินอุดหนุนจากงบประมาณแผ่นดิน
ของมหาวิทยาลัยทักษิณ
ประจำปีงบประมาณ 2542

หนังสือนี้เป็นทรัพย์สินของหอสมุด มหาวิทยาลัยทักษิณ
หากมีการนำออกโดยไม่ขออนุญาต
ผู้พบเห็น กรุณาแจ้งเจ้าหน้าที่หอสมุดโดยด่วน



คำรับรองคุณภาพ

ข้าพเจ้า ผู้ช่วยศาสตราจารย์ เกลิม พองสุวรรณ ได้ประเมินคุณภาพงานวิจัย
เรื่อง ความหนาแน่นสถานะของก๊าซฮีเลียมสองมิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กที่มี
ความเข้มข้นสูงและศักย์ที่ไร้ระเบียบ : โดยวิธีเชิงตัวเลข
โดย รองศาสตราจารย์ ดร.นิคม ชูศิริ

มีความเห็นว่า ผลงานวิจัยฉบับนี้มีคุณภาพอยู่ในเกณฑ์

- ดีมาก
 ดี
 ปานกลาง
 ต่ำ

ซึ่งสมควรเผยแพร่ในแวดวงวิชาการได้

ลงชื่อ

Gl. Suan

ผู้ประเมิน

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ เกลิม พองสุวรรณ)

วันที่ 6 เดือน มิถุนายน พ.ศ. 2548

คำนำ

การวิจัยเรื่องความหนาแน่นสถานะของก๊าซอิเล็กตรอนสองมิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กที่มีความเข้มสูงและศักย์ที่ไร้ระเบียบ : โดยวิธีเชิงตัวเลข มีจุดมุ่งหมายเพื่อคำนวณตัวแผ่กระจายและความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของศักย์หรือแรงดังกล่าว โดยเน้นอิเล็กตรอนซึ่งเคลื่อนที่ในระนาบ xy ภายใต้สนามแม่เหล็กความเข้มสูงซึ่งมีขนาดสม่ำเสมอในทิศทางที่ตั้งฉากกับระนาบการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอน หลังจากได้รูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ของตัวแผ่กระจายแล้วก็สามารถนำไปสู่ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนในรูปแบบของอินทิกรัลที่ค่อนข้างซับซ้อน จึงจำเป็นต้องอาศัยการประมาณเชิงตัวเลข สาเหตุที่ผู้วิจัยเลือกวิธีการของฟายน์แมนในการเข้าสู่องค์ความรู้ของปัญหาดังกล่าว เนื่องจากวิธีการอื่น เช่น กลศาสตร์เชิงคลื่นของชเรอดิงเงอร์นั้นมองไม่เห็นทางที่จะทำได้ เนื่องจากต้องทำการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองที่มีตัวแปรสองตัวที่ไม่อาจแยกตัวแปรได้ ทั้งนี้เนื่องจากความซับซ้อนของแฮมิลโทเนียนในระบบ จึงยากที่จะแก้สมการชเรอดิงเงอร์เพื่อหาฟังก์ชันกรีนหรือตัวแผ่กระจายที่จะนำไปสู่ความหนาแน่นสถานะของอนุภาคอิเล็กตรอนได้

ผู้วิจัยใคร่ขอขอบคุณมหาวิทยาลัยทักษิณที่จัดสรรงบประมาณแผ่นดินแก่ผู้วิจัย ขอขอบพระคุณคณะกรรมการวิจัย มหาวิทยาลัยทักษิณที่ได้พิจารณาเห็นชอบ โครงการวิจัยของผู้วิจัยจนได้รับทุนอุดหนุนดังกล่าว และขอขอบคุณภาควิชาฟิสิกส์เป็นอย่างยิ่งที่เอื้ออำนวยสิ่งอำนวยความสะดวกทั้งมวลจนทำให้งานวิจัยชิ้นนี้เสร็จสมบูรณ์

**ความหนาแน่นสถานะของก๊าซอิเล็กตรอนสองมิติ ภายใต้สนามแม่เหล็กที่มีความเข้มสูง
และศักย์ที่ไร้ระเบียบ : โดยวิธีเชิงตัวเลข**

บทคัดย่อ

ได้คำนวณความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนในระบบสองมิติภายใต้สนามแม่เหล็กตั้งฉากกับระนาบของอิเล็กตรอนและอิเล็กตรอนมีอันตรกิริยากับศักย์ที่ไร้ระเบียบโดยวิธีอินทิเกรตตามเส้นทาง พบว่าความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบของการอินทิเกรต

$$\rho(E) = \frac{A}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dT \frac{m\Omega}{4\pi\hbar(\sin(\Omega T/2))} \left(1 + \frac{\omega^4 T^2}{12\Omega^2}\right) \times \exp\left[\frac{iET}{\hbar} - \left(\frac{\xi_L}{2\hbar^2}\right)^2 T \int_0^T \frac{1}{G(T,y)} dy\right]$$

โดยที่
$$G(T,y) = 1 + \frac{8i \sin[(\Omega/2)(T-y)] \sin[(\Omega/2)y]}{x \sin[(\Omega T/2)]}$$

ในกรณีพิเศษพิจารณาเฉพาะช่วงพลังงานต่ำโดยการประมาณให้ T มีค่ามาก พบว่าความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนดังกล่าวมีรูปแบบเชิงวิเคราะห์ของผลรวมของฟังก์ชันแกาส์เซียนซึ่งมีจุดศูนย์กลาง ณ ค่าพลังงานแลนดาว E_n

$$\rho(E) = \rho_0 \frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2\pi^2}} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{4+x}{x^2}\right)^2 \left(3 - 6 \frac{(E-E_n)^2}{\Gamma^2} + \frac{(E-E_n)^4}{\Gamma^4}\right)\right] e^{-\frac{(E-E_n)^2}{2\Gamma^2}}$$

เมื่อ $\Gamma^2 = \xi_x \frac{x}{4+x}$, $x = \frac{\hbar\Omega}{E_L}$, $E_L = \frac{\hbar^2}{2mL^2}$ และ ξ_L คือขนาดของของความแปรผันแกาส์เซียน อาศัย

ความหนาแน่นสถานะรูปแบบเชิงวิเคราะห์ดังกล่าวเมื่อความไร้ระเบียบมีขนาดความยาวสหสัมพันธ์ประมาณ 100 Å พบว่าระดับแลนดาวจะแผ่กว้างออก มีผลทำให้ความหนาแน่นสถานะระหว่างระดับแลนดาวมีค่ามาก สอดคล้องกับผลการทดลองในเซทเทอโรจันซ์ ยิ่งไปกว่านั้นอาศัยความหนาแน่นสถานะในรูปแบบการอินทิเกรตซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้

$$\rho(E) = \frac{2}{\pi} \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dt \operatorname{Re} [1 - (\frac{64}{3}) t^4 \xi_L^2 x^{-6}] e^{2i(v/x - (n+1/2))t + f'(t)}$$

โดยที่
$$f'(t) = \frac{it \sin t}{2x} \xi_L \int_0^t dy \frac{1}{-(ix/4) \sin t - \cos t + \cos y}$$

เมื่อทำการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลข โดยให้ความยาวสหสัมพันธ์ประมาณ 100 Å ผลการคำนวณสอดคล้องเป็นอย่างดีกับการทดลองของคูรูคินและทีโมฟิเยฟในอินเวอร์ชันของมอส สิ่งใหม่สำคัญยิ่งในการก่อให้เกิดความหนาแน่นสถานะระหว่างระดับแลนดาวคือบทบาทของความยาวสหสัมพันธ์

Density of States of a Two-Dimensional Electron Gas in a Strong Magnetic Fields and Random Potential : Numerical Method

ABSTRACT

The density of states (DOS) of an electron confined in two dimensions in the presence of a transverse magnetic field and interacting with disorder is derived, using path-integral method, we find that the DOS of electron can be written in and integral form

$$\rho(E) = \frac{A}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dT \frac{m\Omega}{4\pi\hbar(\sin(\Omega T/2))} \left(1 + \frac{\omega^4 T^2}{12\Omega^2}\right) \times \exp\left[\frac{iET}{\hbar} - \left(\frac{\xi_L}{2\hbar^2}\right)^2 T \int_0^T \frac{1}{G[T, \gamma]} d\gamma\right]$$

where

$$G[T, \gamma] = 1 + \frac{8/\sin[(\Omega/2)(T-\gamma)]\sin[(\Omega/2)\gamma]}{x \sin[(\Omega T/2)]}$$

In the special case of consideration, for the states at low energies, we made a large-T approximation, it is found that the DOS becomes and analytical form of a sum of Gaussians centered at each Landau energy E_n ,

$$\rho(E) = \rho_0 \frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2\pi^2}} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{4+x}{x^2}\right)^2 \left(3 - 6 \frac{(E-E_n)^2}{\Gamma^2} + \frac{(E-E_n)^4}{\Gamma^4}\right)\right] e^{-\frac{(E-E_n)^2}{2\Gamma^2}}$$

where $\Gamma^2 = \xi_x \frac{x}{4+x}$, $x = \frac{\hbar\Omega}{E_L}$, $E_L = \frac{\hbar^2}{2mL^2}$ and ξ_L is the magnitude of Gaussian variance. From

the analytical form of the DOS, for disorder having a finite correlation length $L \approx 100 \text{ \AA}$ we find broad Landau levels which leads to a large DOS between Landau levels, in agreement with experiments on heterojunctions. Furthermore, from the integral form of the DOS, which can be rewritten as

$$\rho(E) = \frac{2}{\pi} \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dt \operatorname{Re} \left[1 - \left(\frac{64}{3}\right) t^4 \xi_L'^2 x^{-6} \right] e^{2i(\nu/x - (n+1/2))t + f'(t)}$$

where

$$f'(t) = \frac{it \sin t}{2x} \xi_L' \int_0^t d\gamma \frac{1}{-(ix/4) \sin t - \cos t + \cos \gamma},$$

using numerical calculation with the correlation length $L \approx 100 \text{ \AA}$, we found our numerical results agree well with the experiments of Kukushkin and Timofeev on MOS inversion layer. The essential new feature, which provides a DOS between Landau levels, is recognizing the role of correlation length.

สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1 บทนำ	
1.1 ความสำคัญ ที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย	1
1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย	4
1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	4
1.4 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องและคล้ายคลึงกับงานวิจัยที่ทำ	5
1.5 ระเบียบวิธีวิจัย	5
1.6 ขอบเขตของการวิจัย	6
บทที่ 2 ทฤษฎีอินทิเกรตตามเส้นทางและการประยุกต์	
2.1 ทฤษฎีอินทิเกรตตามเส้นทางเบื้องต้น	7
2.2 ฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของอนุภาค	10
2.3 อนุภาคอิสระ	12
2.4 ฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้น	13
2.5 ฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้น	15
บทที่ 3 ตัวแปรกระจายแม่นยำตรง(การประมาณอันดับศูนย์)	17
3.1 บทนำ	17
3.2 ลากรางเกียน	17
3.3 แอคชันคลาสสิกยังผล	19
3.4 ตัวแปรกระจายแม่นยำตรง	22
3.5 การพิสูจน์ความถูกต้องของตัวแปรกระจายแม่นยำตรง	23
3.6 ความหนาแน่นสถานะ	26
บทที่ 4 ตัวแปรกระจายของก๊าซอิเล็กตรอนสองมิติโดยวิธีอินทิเกรตตามเส้นทาง	29
4.1 บทนำ	29
4.2 ความหนาแน่นสถานะ	29
4.3 อินทิเกรตตามเส้นทางของแบบจำลองระบบสองมิติที่ไร้ระเบียบ	29
4.4 แบบจำลองแก๊สเขียนแบบสุ่ม	31
4.5 การประมาณคิวมิวแลนต์ที่หนึ่ง	32
4.6 การคำนวณ $\langle \bar{r}(t) - \bar{r}(s) ^2 \rangle_{S_0}$	34
4.7 การคำนวณ $\langle W(\bar{r}(t) - \bar{r}(s)) \rangle_{S_0}$	35
4.8 ตัวแปรกระจายเฉลี่ย $\bar{K}(0,0;T)$	36

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
บทที่ 5 ความหนาแน่นสถานะของก๊าซอิเล็กตรอนในระบบสองมิติที่ไร้ระเบียบ	
ท่ามกลางสนามแม่เหล็ก	38
5.1 บทนำ	38
5.2 ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนต่อกรณี T มีค่ามาก	39
5.3 ผลการคำนวณเชิงตัวเลขและเปรียบเทียบกับผลจากการทดลอง ของความหนาแน่นสถานะในกรณีทั่วไป	46
5.4 สรุปและวิจารณ์ผล	53
เอกสารอ้างอิง	54
ภาคผนวก	พ 1

บทที่ 1

บทนำ

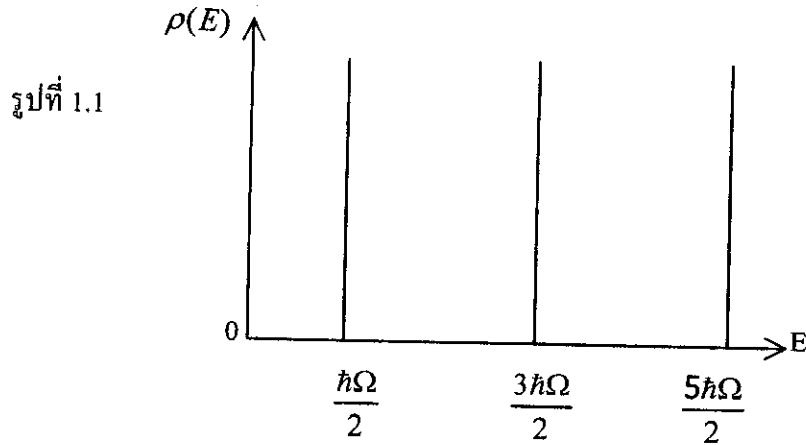
1.1 ความสำคัญ ที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

ปัญหาของอิเล็กทรอนิกส์ที่ถูกจำกัดขอบเขตให้อยู่ในระนาบ(ระบบสองมิติ)ภายใต้อิทธิพลของสนามแม่เหล็กและศักย์ที่ไร้ระเบียบ เป็นปัญหาที่ได้รับความสนใจในปัจจุบัน ตัวอย่างของระบบอิเล็กทรอนิกส์สองมิติดังกล่าว อาทิ อิเล็กตรอนที่อยู่ระหว่างผิวยึดต่อระหว่าง GaAs และ GaAlAs(GaAs-GaAl layered heterostructure) และอิเล็กทรอนิกส์บนผิวของ Si metal-oxide semiconductor field effect transistors(MOSFETS) เป็นต้น ความสนใจในสมัยเริ่มแรกต่อระบบดังกล่าวมักเกี่ยวเนื่องกับปรากฏการณ์ขนส่ง(transport properties)ของอิเล็กตรอน ปรากฏการณ์ควอนตัมฮอลล์(1,2) และการจำแนกความแตกต่างระหว่างสถานะไม่ถูกจำกัดเขต(delocalized states) และสถานะถูกจำกัดเขต(localized states)ของอิเล็กตรอนในระบบดังกล่าว ในปรากฏการณ์ควอนตัมฮอลล์นั้น von Klitzing และคณะ(3)ได้แสดงให้เห็นว่าความนำไฟฟ้าในระนาบ(σ_{xy})มิได้เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นอย่างง่ายของสนามแม่เหล็ก แต่กลับมีเนิน(plateaus)ของความนำไฟฟ้าซึ่งมีค่าคงที่เป็นช่วงๆสอดคล้องสมการ $\sigma_{xy} = (e/h^2)i, i = \dots, 3, 2, 1$ ปัจจุบันเชื่อกันว่าบริเวณซึ่งความนำไฟฟ้าคงตัวหรือเนินดังกล่าวเกิดขึ้นเมื่อพลังงานเฟอร์มี(E_F)เลื่อนผ่านระดับแลนดาว(Landau levels)และผ่านสถานะถูกจำกัดเขตโดยในช่วงดังกล่าวอิเล็กตรอนจะไม่ก่อให้เกิดการนำไฟฟ้าแต่ประการใด การวิจัยที่เกี่ยวเนื่องกับอิเล็กทรอนิกส์ ณ ตำแหน่งหรือย่านพลังงานเฟอร์มีโดยอาศัยการแกว่งกวัด(oscillate)ของปริมาณต่อไปนี้คือ ความร้อนจำเพาะ(specific heat)(4-7) ความจุไฟฟ้า (capacitance)(8-9) ความเป็นแม่เหล็ก(magnetization)(10,11) หรือแม้แต่ recombination spectra ของอิเล็กตรอน(12)ต่างก็แสดงให้เห็นว่าความไร้ระเบียบอันเนื่องมาจากสิ่งเจือปน(12)หรือความไม่ราบเรียบของระนาบอิเล็กทรอนิกส์(13)ได้ขยายระดับแลนดาวให้แผ่กว้างออกอย่างมีนัยสำคัญและได้ยืนยันว่ามีความหนาแน่นสถานะเกิดขึ้นระหว่างระดับแลนดาวและมีขนาดใหญ่อีกด้วย และสถานะบริเวณกึ่งกลางระหว่างระดับแลนดาวนี้เองที่เชื่อกันว่าเป็นสาเหตุของการเกิดเนินหรือการคงที่ของความนำไฟฟ้าในระนาบของอิเล็กตรอน งานวิจัยชิ้นนี้ต้องการยืนยันว่าความเชื่อดังกล่าวเป็นสิ่งถูกต้องด้วยการสร้างแบบจำลองของอิเล็กตรอนซึ่งอยู่ภายใต้อิทธิพลของสนามแม่เหล็กที่มีความเข้มสูงและยังอยู่ท่ามกลางความไร้ระเบียบอันเนื่องมาจากสิ่งเจือปน โดยการคำนวณตัวแผ่กระจาย(โดยประมาณ)ออกมาด้วยวิธีอินทิเกรตตามเส้นทาง จากตัวแผ่กระจายที่ได้สามารถนำไปคำนวณหาความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนด้วยวิธีเชิงตัวเลข การทดสอบความถูกต้องทำได้ด้วยการเปรียบเทียบกับ การทดลองที่เชื่อถือได้ รายละเอียดการคำนวณมีดังนี้

ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนอิสระในระนาบ(สองมิติ)ภายใต้สนามแม่เหล็กซึ่งคงที่และตั้งฉากกับระนาบอิเล็กตรอน จากการคำนวณพบว่าเป็นไปตามสมการ

$$\rho(E) = \sum_n \delta(E - E_n) = \sum_n \delta[E - (n + 1/2)\hbar\Omega] \tag{1.1}$$

เมื่อ Ω คือความถี่ไซโคลตรอน หากนำมาเขียนกราฟก็จะได้กราฟดังรูป 1.1



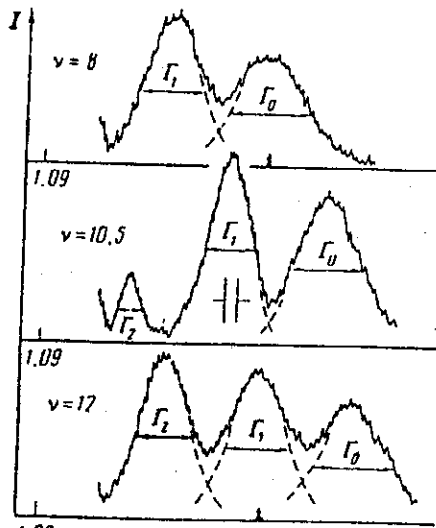
ระดับพลังงานที่ 1 สอดคล้องกับ $n=0$ เราได้ $E_1 = \frac{\hbar\Omega}{2}$ เรียกว่าระดับแลนดาวที่ 1

ระดับพลังงานที่ 2 เรียกว่าระดับแลนดาวที่ 2 โดยที่ $E_2 = \frac{3\hbar\Omega}{2}$

ระดับพลังงานที่ n เรียกว่าระดับแลนดาวที่ n ฯลฯ

จากรูปที่ 1.1 จะเห็นว่าความหนาแน่นสถานะ $\rho(E)$ ระหว่างระดับแลนดาวนั้นมีค่าเป็นศูนย์ทุกตำแหน่ง แต่จากการทดลองพบว่าความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนในระนาบซึ่งเกิดขึ้นระหว่างผิวรอยต่อระหว่าง GaAs และ GaAl และความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนบนผิวของ MOSFETS มิได้มีรูปแบบดังรูปที่ 1.1 แต่กลับพบว่าระดับแลนดาวแผ่กว้างออกและความหนาแน่นสถานะระหว่างระดับแลนดาวมิได้เป็นศูนย์ดังการทดลองของคูซุคินและทีโมฟีเยฟ(รูปที่ 1.2)

รูปที่ 1.2 ความหนาแน่นสถานะที่ได้จากการทดลองของคูซุคินและทีโมฟีเยฟ(12)



จากการทดลองหลายรูปแบบยืนยันว่าระดับแลนดาวแผ่กว้างออกจริงพร้อมกับการเกิดขึ้นของความหนาแน่นสถานะระหว่างระดับแลนดาว จึงทำให้นักฟิสิกส์ต้องหาคำอธิบายว่ามันเกิดขึ้นได้อย่างไร สุดท้ายทุกคนสรุปเห็นพ้องต้องกันว่าน่าจะมีสาเหตุมาจากความไร้ระเบียบในระบบสองมิติที่อิเล็กตรอนดำรงอยู่

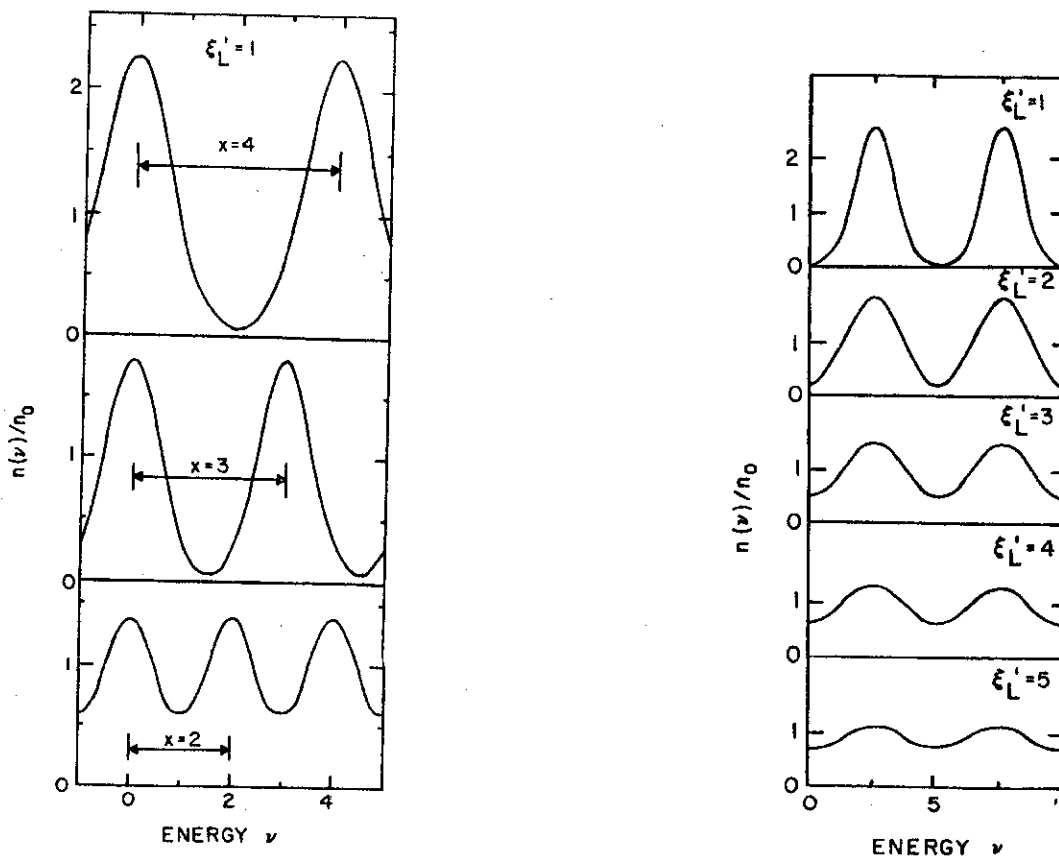
วิรุฬห์สายคณิตและคณะ(14)ได้เสนอแบบจำลองของอิเล็กตรอนสองมิติดังกล่าวด้วยแอคชัน(action)เฉลี่ย \bar{S} ซึ่งเป็นอินทิกรัลของลากรางเจียน $\bar{S} = \int L(\dot{\vec{r}}, \vec{r}; t) dt$ ดังนี้

$$\bar{S} = \int dt \left[\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m\Omega}{2} (xy - yx) + \frac{i}{2\hbar} \int_0^{\vec{r}} dt' \left(\frac{W(L)}{\pi L^2} \exp\left(-\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}{L^2}\right) \right) \right] \quad (1.2)$$

ในส่วนของตัวถูกอินทิเกรตนั้นเทอมที่ 1 เทอมที่ 2 และเทอมที่ 3 คือพลังงานจลน์ พลังงานเนื่องจากสนามแม่เหล็ก และพลังงานศักย์อันเนื่องมาจากศักย์ที่ไร้ระเบียบตามลำดับ ตามแบบจำลองนี้ความไร้ระเบียบทั้งหมดถูกรวมไว้ตรงเทอมสุดท้ายโดยอาศัยแบบจำลองความแปรปรวนแบบเกาส์เซียน ผลจากการคำนวณตัวแผ่กระจายของอิเล็กตรอนสอดคล้องกับแอคชันตามสมการ(1.2) หลังจากนำไปใช้คำนวณความหนาแน่นสถานะพร้อมทั้งพิจารณาเฉพาะ ที่ T มีค่ามาก (large-time approximation) เราได้ความหนาแน่นสถานะดังนี้

$$\rho(E) = n_0 \hbar \Omega (2\pi)^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(1/2)(E-E_n)/\Gamma^2} \quad (1.3)$$

เมื่อนำมาเขียนกราฟได้ดังรูปที่ 1.3



รูปที่ 1.3 ความหนาแน่นสถานะคำนวณโดยวิรุฬห์ สายคณิตและคณะ(ค่า $v = E/E_L$)

จากรูปที่ 1.2 และ 1.3 จะเห็นว่า แม้ว่าตามแบบจำลองของวิรุพห์และคณะจะให้ผลความหนาแน่นสถานะระหว่างระดับแลนดาวเกิดขึ้นและเกิดการแผ่ขยายของระดับแลนดาวแล้วก็ตาม ทว่ายังมีความไม่สอดคล้องกับการทดลองอยู่บ้างพอสมควร อาทิ ความสูงของระดับแลนดาวและความกว้างของระดับแลนดาว(Γ)มิได้สอดคล้องกับการทดลองแต่ประการใด

เพื่อที่จะแก้ไขข้อบกพร่องดังกล่าวผู้วิจัยขอเสนอแบบจำลองแบบใหม่โดยการเพิ่มศักย์ที่ไร้ระเบียบอันเนื่องมาจาก nonlocal harmonic oscillator potential เข้าไปในระบบของอิเล็กตรอน กล่าวคือตามแบบจำลองของผู้วิจัยนี้ แอคชันของอิเล็กตรอนกลับกลายเป็น

$$\bar{S} = \int^r dt \left\{ \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m\Omega}{2} (xy - yx) + \frac{i}{2\hbar} \int dt' \left(\frac{W(L)}{\pi L^2} \exp\left(-\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}{L^2}\right) - \frac{m}{2T} \omega^2 \int^r |\vec{r} - \vec{r}'|^2 dt' \right) \right\} \quad (1.4)$$

โดยการคำนวณตัวแผ่กระจายของอิเล็กตรอนภายใต้ศักย์ต่างๆตามแบบสมการ(1.4) จะสามารถนำไปสู่ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนได้ และโดยการปรับความถี่เชิงมุม ω ที่เหมาะสม พร้อมทั้งคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลข จะสามารถให้ค่าความหนาแน่นสถานะที่สอดคล้องกับการทดลองมากกว่าแบบจำลองแบบเก่า[สมการ(1.2)]

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

เพื่อต้องการทราบเกี่ยวกับ

- 1.2.1 ตัวแผ่กระจายของอิเล็กตรอนสองมิติภายใต้สนามแม่เหล็กและศักย์ที่ไร้ระเบียบ
- 1.2.2 ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนในหัวข้อ 1.2.1 ด้วยวิธีเชิงตัวเลข
- 1.2.3 เพื่อสร้างองค์ความรู้ใหม่
- 1.2.4 เพื่อพัฒนาและปรับปรุงเทคนิคการประมาณค่าด้วยวิธีอินทิเกรตตามเส้นทางให้มีความแม่นยำมากที่สุดเท่าที่จะทำได้

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ทำให้ทราบพฤติกรรมของอิเล็กตรอนที่อยู่ภายใต้ระบบสองมิตินี้ว่าตอบสนองต่อสนามแม่เหล็กและศักย์ที่ไร้ระเบียบอย่างไร โดยเฉพาะความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนดังกล่าวสามารถนำไปสู่คุณสมบัติทางไฟฟ้า(ปรากฏการณ์ขนส่งเชิงไฟฟ้า) จากคุณสมบัติดังกล่าวทำให้เราสามารถออกแบบชิ้นส่วนทางอิเล็กทรอนิกส์ให้เหมาะสมกับการใช้งานได้ อาทิ ต้องเติมสารเจือปนลงในระบบด้วยปริมาณที่เหมาะสมเพื่อลดหรือเพิ่มความไร้ระเบียบแก่อิเล็กตรอนเพื่อให้มีคุณสมบัติตามที่ต้องการได้

1.4 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องและคล้ายคลึงกับงานวิจัยที่ทำ

1.4.1 อินทิกรัลตามเส้นทางของอะตอมไฮโดรเจน(Path Integrals of the Hydrogen Atom) เป็นงานวิจัยของนายนิคม ชูศิริ ศ.ดร.วิรุฬห์ สายคณิต ใช้วิธีอินทิเกรตตามเส้นทางคำนวณตัวแผ่กระจายของอิเล็กตรอนในอะตอมไฮโดรเจนออกมาพร้อมทั้งคำนวณฟังก์ชันคลื่นและพลังงานออกมา(พ.ศ.2526)

1.4.2 ตัวแผ่กระจายแม่นยำตรง(Exact Propagator of a Two-Dimensional Random System) เป็นงานวิจัยของนายอุดม รอบคอบ นายนิคม ชูศิริ และ ศ. ดร.วิรุฬห์ สายคณิต ใช้วิธีอินทิเกรตตามเส้นทางคำนวณหาตัวแผ่กระจายของอิเล็กตรอนซึ่งเคลื่อนที่ในระนาบ(สองมิติ)ภายใต้สนามแม่เหล็กคงที่ สนามไฟฟ้าที่ขึ้นต่อเวลา นอกจากนั้นยังอยู่ภายใต้อิทธิพลของพลังงานศักย์ที่ไร้ระเบียบ(พ.ศ.2531)

1.4.3 ความหนาแน่นสถานะระหว่างระดับแลนดาวของก๊าซอิเล็กตรอนสองมิติ(Density of States between Landau Levels in a Two-Dimensional Electron gas) เป็นงานวิจัยของนายนิคม ชูศิริ ศ. ดร. วิรุฬห์ สายคณิต และ Prof. Henry R. Glyde ใช้วิธีอินทิเกรตตามเส้นทางคำนวณหาตัวแผ่กระจายของก๊าซอิเล็กตรอนที่อยู่ในระนาบภายใต้ศักย์ที่ไร้ระเบียบและสนามแม่เหล็กคงที่ จากนั้นคำนวณความหนาแน่นสถานะจากตัวแผ่กระจายที่ได้ทำให้พบความหนาแน่นสถานะที่บังเกิดขึ้นระหว่างระดับแลนดาวค่อนข้างสอดคล้องกับการทดลอง(พ.ศ.2531)

1.4.4 ตัวแผ่กระจายของอิเล็กตรอนภายใต้อิทธิพลของแรงฮาร์มอนิก สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้า(The Propagator of an Electron in the Presence Harmonic Force, Magnetic Fields and Electric Fields) เป็นงานวิจัยของนายนิคม ชูศิริ ใช้วิธีอินทิเกรตตามเส้นทางคำนวณตัวแผ่กระจายของอิเล็กตรอนออกมาหลังจากนั้นคำนวณระดับพลังงานที่เป็นไปได้ของอิเล็กตรอนจากตัวแผ่กระจายที่ได้(พ.ศ.2540)

1.5 ระเบียบวิธีวิจัย

1.5.1 คำนวณตัวแผ่กระจายของอิเล็กตรอนสองมิติ $K'_0(0,0;T)$ ภายใต้สนามแม่เหล็กและ nonlocal harmonic oscillator potential ซึ่งถือว่าเป็นประมาณอันดับศูนย์

1.5.2 หาค่าเฉลี่ยของตัวแผ่กระจายของอิเล็กตรอน $\bar{K}(0,0;T)$ ภายใต้สนามแม่เหล็กและ ศักย์ที่ไร้ระเบียบด้วยความแปรปรวนแบบเกาส์เซียน $W(\vec{r} - \vec{r}') = (u / \pi L^2) e^{-|\vec{r} - \vec{r}'|^2 / L^2}$ ประกอบด้วย

1.5.2.1 คำนวณ $\langle |\vec{r} - \vec{r}'|^2 \rangle_0$

1.5.2.2 คำนวณ $\langle W(\vec{r} - \vec{r}') \rangle_0$

1.5.3 จำนวนค่าประมาณของตัวแผ่กระจายเฉลี่ย $\bar{K}(0,0;T)$ ของอนุภาคอิเล็กตรอนสองมิติภายใต้สนามแม่เหล็กและศักย์ที่ไร้ระเบียบในเทอมของ $K'_0(0,0;T)$

1.5.4 จำนวนความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอน $\rho(E)$ ในข้อ 1.5.3 ในกรณีที่ $T \rightarrow \infty$ (large-time approximation) สอดคล้องกับกรณีที่มีอิเล็กตรอนมีพลังงานต่ำ

1.5.5 จำนวนความหนาแน่นสถานะในข้อ 1.5.4 ด้วยวิธีเชิงตัวเลขในกรณีทั่วไปโดยไม่มี การประมาณเกี่ยวกับ T โดยเลือกความแรงของความแปรปรวนและความยาวสหสัมพันธ์ที่เหมาะสมเพื่อเปรียบเทียบกับ การทดลอง

1.5.6 สรุปผลการวิจัยและพิมพ์เพื่อเผยแพร่

1.6 ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยนี้มุ่งเน้นศึกษาอิเล็กตรอนในระบบสองมิติ(ระนาบxy)ที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของ สนามแม่เหล็กและศักย์ที่ไร้ระเบียบ โดยสมมติให้สนามแม่เหล็กมีทิศตามแนว+z ปริมาณหลัก ที่ต้องการคำนวณคือตัวแผ่กระจายและความหนาแน่นของอิเล็กตรอนดังกล่าวเพื่อตรวจสอบว่า ความหนาแน่นสถานะที่ได้สอดคล้องกับการทดลองหรือไม่อย่างไร

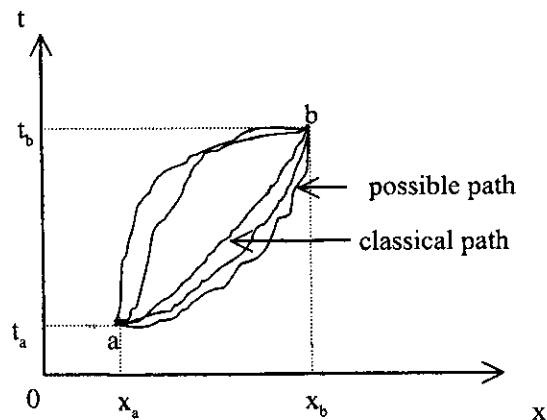
บทที่ 2

ทฤษฎีอินทิเกรตตามเส้นทางและการประยุกต์

2.1 ทฤษฎีอินทิเกรตตามเส้นทางเบื้องต้น

ฟายน์แมนสังเกตว่าถ้าเราต้องการศึกษาพฤติกรรมของอิเล็กตรอน เราอาจใช้วิธีการของชเรอดิงเงอร์เพื่อหาแอมพลิจูดของความน่าจะเป็น(probability amplitude)ของอิเล็กตรอนที่ประพบัติตัวเป็นคลื่น แต่จากการวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับธรรมชาติของการเป็นไปได้ทั้งคลื่นและอนุภาค แสดงว่าแอมพลิจูดของคลื่นของอิเล็กตรอนนั้นอาจคำนวณได้โดยถือว่าอิเล็กตรอนเป็นอนุภาค

พิจารณาอนุภาคตัวหนึ่งเคลื่อนที่จากจุด a ณ เวลา t_a ไปยังจุด b ณ เวลา t_b ในกลศาสตร์แบบฉบับ(classical mechanics) เราสามารถบอกตำแหน่งของอนุภาคที่เวลาใดๆ ได้ นั่นคือเราทราบเส้นทางที่แน่นอนของอนุภาคซึ่งมีอยู่เพียงเส้นทางเดียว แต่ในทางควอนตัมเราไม่สามารถบอกตำแหน่งของอนุภาคได้แน่นอน เราบอกได้เพียงโอกาสของความน่าจะเป็นเท่านั้น ฟายน์แมนพบว่าเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคมีได้หลายเส้นทางนอกเหนือจากเส้นทางแบบฉบับ(classical path) ดังแสดงในรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1

ฟายน์แมนยังพบอีกว่าแอมพลิจูดของความน่าจะเป็นสมนัยกับเส้นทางใดมีรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ดังนี้

$$\phi[x(t)] = [\text{const.}] e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \quad (2.1)$$

โดยที่

$$S[x(t)] = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt \quad (2.2)$$

และลากรางเกียน

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) \quad (2.3)$$

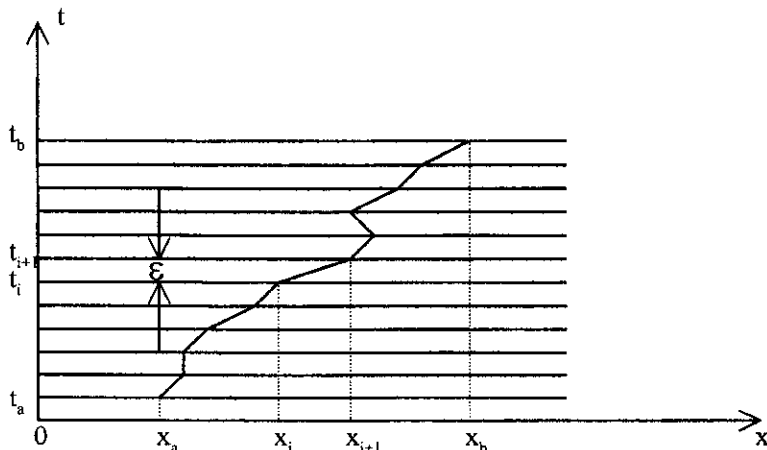
ฟายน์แมนได้ให้นิยามแอมพลิจูดของความน่าจะเป็นที่อนุภาคจะเคลื่อนที่จากจุด a ณ เวลา t_a ไปยังจุด b ณ เวลา t_b ไว้ดังนี้

$$K(b, a) = \sum_{\substack{\text{ทุกเส้นทาง} \\ \text{จาก } a \text{ ไปยัง } b}} \phi[x(t)] = \sum_{\substack{\text{ทุกเส้นทาง} \\ \text{จาก } a \text{ ไปยัง } b}} [\text{const.}] e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]} \quad (2.4)$$

และเรียกแอมพลิจูดของความน่าจะเป็นนี้ว่า ตัวแพร่กระจาย(propagator or transition amplitude) เนื่องจากจำนวนเส้นทางทั้งหมดระหว่างจุด a กับจุด b มีจำนวนมหาศาลจนนับไม่ถ้วน ในการรวมแอมพลิจูดตามสมการ(2.4)จึงเป็นเรื่องยุ่งยากจนแทบเป็นไปได้ เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว ฟายน์แมนจึงเปลี่ยนการบวกหรือผลบวก(summation) ในสมการ(2.4)เป็นการอินทิเกรตแทนด้วยวิธีการดังนี้

แบ่งช่วงเวลาจาก t_a ถึง t_b ออกเป็นช่วงย่อยๆกว้างเท่ากันเป็นจำนวน n ช่วง โดยที่ $t_n - t_{n-1} = t_{n-1} - t_{n-2} = \dots = t_1 - t_0 = \dots = t_2 - t_1 = t_1 - t_0 = \epsilon$ เมื่อ $t_0 = t_a$, $t_n = t_b$, $x(t_0) = x_a$ และ $x(t_n) = x_b$ โดยการแบ่งเช่นนี้ทำให้เราได้เวลาเป็นชุด t_i ซึ่งมีระยะห่างเท่ากับ ϵ แต่ละ t_i เราอาจเลือก x_i คล้ายของกับ t_i หนึ่งจุด โดยการเชื่อมโยงจุดเหล่านั้นด้วยเส้นตรงเราจะได้เส้นทางเดินของอนุภาคหนึ่งเส้นทาง ดังแสดงในรูปที่ 2 ในการเดินทางของอนุภาคจากจุด x_i ไปยังจุด x_{i+1} แอมพลิจูดของความน่าจะเป็นมีค่าประมาณดังนี้

$$\begin{aligned} K(x_{i+1}, x_i) &\approx \frac{1}{A} \exp\left(\frac{i}{\hbar}[X_{i+1}, X_i]\right) \\ &\approx \frac{1}{A} \exp\left(\frac{i}{\hbar}L\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\epsilon}, \frac{x_{i+1} + x_i}{2}, \frac{t_{i+1} + t_i}{2}\right)\right)\epsilon \quad (2.5) \end{aligned}$$



รูปที่ 2.2

แอมพลิจูดของความน่าจะเป็นในการเดินทางของอนุภาคจากจุด a ไปยังจุด b โดยใช้เส้นทางคังแสดงในรูปที่ 2.2 คือ

$$\begin{aligned}\phi[x(t)] &\approx K(x_n, x_{n-1})K(x_{n-1}, x_{n-2})\dots K(x_i, x_{i-1})\dots K(x_1, x_0) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} K(x_i, x_{i-1})\end{aligned}\quad (2.6)$$

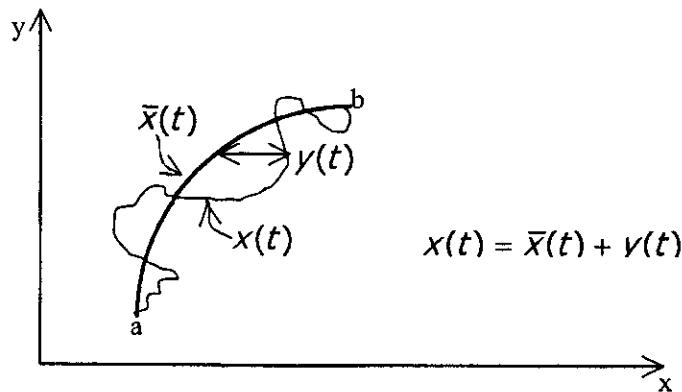
จากสมการ(2.5) และ (2.6) เราจะได้ว่าผลรวมของการมีส่วนร่วม(contribution)จากแต่ละเส้นทางสามารถหาได้โดยการอินทิเกรตสมการ(2.6) กล่าวคือ

$$\begin{aligned}K(b, a) &= \sum_{a \rightarrow b} \phi[x(t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint \dots \int \prod_{i=1}^n K(x_i, x_{i-1}) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint \dots \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_i L\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\epsilon}, \frac{x_{i+1} + x_i}{2}, \frac{t_{i+1} + t_i}{2}\right)\right) \frac{dx_1}{A} \frac{dx_2}{A} \dots \frac{dx_i}{A} \dots \frac{dx_{n-2}}{A} \frac{dx_{n-1}}{A}\end{aligned}\quad (2.7)$$

โดยที่ A เป็นค่าคงที่ พบว่ามีค่าเป็น $(2\pi\hbar\epsilon/m)^{1/2}$ สมการ(2.7)สามารถเขียนให้อยู่ในรูปที่กระทัดรัดกว่าดังนี้

$$K(b, a) = \int_a^b e^{\frac{i}{\hbar} S[b, a]} D[x(t)]\quad (2.8)$$

ซึ่งรู้จักกันดีในนามของอินทิกรัลตามเส้นทาง(path integral) หรืออินทิเกรตตามเส้นทาง(path integration) พิจารณาสมการ(2.7) จะเห็นว่า การคำนวณตัวแปรกระจายนั้น ความยากง่ายในการคำนวณขึ้นอยู่กับรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ของลากรางเจียนของระบบ ถ้าหากทำการอินทิเกรตแต่ละตัวแปรโดยตรง จำนวนครั้งของการอินทิเกรตมากมายนหาศาลจนแทบเป็นไปได้ในทางปฏิบัติ อย่างไรก็ตามเราสามารถเลี่ยงปัญหานี้ได้โดยการแทนเส้นทางใดๆที่เป็นไปได้ด้วยเส้นทางแบบฉบับ ดังแสดงในรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3

ตัวอย่างเช่น ระบบของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกเชิงเส้นซึ่งมีลากรางเกียนดังนี้

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) \quad (2.9)$$

โดยการแทนเส้นทางใดๆที่เป็นไปได้ด้วยเส้นทางแบบฉบับ กับส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากเส้นทางแบบฉบับ กล่าวคือเราให้

$$x(t) = \bar{x}(t) + y(t) \quad (2.10)$$

เมื่อ $\bar{x}(t)$ และ $y(t)$ คือเส้นทางแบบฉบับ และส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากเส้นทางแบบฉบับ เมื่อแทน(2.10)ลงใน(2.8) เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} K(b, a) &= e^{\frac{i}{\hbar} S_d(x_b, x_a)} \int_0^1 D[y(t)] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \frac{m}{2} (\dot{y}^2 - \omega^2 y^2) dt} \\ &= F(t_b, t_a) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_d(x_b, x_a)\right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

โดยที่ $F(t_b, t_a)$ คือ prefactor ซึ่งเป็นปริมาณที่ไม่ขึ้นอยู่กับจุดเริ่มต้นและจุดปลายของการเคลื่อนที่ของอนุภาค ส่วน $S_d(x_b, x_a)$ คือแอคชันแบบฉบับ สามารถคำนวณได้โดยใช้หลัก principle of least action อย่างไรก็ตาม van Vleck (15) พบว่าในกรณีที่ลากรางเกียนของระบบมีรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็น quadratic ค่า prefactor ของระบบสามารถหาได้โดยใช้สูตร

$$F(t_b, t_a) = \left[\det\left(\frac{i}{2\pi\hbar} \frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_b} S_d(x_b, x_a)\right) \right]^{1/2} \quad (2.12)$$

โดยอาศัยสมการ(2.11)และ(2.12) เราจะได้ว่า ในการคำนวณหาตัวแผ่กระจายของอนุภาคในทางควอนตัม กลับกลายเป็นการคำนวณหาเส้นทางแบบฉบับแทน

2.2 ฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของอนุภาค

พิจารณาสมการ(2.8)อีกครั้งหนึ่ง

$$K(b, a) = \int_a^b e^{\frac{i}{\hbar} S[b, a]} D[x(t)] \quad (2.13)$$

เนื่องจาก $S[b, a] = \int_a^b L(x, \dot{x}, t) dt$ และจากคุณสมบัติของการอินทิเกรต เราสามารถแบ่งช่วงของการอินทิเกรตออกเป็นสองส่วนได้ กล่าวคือ

$$\begin{aligned} S[b, a] &= \int_a^b L dt = \int_a^c L dt + \int_c^b L dt \\ &= S[b, c] + S[c, a] \end{aligned} \quad (2.14)$$

จากสมการ(2.13)และสมการ(2.14) เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} K(b, a) &= \int_a^b \left[\exp\left(\frac{i}{\hbar} S[b, c]\right) D[x(t)] \right] \left[\exp\left(\frac{i}{\hbar} S[c, a]\right) D[x(t)] \right] dx_c \\ &= \int_a^b K(b, c) K(c, a) dx_c \end{aligned} \quad (2.15)$$

สูตรนี้อาจตีความได้ว่าอนุภาคเคลื่อนที่จากจุด a ถึงจุด b จะเท่ากับ(หรือให้ผลเหมือนกับ) อนุภาคเคลื่อนที่จาก a ถึง c แล้วจาก c ถึง b แอมพลิจูดของอนุภาคที่เคลื่อนที่จาก a ถึง b จะเท่ากับ ผลคูณของแอมพลิจูดของแต่ละช่วงของการเดินทาง แอมพลิจูดรวมทั้งหมดของอนุภาคที่เคลื่อนที่ จาก a ถึง b จึงได้จากการอินทิเกรตตัวแปร x_c กล่าวคือ

$$K(a \rightarrow c \rightarrow b) = K(b, c)K(c, a)$$

$$K(a \rightarrow b) = \int_{-\infty}^{\infty} K(b, c)K(c, a)dx_c \quad (2.16)$$

ในกรณีที่เราไม่สนใจว่าอนุภาคเริ่มต้นมาจากตำแหน่งใด(x_c อาจมาจากตำแหน่งใดๆก็ได้) $K(b, a)$ ก็จะ กลายเป็นแอมพลิจูดของความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคที่ตำแหน่ง x_b ณ เวลา t_b แอมพลิจูดดังกล่าว นี้ก็คือฟังก์ชันคลื่นนั่นเอง กล่าวคือ

$$K(b, a) = K(x_b, t_b; x_a, t_a) \xrightarrow{\text{ไม่สนใจต้นกำเนิด}(x_c, t_c)} \psi(x_b, t_b)$$

ดังนั้น จากสมการ(2.15)หรือ(2.16) ถ้าไม่สนใจตำแหน่งเริ่มต้น(x_c, t_c) เราจะได้ว่า

$$\psi(x_b, t_b) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_b, t_b; x_c, t_c)\psi(x_c, t_c)dx_c \quad (2.17)$$

สรุปได้ว่า ถ้าทราบฟังก์ชันคลื่น ณ เวลา t_c และทราบรูปแบบของตัวแผ่กระจาย เราก็ สามารถหาฟังก์ชันคลื่น ณ เวลา t ใดๆได้ โดยที่ $t > t_c$

พิจารณาระบบยี่นยง(stationary system)ใดๆ แฮมิลโทเนียนของระบบไม่ขึ้นต่อเวลาอย่าง ชัดแจ้ง คำตอบหรือผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์,

$$H\psi(x, t) = \frac{i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad (2.18)$$

จะอยู่ในรูป

$$\psi(x, t) = \sum_n C_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \psi_n(x) \quad (2.19)$$

โดยที่

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \psi_n^*(x) e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} dx \quad (2.20)$$

เมื่อแทน C_n ลงในสมการ(2.19) เราจะได้

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x', t') \psi_n^*(x') e^{\frac{i}{\hbar} E_n t'} dx' \psi_n(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \psi_n(x) \psi_n^*(x') e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t-t')} \psi(x', t') dx' \end{aligned} \quad (2.21)$$

เปรียบเทียบกับสมการ(2.17)กับสมการ(2.21) เราจะได้ว่า

$$K(x, t; x', t') = \sum_n \psi_n(x) \psi_n^*(x') e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t-t')} \quad (2.22)$$

จะเห็นว่าตัวแปรกระจายจะให้ความรู้แก่เราเกี่ยวกับฟังก์ชันคลื่นและพลังงานพร้อมๆกัน

2.3 อนุภาคอิสระ(Free Particle)

อนุภาคอิสระหมายถึงอนุภาคที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของแรงใดๆ พลังงานศักย์ของอนุภาคมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นพลังงานรวมและลากรางเจียนของระบบจะประกอบด้วยพลังงานจลน์แต่เพียงอย่างเดียว กล่าวคือ

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (2.23)$$

อาศัยสมการ(2.7) ตัวแปรกระจายสามารถเขียนได้ดังนี้

$$K(b, a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint \dots \int \exp\left(\frac{im}{2\hbar\epsilon} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2\right) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \left(\frac{m}{2\pi\hbar\epsilon}\right)^{n/2} \quad (2.24)$$

พิจารณาสมการ(2.24)จะเห็นว่าประกอบไปด้วยอินทิกรัลแบบเกาส์เซียน(Gaussian integral)เป็นจำนวนมาก กล่าวคือเป็นอินทิกรัลในรูปแบบ

$$\int \exp(-ax^2) dx \quad \text{หรือ} \quad \int \exp(-ax^2 + bx) dx$$

เนื่องจากการอินทิเกรตเทอมที่เป็นเกาส์เซียน ผลลัพธ์ที่ได้กลับมามีอยู่ในรูปเกาส์เซียนอีก ดังนั้นเราสามารถอินทิเกรตตัวแปรในสมการ(2.24)ทีละตัวแปร พิจารณาการอินทิเกรตตัวแรก

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{2\pi\hbar\epsilon}\right) \exp\left(-\frac{m}{2\hbar\epsilon} [(x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_0)^2]\right) dx_1 \\ = \left(\frac{m}{2\pi\hbar \cdot 2\epsilon}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m}{2\hbar \cdot 2\epsilon} (x_2 - x_0)^2\right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

อันดับต่อไปเราคูณสมการ(2.25)ด้วยเทอม

$$\left(\frac{m}{2\pi\hbar\epsilon}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m}{2\hbar\epsilon} (x_3 - x_2)^2\right) \quad (2.26)$$

แล้วทำการอินทิเกรตโดยให้ x_2 เป็นตัวแปร ผลที่ได้จะคล้ายกับสมการ(2.25) ยกเว้นตำแหน่ง $(x_2 - x_0)^2$ ต้องเปลี่ยนเป็น $(x_3 - x_0)^2$ นอกจากนี้เทอม 2ϵ จะถูกแทนด้วย 3ϵ ในสองตำแหน่ง ผลที่ได้คือ

$$\left(\frac{m}{2\pi\hbar \cdot 3\epsilon}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m}{2\hbar \cdot 3\epsilon} (x_3 - x_0)^2\right) \quad (2.27)$$

โดยวิธีการดังกล่าว หลังจากที่ได้ปฏิบัติเป็นจำนวน $n-1$ ครั้ง เราได้

$$\left(\frac{m}{2\pi\hbar \cdot n\epsilon}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m}{2\hbar \cdot n\epsilon} (x_n - x_0)^2\right) \quad (2.28)$$

เนื่องจาก $n\epsilon = t_b - t_0 = t_b - t_a$ ดังนั้น ในที่สุดเราได้ตัวแปรกระจายของอนุภาคอิสระ

$$K(b, a) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar(t_b - t_a)}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m}{2\hbar(t_b - t_a)} (x_b - x_a)^2\right) \quad (2.29)$$

2.4 ฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้น

ฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้นหรือตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกหนึ่งมิติมีลากรางเจียนในรูปแบบดังนี้

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 x^2 \quad (2.30)$$

ดังนั้นตัวแปรกระจายสามารถเขียนได้เป็น

$$K(b, a) = \int_a^b \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_a^b \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 x^2\right) dt\right) \mathcal{D}[x(t)] \quad (2.31)$$

เราอาจพิจารณาการอินทิเกรตข้างต้น โดยตรงเช่นเดียวกับกรณีของอนุภาคอิสระ ในทางทฤษฎีแล้ว เราอาจคำนวณค่าอินทิกรัลเหล่านี้ได้ เนื่องจากรูปแบบของการอินทิเกรตยังคงเป็นแบบเกาส์เซียน แต่ในทางปฏิบัติแล้วการคำนวณดังกล่าวค่อนข้างยุ่งยาก จึงขอเสนอวิธีใหม่ดังได้แสดงไว้ในหัวข้อ 2.1 กล่าวคือแยกทางเดินแบบฉบับออกจากทางเดินที่เป็นไปได้ทั้งหมด วิธีการนี้จะประโยชน์ไม่เฉพาะแต่ปัญหาของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เท่านั้น แต่จะมีประโยชน์ต่อปัญหาอื่นๆที่มีลากรางเจียนยุ่งยากกว่านี้

จากวิชากลศาสตร์แบบฉบับ ทางเดินของอนุภาคจะต้องสอดคล้องสมการลากรางหรือสอดคล้องหลักแห่งการกระทำที่น้อยที่สุด(the principle of least action) กล่าวในเชิงคณิตศาสตร์ เราได้

$$\delta S = \delta \int L(x, \dot{x}, t) dt = 0 \quad (2.32)$$

ขั้นตอนในการคำนวณหาเส้นทางแบบฉบับ \bar{x} อาจกระทำได้ดังนี้ สมมติว่าเราทำให้ทางเดินเปลี่ยนไปจากทางเดินแบบฉบับเป็นจำนวน δx เนื่องจาก $\delta x(t_a) = \delta x(t_b) = 0$ ดังนั้น

$$\delta S = S(\bar{x} + \delta x) - S(\bar{x}) = 0 \quad (2.33)$$

กระจาย δx ออกเป็นอนุกรมกำลัง โดยคิดเฉพาะกำลังที่หนึ่งของ δx เราสามารถเขียน

$$\begin{aligned} S(\bar{x} + \delta x) &= \int_a^b L(\bar{x} + \delta x, \dot{\bar{x}} + \delta \dot{x}, t) dt \\ &= \int_a^b \left(L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) + \delta \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \delta x \frac{\partial L}{\partial x} \right) dt \\ &= S(\bar{x}) - \int_a^b \left(\delta \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \delta x \frac{\partial L}{\partial x} \right) dt \end{aligned} \quad (2.34)$$

โดยการอินทิเกรตบางส่วนเราได้

$$\delta S = \delta x \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_a^b \delta \dot{x} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right) dt \quad (2.35)$$

เนื่องจาก δx ที่จุดปลายทั้งสองมีค่าเป็นศูนย์ เทอมแรกทางขวาของสมการ(2.35)จึงมีค่าเป็นศูนย์ ระหว่างจุดปลายทั้งสอง δx มีค่าเท่าใดก็ได้ เงื่อนไข $\delta S = 0$ จึงสอดคล้องกับ

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.36)$$

เราเรียกสมการ(2.36)ว่า สมการลากราง(Lagrange equation)

ถ้ารับกรณีของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ สมการ(2.36) กลับกลายเป็น

$$\ddot{\bar{x}} + \omega^2 \bar{x} = 0 \quad (2.37)$$

ผลเฉลยหรือคำตอบทั่วไปของสมการ(2.37)คือ

$$\bar{x} = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2.38)$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงที่ไม่ใช่จะจง อาศัยเงื่อนไข $\bar{x}(t_a) = x_a$ และ $\bar{x}(t_b) = x_b$ คำตอบของสมการ(2.38)จึงกลายเป็น

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{\sin \omega(t_b - t_a)} (x_b \sin \omega(t - t_a) + x_a \sin \omega(t_b - t)) \quad (2.39)$$

(2.39)นี้สามารถนำไปคำนวณหาแอดชันแบบฉบับ S_d ได้ กล่าวคือ

$$S_d = \int_a^b \left(\frac{m}{2} \dot{\bar{x}}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 \bar{x}^2 \right) dt \quad (2.40)$$

เราอาจคำนวณหา S_d โดยการแทนค่า $\dot{\bar{x}}^2$ และ \bar{x}^2 ที่ได้จากสมการ(2.39)ลงในสมการ(2.40)แล้วทำการอินทิเกรต อย่างไรก็ตามการคำนวณจะสะดวกกว่าหากเราอินทิเกรตสมการ(2.40)บางส่วนเสียก่อน โดยที่

$$S_d = \frac{m}{2} (\dot{\bar{x}} \bar{x}) \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_a^b \left(\frac{m}{2} \ddot{\bar{x}} + \frac{m}{2} \omega^2 \bar{x}^2 \right) dt \quad (2.41)$$

เราจะเห็นว่าเทอมที่ 2 ทางด้านขวามือของสมการ(2.41)มีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจาก \bar{x} สอดคล้องสมการ(2.39) ในที่สุดเราได้

$$S_d = \frac{m}{2} (\dot{\bar{x}}(t_b) \bar{x}(t_a) - \dot{\bar{x}}(t_a) \bar{x}(t_b)) \quad (2.42)$$

หาค่าอนุพันธ์ของ $\bar{x}(t)$ เทียบกับเวลา t แล้วแทนค่า t เท่ากับ t_a และ t_b เราจะได้

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t_a) &= \frac{\omega}{\sin \omega(t_b - t_a)} (x_b - x_a \cos \omega(t_b - t_a)) \\ \dot{\bar{x}}(t_b) &= \frac{\omega}{\sin \omega(t_b - t_a)} (x_b \cos \omega(t_b - t_a) - x_a) \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

แทนค่า $\dot{\bar{x}}(t_a), \dot{\bar{x}}(t_b), \bar{x}(t_a)$ และ $\bar{x}(t_b)$ ลงในสมการ(2.42) เราได้

$$S_d = \frac{m\omega}{2 \sin \omega(t_b - t_a)} ((x_a^2 + x_b^2) \cos \omega(t_b - t_a) - 2x_a x_b) \quad (2.44)$$

เมื่อได้ S_d แล้ว เราก็สามารถคำนวณหา prefactor โดยใช้สูตรของ van Vleck (15) ได้เลย กล่าวคือ โดยอาศัยสมการ(2.12) เราได้

$$F(t_b, t_a) = \left[\det \left(\frac{i}{2\pi\hbar} \frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_b} S_d(x_b, x_a) \right) \right]^{1/2}$$

$$= \left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sin \omega(t_b - t_a)} \right)^{1/2} \quad (2.45)$$

จากสมการ(2.44), (2.45) และอาศัยสมการ(2.11) ในที่สุดเราได้ตัวแพร่กระจายของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้นดังนี้

$$K(b, a) = \left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sin \omega T} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{im\omega}{2\hbar \sin \omega T} \left((x_a^2 + x_b^2) \cos \omega T - 2x_a x_b \right) \right) \quad (2.46)$$

โดยที่ $T = t_b - t_a$

2.5 ฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้น

ในหัวข้อนี้เราจะแสดงให้เห็นว่าสมการ(2.46)ได้ให้รายละเอียดเกี่ยวกับฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของระบบไว้ครบถ้วน เราทราบว่าตัวแพร่กระจาย(2.46)สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันคลื่นและพลังงานได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sin \omega T} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{im\omega}{2\hbar \sin \omega T} \left((x_a^2 + x_b^2) \cos \omega T - 2x_a x_b \right) \right) \\ & = \sum_n \psi_n(x_b) \psi_n^*(x_a) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n T} \end{aligned} \quad (2.47)$$

เพื่อให้ได้ฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ เราเขียนสมการทางซ้ายมือของ(2.47)เสียใหม่โดยอาศัยความสัมพันธ์

$$\left. \begin{aligned} i \sin \omega T &= \frac{e^{i\omega T} (1 - e^{-2i\omega T})}{2} \\ \cos \omega T &= \frac{e^{i\omega T} (1 + e^{-2i\omega T})}{2} \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการทางด้านซ้ายของ(2.47) เราได้

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} e^{-i\omega T/2} (1 - e^{-2i\omega T})^{-1/2} \exp \left(-\frac{m\omega}{2\hbar} \left[(x_a^2 + x_b^2) \frac{1 + e^{-2i\omega T}}{1 - e^{-2i\omega T}} - \frac{4x_a x_b e^{2i\omega T}}{1 - e^{-2i\omega T}} \right] \right) \quad (2.49)$$

ถ้าต้องการให้นิพจน์ทางซ้ายมือของสมการ(2.47)มีลักษณะคล้ายกับนิพจน์ทางขวามือซึ่งเป็นอนุกรม เราจำเป็นต้องกระจายสมการ(2.49)ออกเป็นอนุกรมกำลังของ $e^{-i\omega T}$ เนื่องจากเทอมแรกของ(2.49)คือ $e^{-i\omega T/2}$ ดังนั้นเทอมต่อไปจะต้องมีรูปแบบเป็น $e^{-i\omega T/2} e^{-in\omega T}$ โดยที่ $n=0,1,2,3,\dots$ การที่อนุกรมมีลักษณะเช่นนี้ แสดงว่าพลังงานของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์คือ

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega \quad (2.50)$$

ถ้าเราต้องการทราบฟังก์ชันคลื่นของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ เราต้องการกระจายนิพจน์ของ(2.49)ให้สมบูรณ์กว่านี้ เราจะแสดงวิธีการกระจายถึงเทอม $n=2$ เท่านั้น อย่างไรก็ตามโดยหลักการแล้วเราสามารถกระจายถึงเทอมที่ n ใดๆก็ได้ โดยการกระจายนิพจน์(2.49)ถึงอันดับ $n=2$ เราได้

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-2i\omega T/2} \left(1 + \frac{e^{-2i\omega T}}{2} + \dots\right) \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_a^2 + x_b^2) - \frac{m\omega}{2\hbar}(x_a^2 + x_b^2)(e^{-2i\omega T} + \dots)\right. \\
& \quad \left. + \frac{2}{\hbar}m\omega x_a x_b e^{-i\omega T} + \dots\right\} \\
\text{หรือ} \quad & \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_a^2 + x_b^2)e^{-i\omega T/2}} (1 + \frac{e^{-2i\omega T}}{2}) \left\{1 + \frac{2}{\hbar}m\omega x_a x_b e^{-i\omega T} + \frac{4m\omega}{2\hbar}x_a^2 x_b^2 e^{-2i\omega T}\right. \\
& \quad \left. - \frac{m\omega}{\hbar}(x_a^2 + x_b^2)e^{-2i\omega T} + \dots\right\}
\end{aligned} \tag{2.51}$$

เปรียบเทียบเทอมแรกของ(2.51)กับ(2.47) เราจะได้ว่า

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_a^2 + x_b^2)} e^{-i\omega T/2} = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 T} \psi_0(x_b) \psi_0^*(x_a) \tag{2.52}$$

สมการ(2.52)นี้หมายความว่า $E_0 = \hbar\omega/2$ และฟังก์ชันคลื่นที่สมนัยกับสถานะพื้นคือ

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega^2 x^2}{2\hbar}} \tag{2.53}$$

เราอาจคำนวณหาพลังงานและฟังก์ชันคลื่นในสถานะอื่นๆได้โดยพิจารณาเทอมต่อไป เช่น สถานะถัดจากสถานะพื้น พิจารณา

$$e^{-i\omega T/2} e^{-i\omega T} \frac{m\omega}{\pi\hbar} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_a^2 + x_b^2)} \frac{2m\omega}{\hbar} x_a x_b = e^{-iE_1 T/\hbar} \psi_1(x_b) \psi_1^*(x_a) \tag{2.54}$$

สมการนี้แสดงว่า $E_1 = 3\hbar\omega/2$ และ

$$\psi_1(x) = \frac{2m\omega}{\hbar} x \psi_0(x) \tag{2.55}$$

ซึ่งก็ตรงกับสูตรที่ได้จากวิธีการของชโรดิงเงอร์ ในทำนองเดียวกันเทอมต่อไปจะให้พลังงาน $E_2 = 5\hbar\omega/2$ สำหรับส่วนที่ขึ้นกับ x_a และ x_b จะมีลักษณะดังนี้

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \left(e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_a^2 + x_b^2)}\right) \left\{\frac{2m^2\omega^2}{\hbar^2} x_a^2 x_b^2 - \frac{m\omega}{\hbar}(x_a^2 + x_b^2)\right\} \tag{2.56}$$

เทอมนี้จะต้องเท่ากับ $\psi_2(x_b) \psi_2^*(x_a)$ เนื่องจากเทอมที่อยู่ภายในวงเล็บใหญ่สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2m\omega}{\hbar} x_a^2 - 1\right) \left(\frac{2m\omega}{\hbar} x_b^2 - 1\right) \tag{2.57}$$

ดังนั้นเราได้

$$\psi_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{2m\omega}{\hbar} x^2 - 1\right) \psi_0(x) \tag{2.58}$$

อาศัยวิธีการดังกล่าวนี้ เราสามารถคำนวณหาพลังงานกับฟังก์ชันคลื่นใดๆของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ได้ทุกระดับ

บทที่ 3

ตัวแผ่กระจายแม่ตรง(การประมาณอันดับศูนย์)

3.1 บทนำ

ถึงตอนนี้เราจะพิจารณาถึงปัญหาของอิเล็กตรอนที่ถูกจำกัดเขตอยู่ในระนาบภายใต้อิทธิพลของสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอในทิศตั้งฉากกับระนาบของอิเล็กตรอน สนามไฟฟ้าที่แปรค่าได้ และศักย์ที่ไร้ระเบียบซึ่งถูกจำลองด้วย nonlocal harmonic oscillator potential หากปราศจากสนามไฟฟ้าที่แปรค่าได้ดังกล่าว ตัวแผ่กระจายที่ได้ก็คือการประมาณอันดับศูนย์นั่นเอง [$K'_0(0,0;T)$ ตามที่กล่าวถึงในระเบียบวิธีวิจัยหน้า 5] สำหรับ nonlocal harmonic oscillator potential ซึ่งเป็นตัวแทนของความไร้ระเบียบได้รับการนำเสนอขึ้นมาเป็นครั้งแรกโดยฟายน์แมน(16)ในการคำนวณเกี่ยวกับปัญหาของโพลารอน แบบจำลองดังกล่าวดูเหมือนจะค่อนข้างอุดมคติอยู่สักหน่อย ทว่ามันอาจมีความสัมพันธ์กับพฤติกรรมของอิเล็กตรอนที่กำลังเคลื่อนที่อยู่ภายใต้สนามแม่เหล็กภายนอกและศักย์ที่ไร้ระเบียบอยู่บ้างไม่มากนัก และกำลังเป็นปัญหาที่ได้รับความสนใจในปัจจุบัน แม้ว่าปัญหาที่กล่าวถึงนี้เป็นปัญหาที่ค่อนข้างซับซ้อนในเชิงคณิตศาสตร์เป็นอันมาก ทว่าลากรางเจียนของระบบยังคงมีรูปแบบกำลังสอง(quadratic form)ทำให้ตัวแผ่กระจายสามารถคำนวณได้อย่างแม่นยำ

3.2 ลากรางเจียน

ลากรางเจียนของอิเล็กตรอนที่อยู่ภายใต้ศักย์ทั้งหมดที่กล่าวถึงข้างต้น โดยสนามแม่เหล็กมีทิศตามแนว+z เขียนได้ดังนี้

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Omega(xy - yx)] - \frac{m}{2T} \frac{\omega^2}{2} \int_0^t [\vec{r}(t) - \vec{r}(\sigma)]^2 d\sigma + e\vec{E}(t) \cdot \vec{r}(t) \quad (3.1)$$

เมื่อ $\vec{r} = (x, y)$, $\Omega = \frac{eB}{mc}$ คือความถี่ไซโคลตรอน ส่วน ω หมายความว่าเชิงมุมของ nonlocal

harmonic oscillator และ $\vec{E}(t)$ แทนสนามไฟฟ้าที่แปรค่าได้ ตัวแผ่กระจายของระบบอิเล็กตรอนดังกล่าวสามารถเขียนอยู่ในรูปอินทิกรัลตามเส้นทางดังนี้

$$K(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) = \int_0^T e^{\frac{i}{\hbar} S[b,a]} D[\vec{r}(t)] \quad (3.2)$$

โดยที่ $S[b, a] = \int_0^T L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) dt$ คือแอคชัน และ $D[\vec{r}(t)]$ ส่อให้เห็นว่าอินทิกรัลจะต้องดำเนินการภายใต้เงื่อนไขขอบเขต $\vec{r}(0) = \vec{r}_a$ และ $\vec{r}(T) = \vec{r}_b$ ตัวแผ่กระจายที่ปรากฏในสมการ(3.2)สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
K(\vec{r}_b, \vec{r}_a, T) = & \iint D[x(t)]D[y(t)] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m}{2} \int_0^T [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Omega(x\dot{y} - y\dot{x}) - \omega^2(x^2 + y^2)] dt \right. \right. \\
& + \frac{m}{2T} \omega^2 \left[\int_0^T \int_0^T x(t)x(\sigma) dt d\sigma + \int_0^T \int_0^T y(t)y(\sigma) dt d\sigma \right] \\
& \left. \left. + e \left[\int_0^T E_x(t)x(t) dt + \int_0^T E_y(t)y(t) dt \right] \right] \right] \quad (3.4)
\end{aligned}$$

สำหรับ E_x และ E_y คือองค์ประกอบย่อยของสนามไฟฟ้า \vec{E} ในแนวแกน x และแนวแกน y ตามลำดับ โครข่ายที่ลากรางเทียนของระบบดังกล่าวซับซ้อนเกินกว่าจะทำการอินทิเกรตได้โดยตรง เพื่อหลีกเลี่ยงความยุ่งยากดังกล่าวเราจะใช้วิธีการของ Stratonovich(17)ด้วยการอาศัยเอกลักษณ์

$$\begin{aligned}
& \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2T} \left\{ \int_0^T \int_0^T x(t)x(\sigma) dt d\sigma + \int_0^T \int_0^T y(t)y(\sigma) dt d\sigma \right\} \right] \\
& = \left\langle \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left\{ f_x \int_0^T x(t) dt + f_y \int_0^T y(t) dt \right\} \right] \right\rangle_{f_x, f_y} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

เพื่อใช้ในการแปลงสมการ(3.4)ให้อยู่ในรูปที่จัดการได้ หลังจากอาศัยเอกลักษณ์ตามสมการ(3.5) สมการ(3.4)กลับกลายเป็น

$$K(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) = \langle K_{eff}(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) \rangle_{f_x, f_y} \quad (3.6)$$

โดยที่ $K_{eff}(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T)$ มีชื่อเรียกว่าตัวแผ่กระจายยังผลซึ่งสอดคล้องกับระบบของอิเล็กตรอนที่เคลื่อนที่ภายใต้สนามแม่เหล็ก แรงภายนอกที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาและแรงฮาร์มอนิก ตัวแผ่กระจายยังผลดังกล่าวถูกกำหนดโดย

$$\begin{aligned}
K_{eff}(\vec{r}_b, \vec{r}_a, T) = & \iint D[x(t)]D[y(t)] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\frac{m}{2} \int_0^T [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Omega(x\dot{y} - y\dot{x}) - \omega^2(x^2 + y^2)] dt \right. \right. \\
& \left. \left. + \int_0^T [eE_x(t) + f_x]x(t) dt + \int_0^T [eE_y(t) + f_y]y(t) dt \right] \right] \quad (3.7)
\end{aligned}$$

สัญกรณ์ $\langle \dots \rangle_{f_x, f_y}$ หมายถึงการหาค่าเฉลี่ยแบบเกาส์เซียนซึ่งถูกกำหนดโดย

$$\langle A \rangle_{f_x, f_y} = \frac{\int_0^T \int_0^T \exp \left[-\frac{iT}{2\hbar m \omega^2} (f_x^2 + f_y^2) \right] A df_x df_y}{\int_0^T \int_0^T \exp \left[-\frac{iT}{2\hbar m \omega^2} (f_x^2 + f_y^2) \right] df_x df_y} \quad (3.8)$$

โดยอาศัยสูตรของ van Vleck-Pauli เราสามารถเขียนตัวแผ่กระจายยังผลดังนี้

$$K_{eff}(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) = F_{eff}(T, 0) \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_{eff}^d(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) \right] \quad (3.9)$$

โดยที่ $F_{eff}(T, 0)$ คือ pre-exponential factor ที่สอดคล้องกับแอกชันแบบฉบับยังผล

$$S_{eff}^d(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) = \int_0^T L_{eff}(\vec{r}_d, \dot{\vec{r}}_d, t) dt \quad (3.10)$$

และสามารถคำนวณได้โดยอาศัยสูตร

$$F_{eff} f(T,0) = \det \left[\frac{i}{2\pi\hbar} \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}_a \partial \vec{r}_b} (S_{eff}^d(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T)) \right]^{1/2} \quad (3.11)$$

\vec{r}_{cl} ที่ปรากฏในสมการ(3.10)หมายถึงเส้นทางแบบฉบับของอิเล็กตรอนในระบบยังผลที่สอดคล้องกับลากรางเกียนยังผล

$$L_{eff}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Omega(x\dot{y} - y\dot{x}) - \omega^2(x^2 + y^2)] \\ + [eE_x(t) + f_x]x + [eE_y(t) + f_y]y \quad (3.12)$$

3.3 แอคชันคลาสสิกยังผล

ถึงตอนนี้เราจะให้ความสนใจต่อแอคชันคลาสสิกยังผล คล้องจองกับลากรางเกียนยังผล เพื่อให้ปัญหาง่ายดูเข้าเราจะอาศัยเมทริกซ์ขนาด 2×2 ที่นำเสนอโดยPapadoupoulos(18)ที่ปรากฏในงานของเขาเกี่ยวกับการเป็นแม่เหล็กของประจุภายใต้แรงฮาร์มอนิก กล่าวคือกำหนดให้

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

ซึ่งมีคุณสมบัติ $J^2 = -I$ เราจะแทนองค์ประกอบของเวกเตอร์บอกตำแหน่งที่ตั้งฉากกับสนามแม่เหล็กด้วยเมทริกซ์ขนาด 2×1 โดยให้

$$r_{\perp} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

ในทำนองเดียวกันแรงขับของระบบยังผลสามารถแทนด้วยเมทริกซ์ F_{\perp} ,

$$F_{\perp} = f_{\perp} + eE_{\perp} = \begin{pmatrix} f_x + eE_x(t) \\ f_y + eE_y(t) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

จากสมการ(3.12), (3.13), (3.14)และ(3.15) เราจะเห็นได้ว่าลากรางเกียนยังผลสามารถเขียนอยู่ในรูปของเมทริกส์ได้ดังนี้

$$L_{eff}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, T) = \frac{m}{2} (\dot{r}_{\perp}^2 - \omega^2 r_{\perp}^2 - \Omega \tilde{r}_{\perp} J \dot{r}_{\perp}) + \tilde{F}_{\perp} r_{\perp} \quad (3.16)$$

โดยที่ \tilde{r}_{\perp} และ \tilde{F}_{\perp} เป็นสัญลักษณ์การสลับเปลี่ยน(transpose)ของ r_{\perp} และ F_{\perp} ตามลำดับ สมการ(3.16)นำไปสู่สมการการเคลื่อนที่เชิงคลาสสิก

$$\ddot{r}_{\perp} + \Omega J \dot{r}_{\perp} + \omega^2 I r_{\perp} = \frac{F_{\perp}}{m} \quad (3.17)$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบเขต

$$r_{\perp}(0) = r'_{\perp} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}, \quad r_{\perp}(T) = r''_{\perp} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

ผลเฉลยของสมการ(3.17)สามารถแตกออกเป็นสองส่วน กล่าวคือ

$$r_{\perp}(t) = r_{\perp C}(t) + r_{\perp P}(t) \quad (3.19)$$

เมื่อ $r_{\perp C}(t)$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธ์

$$\ddot{r}_{\perp} + \Omega J \dot{r}_{\perp} + \omega^2 I r_{\perp} = 0 \quad (3.20)$$

สมการช่วยที่สมนัยการสมการ(3.20)คือ

$$R^2 + \Omega J R + \omega^2 I = 0 \quad (3.21)$$

ได้ผลเฉลยที่เขียนอยู่ในรูปของเมทริกส์ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= -\frac{\Omega J}{2} + \Omega' J \\ R_2 &= -\frac{\Omega J}{2} - \Omega' J \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

โดยที่ $\Omega' = \left(\frac{\Omega^2}{4} + \omega^2 \right)^{1/2}$ ทำให้เราได้

$$r_{\perp C}(t) = e^{-\frac{\Omega}{2}t} (e^{\Omega' t} A + e^{-\Omega' t} B) \quad (3.23)$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง ให้ตั้งข้อสังเกตว่าเมทริกส์ที่อยู่ในรูป $e^{\pm \lambda t}$ มีสมบัติที่สำคัญคือ

$$e^{\pm \lambda t} = I \cos \varphi \pm J \sin \varphi \quad (3.24)$$

หลังจากประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตเข้าไป สมการ(3.23)กลับกลายเป็น

$$r_{\perp C}(t) = \frac{e^{-\frac{\Omega t}{2}}}{\sin(\Omega' T)} [e^{\frac{\Omega T}{2}} \sin(\Omega' t) r''_{\perp} + \sin(\Omega'(T-t)) r'_{\perp}] \quad (3.25)$$

ถึงตอนนี้จะให้ความสนใจต่อ $r_{\perp C}(t)$ ซึ่งสอดคล้องสมการไม่เอกพันธ์

$$(D^2 + \Omega J D + \omega^2 I) r_{\perp P} = \frac{F_{\perp}}{m} \quad (3.26)$$

โดยที่ D เป็นสัญลักษณ์ของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ d/dt ในการคำนวณ $r_{\perp P}(t)$ เราจะใช้ระเบียบวิธีของฟังก์ชันกรีน(Green's function method) หลังจากได้ฟังก์ชันกรีน $g(t,s)$ ซึ่งสอดคล้องสมการเชิงอนุพันธ์

$$(D^2 + \Omega J D + \omega^2 I) g(t,s) = \delta(t-s) \quad (3.27)$$

เราจะได้ผลเฉลย $r_{\perp P}(t)$ ผลที่ได้คือ

$$r_{\perp P}(t) = \int_0^T g(t,s) \frac{F_{\perp}(s)}{m} ds \quad (3.28)$$

ฟังก์ชันกรีนสามารถคำนวณได้ออกมาอย่างแม่นยำ จากสมการเชิงอนุพันธ์(3.27) เราได้

$$g(t, s) = -\frac{1}{\Omega' \sin(\Omega' T)} [H(t-s) \sin(\Omega' s) \sin(\Omega'(T-t)) + H(s-t) \sin(\Omega' t) \sin(\Omega'(T-s))] e^{\frac{\Omega'}{2} J(s-t)} \quad (3.29)$$

เมื่อ $H(t-s)$ และ $H(s-t)$ คือฟังก์ชันขั้นบันไดไฮวิไซด์(Heaviside step function) ที่สอดคล้องความสัมพัทธ์

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

ท้ายสุดเราได้ผลเฉลยทั่วไป

$$\begin{aligned} r_{\perp}(t) &= r_{\perp c}(t) + r_{\perp p}(t) \\ &= \frac{e^{\frac{\Omega t}{2}}}{\sin(\Omega' T)} [e^{\frac{\Omega T}{2}} \sin(\Omega' t) r_{\perp}'' + \sin(\Omega'(T-t)) r_{\perp}'] + \int_0^t g(t, s) \frac{F_{\perp}(s)}{m} ds \end{aligned} \quad (3.31)$$

ถึงตอนนี้เราพุ่งความสนใจไปยังแอกชันคลาสสิกยังผล $S_{eff}^d(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T)$,

$$S_{eff}^d(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) = \frac{m}{2} \int_0^T \dot{r}_{\perp}^2 dt - \frac{m}{2} \int_0^T (\Omega \tilde{r}_{\perp} J \dot{r}_{\perp} + \omega^2 r_{\perp}^2) dt + \int_0^T \tilde{F}_{\perp} r_{\perp} dt \quad (3.32)$$

ด้วยวิธีการของการอินทิเกรตที่ละส่วนในส่วนพจน์แรกของสมการ(3.32)พร้อมกับนำสมการการเคลื่อนที่(3.17)มาประยุกต์ใช้เราได้

$$S_{eff}^d(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) = \frac{m}{2} (\tilde{r}_{\perp}(T) \dot{r}_{\perp}(T) - \tilde{r}_{\perp}(0) \dot{r}_{\perp}(0)) + \frac{1}{2} \int_0^T \tilde{r}_{\perp} F_{\perp} dt \quad (3.33)$$

ผลเฉลยที่บริบูรณ์ของแอกชันแบบฉบับยังผลคือ

$$\begin{aligned} S_{eff}^d(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) &= \frac{m}{2} \frac{\Omega'}{\sin(\Omega' T)} \left(\cos(\Omega' T) (r_{\perp}''^2 + r_{\perp}'^2) - 2 \tilde{r}_{\perp}'' e^{\frac{\Omega T}{2}} r_{\perp}' \right) \\ &+ \int_0^T \tilde{r}_{\perp c}(t) F_{\perp}(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T \tilde{F}_{\perp}(t) g(t, s) \frac{F_{\perp}(s)}{m} ds dt \end{aligned} \quad (3.34)$$

สำหรับ pre-exponential factor ที่สัมพันธ์กับตัวแผ่กระจายยังผลสามารถคำนวณได้อย่างแม่นยำ เราพบว่า

$$F_{eff}(T, 0) = \frac{m \Omega'}{2 \pi \hbar \sin(\Omega' T)} \quad (3.35)$$

จากสมการ(3.9), (3.34) และ(2.35) ส่งผลให้เราได้ตัวแผ่กระจายยังผลดังนี้

$$K_{eff}(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) = \left(\frac{m\Omega'}{2\pi i \sin(\Omega' T)} \right) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m\Omega'}{2 \sin(\Omega' T)} [\cos(\Omega' T) \right. \right. \\ \times (r_{\perp}''^2 + r_{\perp}'^2) - 2\tilde{r}_{\perp}' e^{\frac{\Omega T}{2}} r_{\perp}'] + \int_0^T \tilde{r}_{\perp LC}(t) F_{\perp}(t) dt \\ \left. \left. + \frac{1}{2m} \int_0^T \int_0^T \tilde{F}_{\perp}(t) g(t, s) F_{\perp}(s) ds dt \right\} \right] \quad (3.36)$$

3.4 ตัวแพร่กระจายแม่นยำตรง

ถึงตอนนี้เรากลับไปสู่ตัวแพร่กระจายเริ่มแรก จากสมการ(3.4) เรามี

$$K(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) = \langle K_{eff}(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) \rangle_{f_x, f_y} \quad (3.37)$$

ด้วยการแตก F_{\perp} ออกเป็นสองส่วน กล่าวคือ $F_{\perp} = f_{\perp} + eE_{\perp}$ และหลังจากนั้นจัดการหาค่าเฉลี่ยแบบเกาส์เซียน เราได้ตัวแพร่กระจายที่ต้องการคือ

$$K(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) = F(T) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left\{ S_0^d(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) + e \int_0^T \tilde{R}_{\perp LC}(t) E_{\perp}(t) dt \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{e^2}{2m} \int_0^T \int_0^T \tilde{E}_{\perp}(t) G(t, s) E_{\perp}(s) ds dt \right\} \right] \quad (3.38)$$

โดยที่

$$S_0^d(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) = \frac{m\Omega'}{2 \sin(\Omega' T)} [\cos(\Omega' T)(r_{\perp}''^2 + r_{\perp}'^2) - 2\tilde{r}_{\perp}' e^{\frac{\Omega T}{2}} r_{\perp}'] \\ + \frac{m\omega^4 \sin(\Omega' T)}{4\Omega' [\cos(\frac{\Omega T}{2}) - \cos(\Omega' T)]} \int_0^T \int_0^T \tilde{r}_{\perp LC}(t) r_{\perp LC}(s) ds dt \\ = \frac{m\Omega'}{2 \sin(\Omega' T)} [\cos(\Omega' T)(r_{\perp}''^2 + r_{\perp}'^2) - 2\tilde{r}_{\perp}' e^{\frac{\Omega T}{2}} r_{\perp}'] \\ + \frac{m\Omega'}{4 \sin(\Omega' T)} \left[\left\{ \cos\left(\frac{\Omega T}{2}\right) - \cos(\Omega' T) \right\} (r_{\perp}'' + r_{\perp}')^2 \right. \\ \left. + \frac{4}{\Omega'} \left\{ \Omega' \sin\left(\frac{\Omega T}{2}\right) - \frac{\Omega}{2} \sin(\Omega' T) \right\} \tilde{r}_{\perp}' J r_{\perp}' \right. \\ \left. + \frac{1}{\Omega'^2} \frac{\left\{ \Omega' \sin\left(\frac{\Omega T}{2}\right) - \frac{\Omega}{2} \sin(\Omega' T) \right\}}{\cos\left(\frac{\Omega T}{2}\right) - \cos(\Omega' T)} (r_{\perp}'' - r_{\perp}')^2 \right] \quad (3.39)$$

เมื่อ

$$\tilde{R}_{\perp LC}(t) = \tilde{r}_{\perp LC}(t) + \frac{\omega^4 \sin(\Omega' T)}{2\Omega' [\cos(\frac{\Omega T}{2}) - \cos(\Omega' T)]} \int_0^T \tilde{r}_{\perp LC}(\sigma) d\sigma \int_0^T g(s, t) d\sigma \\ = \frac{1}{\sin(\Omega' T)} \left(\sin(\Omega'(T-t)) \tilde{r}_{\perp}' + \sin(\Omega' t) \tilde{r}_{\perp}' e^{\frac{\Omega T}{2}} \right) e^{\frac{\Omega}{2} t}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\sin(\Omega'T)}[(\tilde{r}_\perp'' + \tilde{r}_\perp') - \frac{1}{\Omega'} \frac{\{\Omega' \sin(\frac{\Omega'T}{2}) - \frac{\Omega}{2} \sin(\Omega'T)\}}{\{\cos(\frac{\Omega'T}{2}) - \cos(\Omega'T)\}} \\
& \times (\tilde{r}_\perp'' - \tilde{r}_\perp')J][\{\sin(\Omega'(T-t)) + \sin(\Omega't)e^{-\frac{\Omega J}{2}}\}e^{\frac{\Omega}{2}x} - \sin(\Omega'T)]
\end{aligned} \tag{3.40}$$

และ

$$\begin{aligned}
G(t,s) &= g(t,s) + \frac{\omega^4 \sin(\Omega'T)}{2\Omega'[\cos(\frac{\Omega'T}{2}) - \cos(\Omega'T)]} \int_0^T \int_0^T g(t,t')(s,s') dt ds' \\
&= -\frac{1}{\Omega' \sin(\Omega'T)} [H(t-s) \sin(\Omega's) \sin(\Omega'(T-t)) \\
&+ H(s-t) \sin(\Omega't) \sin(\Omega'(T-s))] e^{\frac{\Omega}{2}(s-t)} \\
&+ \frac{1}{2\Omega' \sin(\Omega'T) [\cos(\frac{\Omega'T}{2}) - \cos(\Omega'T)]} [e^{\frac{\Omega}{2}x} \sin(\Omega'(T-t)) \\
&+ \sin(\Omega't) e^{\frac{\Omega}{2}J} - \sin(\Omega'T)] [e^{\frac{\Omega}{2}Js} \{\sin(\Omega'(T-s)) \\
&+ \sin(\Omega's) e^{\frac{\Omega}{2}J}\} - \sin(\Omega't)]
\end{aligned} \tag{3.41}$$

พร้อมด้วย

$$F(T) = \frac{mT\omega^2}{4i\pi\hbar[\cos(\frac{\Omega'T}{2}) - \cos(\Omega'T)]} \tag{3.42}$$

3.5 การพิสูจน์ความถูกต้องของตัวแปรกระจายแม่นยำ

ในการพิสูจน์เพื่อแสดงว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความถูกต้องและเชื่อถือได้ กระทำได้ด้วยการให้แรงหรือสนามต่างๆที่ปรากฏอยู่ในระบบมีลิมิตเข้าสู่ศูนย์ที่ละสนามหรือหลายสนามพร้อมๆกัน หลังจากนั้นพิจารณาว่าตัวแปรกระจายภายใต้ลิมิตดังกล่าวลดรูปไปสู่แต่แปรกระจายมาตรฐานหรือไม่ (ซึ่งปรากฏอยู่ในตำราหรืองานวิจัยก่อนหน้า)

3.5.1 ต่อกรณีทีสนามไฟฟ้าเข้าสู่ศูนย์

พิจารณาในกรณีพิเศษเมื่อสนามไฟฟ้า $\vec{E}(t)$ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เราจะได้ว่าสมการ(3.38)จะลดรูปไปสู่

$$\begin{aligned}
K(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) &= \frac{mT\omega^2}{4\hbar\pi[\cos(\frac{\Omega'T}{2}) - \cos(\Omega'T)]} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m\Omega'}{2\sin(\Omega'T)} \right. \right. \\
&\times [\cos(\Omega'T)(r_\perp''^2 + r_\perp'^2) - 2\tilde{r}_\perp'' e^{-\frac{\Omega}{2}J} r_\perp']
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m\Omega'}{4\sin(\Omega'T)} \left[\left(\cos\left(\frac{\Omega T}{2}\right) - \cos(\Omega'T) \right) (r'_\perp + r''_\perp)^2 \right. \\
& + \frac{4}{\Omega'} \left(\Omega' \sin\left(\frac{\Omega T}{2}\right) - \frac{\Omega}{2} \sin(\Omega'T) \right) \tilde{r}'_\perp J r''_\perp \\
& \left. + \frac{1}{\Omega'^2} \frac{\left(\Omega' \sin\left(\frac{\Omega T}{2}\right) - \frac{\Omega}{2} \sin(\Omega'T) \right)^2 (r'_\perp - r''_\perp)^2}{\cos\left(\frac{\Omega T}{2}\right) - \cos(\Omega'T)} \right] \Bigg\} \quad (3.43)
\end{aligned}$$

โดยอาศัยเอกลักษณ์ $e^{\pm J\varphi} = I \cos \varphi \pm J \sin \varphi$, $r'_\perp = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \end{pmatrix}$ และ $r''_\perp = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \end{pmatrix}$ สมการ

(3.43) สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบปกติทั่วไป (ไม่ต้องอาศัยเมทริกซ์) ดังนี้

$$\begin{aligned}
K(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) &= \frac{mT\omega^2}{4\pi\hbar \left[\cos\left(\frac{\Omega T}{2}\right) - \cos(\Omega'T) \right]} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m\Omega'}{2\sin(\Omega'T)} \right. \right. \\
& \times \left[(x_b^2 + y_b^2 + x_a^2 + y_a^2) \cos(\Omega'T) + 2 \sin\left(\frac{\Omega T}{2}\right) (x_a y_b - x_b y_a) \right. \\
& \quad \left. \left. - \cos\left(\frac{\Omega T}{2}\right) (x_a x_b + y_a y_b) \right] \right. \\
& + \frac{m\Omega'}{4\sin(\Omega'T)} \left[\left(\cos\left(\frac{\Omega T}{2}\right) - \cos(\Omega'T) \right) ((x_a + x_b)^2 + (y_b + y_a)^2) \right. \\
& \quad \left. + \frac{4}{\Omega'} \left(\Omega' \sin\left(\frac{\Omega T}{2}\right) - \frac{\Omega}{2} \sin(\Omega'T) \right) (x_b y_a - x_a y_b) \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\Omega'^2} \frac{\left\{ \Omega' \sin\left(\frac{\Omega T}{2}\right) - \frac{\Omega}{2} \sin(\Omega'T) \right\}^2}{\cos\left(\frac{\Omega T}{2}\right) - \cos(\Omega'T)} ((x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2) \right] \right\} \Bigg] \quad (3.44)
\end{aligned}$$

นี่คือตัวแพร่กระจายแม่นยำตรงของอิล็กตรอนที่เคลื่อนที่ในระนาบภายใต้อิทธิพลของสนามแม่เหล็ก และ nonlocal harmonic oscillator potential อย่างไรก็ตามตัวแพร่กระจายที่ได้ยังไม่อาจตรวจสอบกับตัวแพร่กระจายมาตรฐาน (ยังไม่ปรากฏในตำราหรืองานวิจัยทั่วไป) ทั้งนี้เนื่องจากเป็นงานบุกเบิกเริ่มแรก (original) ดังนั้นจำเป็นต้องพิจารณาในกรณีต่อไปเมื่อ ω และ Ω เข้าสู่ศูนย์ตามลำดับ

3.5.2 เมื่อ ω เข้าสู่ศูนย์

ระบบที่เราสนใจสมนัยกับกรณีที่ $\omega \rightarrow 0$ และ $\Omega' \rightarrow \frac{\Omega}{2}$ เริ่มต้นเราพิจารณา pre-exponential factor เป็นอันดับแรก กล่าวคือ

$$F(T) = \frac{mT\omega^2}{4\pi\hbar \left[\cos\left(\frac{\Omega T}{2}\right) - \cos(\Omega'T) \right]} \quad (3.45)$$

ถ้าหากเราให้ลิมิต $\omega \rightarrow 0$ หรือ $\Omega' \rightarrow \frac{\Omega}{2}$ แล้วเราจะได้

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} F(T) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{mT\omega^2}{4\pi\hbar[\cos(\frac{\Omega T}{2}) - \cos(\Omega' T)]} \\ &= \lim_{\Omega' \rightarrow \frac{\Omega}{2}} \frac{mT(\Omega' - \frac{\Omega}{2})(\Omega' + \frac{\Omega}{2})}{8\pi\hbar \sin(\frac{1}{2}(\Omega' - \frac{\Omega}{2})T) \sin(\frac{1}{2}(\Omega' + \frac{\Omega}{2})T)} \\ &= \left(\frac{m}{2\pi\hbar T} \right) \left(\frac{\Omega T}{2 \sin(\Omega T / 2)} \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

(เตือนความทรงจำว่า $\omega^2 = \Omega'^2 - \Omega^2 / 4 = (\Omega' - \Omega/2)(\Omega' + \Omega/2)$) ใครก็ตามสามารถพิสูจน์ได้อย่างง่ายดายได้ว่าในขณะที่ $\omega \rightarrow 0$ หรือ $\Omega' \rightarrow \Omega/2$ พจน์ที่เป็นฟังก์ชันกำลังของสมการ(3.44)จะลดรูปไปส

$$\begin{aligned} &\exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{m\Omega}{4 \sin(\Omega T / 2)} \left(\cos(\frac{\Omega T}{2})(x_b^2 + x_a^2 + y_b^2 + y_a^2) + 2\{\sin(\frac{\Omega T}{2})(x_a y_b - x_b y_a) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos(\frac{\Omega T}{2})(x_b x_a + y_b y_a) \right) \right] \\ &= \exp\left[\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \left(\frac{\Omega}{2} \cot(\frac{\Omega T}{2}) \right) [(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2 + \Omega(x_a y_b - x_b y_a)]\right] \end{aligned} \quad (3.47)$$

จากสมการ(3.45), (3.46)และ(3.47)เมื่อ $\omega \rightarrow 0$ เราจะได้

$$\begin{aligned} K(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) &= \left(\frac{m}{2\pi\hbar T} \right) \left(\frac{\Omega T}{2 \sin(\Omega T / 2)} \right) \exp\left[\frac{mi}{2\hbar} \left\{ \frac{\Omega}{2} \cot(\frac{\Omega T}{2}) [(x_b - x_a)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (y_b - y_a)^2 + \Omega(x_a y_b - x_b y_a)] \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.48)$$

นี่คือตัวแพร่กระจายของอนุภาคไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ในระนาบท่ามกลางสนามแม่เหล็กที่ตั้งฉากกับระนาบดังกล่าว(15)

3.5.3 เมื่อสนามแม่เหล็กเข้าสู่ศูนย์

ต่อกรณีดังกล่าวคล่องจอกกับกรณีที่ $\Omega \rightarrow 0$ และ $\Omega' \rightarrow 0$ เริ่มต้นเราพิจารณา pre-exponential factor ของสมการ(3.44)เป็นอันดับแรก ในกรณีนี้เราได้

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\Omega \rightarrow 0 \\ \Omega' \rightarrow 0}} F(T) &= \lim_{\substack{\Omega \rightarrow 0 \\ \Omega' \rightarrow 0}} \frac{mT\omega^2}{8\pi\hbar[\sin(\Omega' - \Omega/2)T/2][\sin(\Omega' + \Omega/2)T/2]} \\ &= \left(\frac{m}{2\pi\hbar T} \right) \left(\frac{\omega T}{2 \sin(\omega T / 2)} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

และพจน์ที่เป็นฟังก์ชันเลขชี้กำลังของสมการ(3.44) เมื่อ $\Omega \rightarrow 0$ กลับกลายเป็น

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{m\omega}{2 \sin(\omega T)} [(x_b^2 + x_a^2 + y_b^2 + y_a^2) \cos(\omega T) - 2(x_b x_a + y_b y_a)] \right\} \right]$$

$$+ \frac{m\omega}{4 \sin(\omega T)} [(1 - \cos(\omega T))((x_b + x_a)^2 + (y_b + y_a)^2)] \Bigg] \\ = \exp \left[\frac{im\omega}{4\hbar} \cot\left(\frac{\omega T}{2}\right) \{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2\} \right] \quad (3.50)$$

จากสมการ(3.49)และ(3.50) เราจะได้ว่า

$$K(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar T} \right) \left(\frac{\omega T}{2 \sin(\omega T/2)} \right)^2 \exp \left[\frac{im\omega}{4\hbar} \cot\left(\frac{\omega T}{2}\right) \{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2\} \right] \quad (3.51)$$

นี่คือตัวแพร่กระจายของอนุภาคที่ถูกจำกัดขอบเขตอยู่ในสองมิติภายใต้อิทธิพลของ nonlocal harmonic oscillator potential(19)

3.6 ความหนาแน่นสถานะ

ถ้าหากเรามีฟังก์ชัน $N(E)$ ซึ่งเป็นจำนวนสถานะทั้งหมดที่มีพลังงานน้อยกว่าหรือเท่ากับ E ของระบบอิเล็กตรอนระบบหนึ่ง เราจะนิยามความหนาแน่นสถานะ $\rho(E)$ ของอิเล็กตรอนดังกล่าวได้ดังนี้

$$\rho(E) = \frac{dN(E)}{dE} \quad (3.52)$$

หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง

$$\rho(E) = (1/V) \sum_{n=1}^{\infty} \delta(E - E_n) \quad (3.53)$$

โดยที่ E_n คือพลังงานของสถานะไอเกน ส่วน V คือปริมาตรของระบบ ถ้าหากระบบดังกล่าวเป็นระบบที่ไร้ระเบียบ เราจำเป็นต้องหาค่าเฉลี่ยปริมาณที่ปรากฏอยู่ในสมการ(3.53)ทั่วปริมาตรที่ไร้ระเบียบดังกล่าว จะเป็นการสะดวกยิ่งกว่าที่จะพิจารณาความหนาแน่นสถานะในรูปแบบสมการ(3.53) และในการนำระเบียบวิธีอินทิกรัลตามเส้นทางมาประยุกต์ใช้กับสมการ(3.53)เราจำเป็นต้องแปลงทางด้านขวาของสมการ(3.53)ให้อยู่ในรูปแบบอินทิกรัล(20) ได้ผล

$$\rho(E) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[(i/\hbar)ET]} \text{Tr} K(\vec{r}'', \vec{r}'; T) dT \quad (3.54)$$

โดยที่ตัวดำเนินการ Tr หมายถึง Trace ของ K ฟังก์ชัน K คือตัวแพร่กระจายที่บรรยายการแผ่ของอนุภาคจากตำแหน่ง \vec{r}' ไปยัง \vec{r}'' เมื่อ \vec{r}' และ \vec{r}'' เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งในสามมิติ ถ้าหากตัวแพร่กระจายไม่แปรผันภายใต้การเลื่อนตำแหน่ง(translational invariant) นั้นหมายความว่า

$$K(\vec{r}'', \vec{r}'; T) = K(\vec{r}'' - \vec{r}'; T) \quad (3.55)$$

หากเป็นเช่นนั้น สำหรับการคำนวณหาความหนาแน่นสถานะ จุดเริ่มต้น \vec{r}' และจุดปลาย \vec{r}'' จะต้องเป็นตำแหน่งเดียวกัน ส่งผลให้

$$\rho(E) = \frac{V}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{[(i/\hbar)ET]} \text{Tr} K(0;0;T) dT \quad (3.56)$$

ถึงตอนนี้เราสามารถนำสมการ(3.56)ไปประยุกต์ใช้กับความหนาแน่นของอิเล็กตรอนที่ปราศจากสนามไฟฟ้า เราได้

$$\rho(E) = \frac{\alpha\beta mA}{2\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \delta'[E - (s + 1/2)\hbar\alpha - (n + 1/2)\hbar\beta] \quad (3.57)$$

โดยที่ δ' หมายถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันเดลตาดิแรกเทียบกับอาร์กิวเมนต์ของมัน A เป็นพื้นที่ของชั้นงาน $\alpha = \Omega' + \Omega/2$ และ $\beta = \Omega' - \Omega/2$ หลังจากอาศัยความสัมพันธ์

$$\left. \begin{aligned} \delta'(x) &= -\frac{\delta(x)}{x} \\ \delta(-x) &= \delta(x) \end{aligned} \right\} \quad (3.58)$$

เราได้

$$\rho(E) = \frac{\alpha\beta mA}{2\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta[E - (s + 1/2)\hbar\alpha - (n + 1/2)\hbar\beta]}{[E - (s + 1/2)\hbar\alpha - (n + 1/2)\hbar\beta]} \quad (3.59)$$

ถึงตอนนี้เราพิจารณาขีดจำกัดในสามกรณี

(ก) เมื่อ nonlocal harmonic oscillator potential เข้าสู่ศูนย์ ในกรณีนี้สมนัยกับ $\omega \rightarrow 0$, $\Omega' \rightarrow \Omega/2$, $\alpha \rightarrow \Omega$ และ $\beta \rightarrow 0$ สมการ(3.59)ลดรูปไปสู่

$$\rho(E) = \frac{\Omega mA}{2\pi\hbar} \sum_{s=0}^{\infty} \delta[E - (s + 1/2)\hbar\Omega] \quad (3.60)$$

นี่คือความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนถูกจำกัดเขตให้อยู่ในระนาบภายใต้สนามแม่เหล็กสม่ำเสมอที่ตั้งฉากกับระนาบดังกล่าว

(ข) เมื่อสนามแม่เหล็กเข้าสู่ศูนย์ ต่อกรณีดังกล่าวคือของจังก์ชันที่ $\Omega \rightarrow 0$, $\Omega' \rightarrow \omega$ และ $\alpha = \beta \rightarrow \omega$ จากสมการ(3.59)เราได้

$$\rho(E) = \frac{mA\omega^2}{2\pi} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta[E - (s + n + 1)\hbar\omega]}{[E - (s + n + 1)\hbar\omega]} \quad (3.61)$$

นี่คือความหนาแน่นสถานะของอนุภาคสองมิติภายใต้ nonlocal harmonic oscillator potential

(ค) เมื่อศักย์ทุกชนิดเข้าสู่ศูนย์ กล่าวคือ $\omega = \Omega = \alpha = \beta \rightarrow 0$ ใครก็ตามสามารถพิสูจน์ได้ว่า นิพจน์ของความหนาแน่น(3.59)จะลดรูปไปสู่ความหนาแน่นสถานะคงตัวของอนุภาคอิสระสองมิติที่ทราบกันดี นั่นคือ

$$\rho(E) = \frac{mA}{2\pi\hbar^2} \quad (3.62)$$

จากการประยุกต์ใช้ตัวแปรกระจายต่อกรณีปราศจากสนามไฟฟ้า มันแสดงให้เห็นว่าเมื่อความถี่เชิงมุมของ nonlocal oscillator เข้าสู่ศูนย์ สมการ(3.59)ลดรูปไปสู่ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนอิสระซึ่งถูกจำกัดขอบเขตในระนาบภายใต้อิทธิพลของสนามแม่เหล็กที่ตั้งฉากกับระนาบของอิเล็กตรอน เป็นที่ทราบกันดีว่าความหนาแน่นสถานะ ในสมการ(3.60)นำไปสู่ความหนาแน่นสถานะในเชิงการทดลองของแก๊สอิเล็กตรอนสองมิติที่ดำรงอยู่บนผิวของสารกึ่งตัวนำอาทิ บนแผ่นชั้นของ MOSFETS ซึ่งระบบดังกล่าวถูกนำไปใช้ในการศึกษาหรือสังเกตปรากฏ

การค้นควาอนตัมฮออต นิพจน์ความหนาแน่นสถานะในสมการ(3.59) ซึ่งรวม nonlocal harmonic oscillator potial เข้าไปด้วยดูเหมือนปรากฏผลบวกของฟังก์ชันเดลตาดีแรกจำนวนมหาศาลด้วยแอมพลิจูดต่างๆกัน ในสภาพการณ์ที่แสดงทำให้ดูเหมือนเป็นแบบจำลองที่ค่อนข้างอุดมคติ โดยที่มันมิได้แสดงให้เห็นถึงการแผ่ของระดับแลนดาวอันเป็นคุณลักษณะที่สำคัญของความหนาแน่นสถานะที่ได้จากการทดลองด้วยสาเหตุมาจากความไร้ระเบียบ เพื่อให้ได้มาซึ่งความหนาแน่นสถานะที่เหมาะสมและสอดคล้องกับการทดลองกล่าวคือมีการแผ่กว้างของระดับแลนดาวเราจำเป็นต้องเข้าสู่การประมาณอันดับหนึ่ง รายละเอียดกระบวนการคำนวณการประมาณอันดับหนึ่งเราจะแสดงในบทถัดไป

บทที่ 4

ตัวแผ่กระจายของก๊าซอิเล็กตรอนสองมิติ โดยวิธีอินทิเกรตตามเส้นทาง

4.1 บทนำ

ในบทนี้เราจะแสดงการคำนวณตัวแผ่กระจายของอิเล็กตรอนในระบบสองมิติท่ามกลางสนามแม่เหล็กและศักย์ที่ไร้ระเบียบโดยอาศัยระเบียบวิธีอินทิเกรตตามเส้นทางของฟายน์แมน ตามแบบจำลองของเรานั้นเราจะพิจารณาอิเล็กตรอนที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของตัวกระเจิง(scatterers)ที่มีความหนาแน่นสูงแต่ทว่าเป็นตัวกระเจิงแบบอ่อน(weak scatterers)และวางตัวอย่างไร้ระเบียบ ในสภาพการณ์เช่นนี้ศักย์กระเจิง(scattering potential)สามารถแทนที่ได้ด้วยศักย์ไร้ระเบียบแบบเกาส์เซียน(gaussian random potential)ที่มีความยาวสหสัมพันธ์จำกัดเป็น L และเราจะจัดการให้ L เป็นตัวแปรเสริมตัวหนึ่ง การเปรียบเทียบผลการคำนวณในเชิงตัวเลขกับผลที่ได้จากการทดลองของคูกุซชินและทิโมเฟเยฟจะแสดงในหัวข้อสุดท้ายของบทที่ 5

4.2 ความหนาแน่นสถานะ

จะเป็นการสะดวกที่จะพิจารณาความหนาแน่นสถานะซึ่งมีนิยามอยู่ในรูป

$$\rho(E) = (1/V) \left\langle \sum_{i=1}^N \delta(E - E_i) \right\rangle \quad (4.1)$$

เมื่อ E_i คือพลังงานของสถานะไอแกนที่ i ของแฮมิลโทเนียน V คือปริมาตรของขอบเขตที่ตัวกระเจิงจำนวน N ตัวดำรงอยู่ และวงเล็บเชิงมุม $\langle \dots \rangle$ บ่งชี้ว่าเป็นการเฉลี่ยตลอดทั่วของประชากรตัวกระเจิง ทำนองเดียวกับกรณีของสมการ(3.53) ใครก็ตามสามารถพิสูจน์ได้ว่าสมการ(4.1)สามารถเขียนใหม่ได้ในรูป

$$\rho(E) = (V / 2\pi\hbar) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}(0,0;T) e^{(i/\hbar)ET} dT \quad (4.2)$$

เมื่อ \bar{K} คือตัวแผ่กระจายเฉลี่ยของอิเล็กตรอน

4.3 อินทิกรัลตามเส้นทางของแบบจำลองระบบสองมิติที่ไร้ระเบียบ

ในการคำนวณตัวแผ่กระจายเฉลี่ย ที่กล่าวถึงข้างต้น เริ่มต้นด้วยการพิจารณาแบบจำลองอย่างง่ายที่สามารถเขียนอยู่ในรูปที่คล้ายคลึงกับอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมนได้อย่างง่ายดาย แบบจำลองดังกล่าวประกอบด้วยอิเล็กตรอนตัวหนึ่งท่ามกลางตัวกระเจิงที่มีความหนาแน่นสูงมากวางตัวอย่างไร้ระเบียบ ทว่ามีอันตรกิริยากับอิเล็กตรอนอย่างอ่อน ถ้าหาก σ คือความหนา-

แน่นของมัน $V(\vec{F})$ คือศักย์กระเจิง ตามแบบจำลองดังกล่าวเราจะได้ว่าสอดคล้องต่อกรณี $\sigma \rightarrow \infty, V(\vec{F}) \rightarrow 0$ และ $\sigma V^2(\vec{F})$ มีค่าจำกัด จุดเริ่มต้นของการคำนวณเราเริ่มต้นด้วยการพิจารณาตัวแผ่กระจาย $K(\vec{F}'', \vec{F}'; T, \{\vec{R}_i\})$ สำหรับอิเล็กตรอนตัวหนึ่งท่ามกลางตัวกระเจิงที่ตรงอยู่ตรงตำแหน่ง $\{\vec{R}_i | i = 1, 2, \dots\}$ เป็นที่ชัดเจนว่าตัวแผ่กระจายดังกล่าวข่มขึ้นอยู่กับตำแหน่งของตัวกระเจิง แต่ด้วยสาเหตุที่ตัวกระเจิงวางตัวแบบสุ่ม ส่งผลให้คุณสมบัติของระบบอวกาศความหนาแน่นสถานะสามารถหาได้จากค่าเฉลี่ยของตัวแผ่กระจาย นั่นหมายถึงเฉลี่ยทั่วตำแหน่งของตัวกระเจิงที่กระจายตัวแบบสุ่ม

สำหรับแบบจำลองของตัวกระเจิงสองมิติจำนวน N ตัว ท่ามกลางสนามแม่เหล็กที่ตั้งฉากกับระบบ แฮมิลโทเนียนของอิเล็กตรอนเขียนได้เป็น

$$H(\{\vec{R}_i\}) = H_0 + \sum_{i=1}^N V(\vec{F} - \vec{R}_i) \quad (4.3)$$

โดยที่

$$H_0 = \frac{m^*}{2} [\vec{p} + (e/c)\vec{A}]^2 \quad (4.4)$$

เมื่อ \vec{A} คือศักย์เวกเตอร์ (vector potential) ซึ่งมีคุณสมบัติ $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ ส่วน m^* เป็นมวลยังผลของอิเล็กตรอนและ $V(\vec{F} - \vec{R}_i)$ คือศักย์กระเจิง ณ ตำแหน่ง \vec{F} โดยตำแหน่งของตัวกระเจิง \vec{R}_i กระจายแบบสุ่ม ส่งผลให้โอกาสความน่าจะเป็นที่ตัวกระเจิงจะดำรงอยู่ตรงตำแหน่ง \vec{R}_i มีค่าเป็น

$$P(\{\vec{R}_i\}) = \frac{1}{A^N} \quad (4.5)$$

โดยที่ A คือพื้นที่ของระบบ ตัวแผ่กระจายของอิเล็กตรอนในระบบดังกล่าวสอดคล้องสมการ

$$\left[\hbar \frac{\partial}{\partial T} - H(\{\vec{R}_i\}) \right] K(\vec{F}'', \vec{F}'; T, \{\vec{R}_i\}) = \hbar \delta(\vec{F}'' - \vec{F}') \delta(T) \quad (4.6)$$

ในรูปแบบของอินทิกรัลตามเส้นทาง ตัวแผ่กระจายข้างต้นเขียนได้ดังนี้

$$K(\vec{F}'', \vec{F}'; T, \{\vec{R}_i\}) = \int D[\vec{F}(t)] \exp\left\{ (i/\hbar) \int_0^T dt \left\{ (m/2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Omega(xy - yx)) - \sum_i V(\vec{F} - \vec{R}_i) \right\} \right\} \quad (4.7)$$

และด้วยเหตุนี้ได้ค่าเฉลี่ยของตัวแผ่กระจายเขียนอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} K(\vec{F}'', \vec{F}'; T) &= \langle K(\vec{F}'', \vec{F}'; T, \{\vec{R}_i\}) \rangle \\ &= (1/A)^N \int \dots \int \prod_{i=1}^N d\vec{R}_i K(\vec{F}'', \vec{F}'; T, \{\vec{R}_i\}) \quad (4.9) \end{aligned}$$

เนื่องจากสมการ(4.8)บ่งชี้ว่าตัวแผ่กระจายเฉลี่ยนี้คือฟังก์ชันของกรีนตามปกติ (usual Green's function) ดังนั้นตัวแผ่กระจายเฉลี่ยดังกล่าวจึงสามารถใช้บรรยายการแผ่กระจายของอนุภาคได้แม้ว่าจะไม่สอดคล้องกับโครงสร้างเฉพาะเชิงกายภาพของอิเล็กตรอน ฟังก์ชัน \bar{K} สามารถพิจารณาได้ราวกับว่าเป็นตัวแผ่กระจายที่บรรยายการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนเทียมในระบบเฉลี่ย

อย่างไรก็ตาม Edwards และ Gulyaew (21) ซึ่งให้เห็นว่าตัวแพร่กระจายเฉลี่ย(4.8)สามารถหาได้อย่างชัดเจนด้วยสาเหตุที่จุดของ $\{\bar{R}_i\}$ นั้นกระจายตัวแบบสุ่ม เนื่องจากศักย์กระเจิง $V(\bar{r} - \bar{R}_i)$ ต่างก็เป็นอิสระต่อกัน ส่งผลให้ตัวแพร่กระจายเฉลี่ยกลับกลายเป็น

$$\begin{aligned} \bar{K}(\bar{r}''; \bar{r}'; T) = & \int D[\bar{r}(t)] \exp\left[(im/2\hbar) \int_0^T (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Omega(xy - yx)) dt \right. \\ & \left. + \sigma \int d\bar{R} \{ \exp[(-i/\hbar) \int_0^T dt v(\bar{r}(t) - \bar{R}) - 1] \} \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

โดยความหนาแน่น $\sigma = N/A$ ภายใต้ลิมิต $\sigma \rightarrow \infty, V \rightarrow 0$ และ σV^2 มีค่าจำกัด เราสามารถกระจายฟังก์ชันที่ค่าตั้งของ v และเก็บเฉพาะพจน์เชิงเส้นและพจน์กำลังสองไว้ก็เป็นการเพียงพอ ปริมาณศักย์เฉลี่ย

$$E_0 = \sigma \int d\bar{R} v(\bar{r}(t) - \bar{R}) \quad (4.10)$$

กลับกลายเป็นค่าไม่จำกัดภายใต้ลิมิตข้างต้น อย่างไรก็ตามเรามีอิสระที่จะเลือกพลังงานเริ่มต้นอยู่ตรงระดับ E_0 เพื่อกำจัดค่าอนันต์ดังกล่าว ถึงตอนนี้เราพิจารณาพจน์กำลังสอง

$$\begin{aligned} (-\sigma/2\hbar^2) \int d\bar{R} \int_0^T \int_0^T dt d\zeta v(\bar{r}(t) - \bar{R})(\bar{r}(\zeta) - \bar{R}) \\ = (-\sigma/2\hbar^2) \int_0^T \int_0^T dt d\zeta W(\bar{r}(t) - \bar{r}(\zeta)) \end{aligned} \quad (4.11)$$

เมื่อฟังก์ชันสหสัมพันธ์(correlation function)

$$W(\bar{r}(t) - \bar{r}(\zeta)) = \int d\bar{R} v(\bar{r}(t) - \bar{R}) v(\bar{r}(\zeta) - \bar{R}) \quad (4.12)$$

จากสมการ(4.9),(4.12) และหลังจากจัดการให้ $E_0 = 0$ เราได้

$$\begin{aligned} \bar{K}(\bar{r}''; \bar{r}'; T) = & \int D[\bar{r}(t)] \exp\left[(im/2\hbar) \int_0^T (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Omega(xy - yx)) dt \right. \\ & \left. - (\sigma/2\hbar^2) \int_0^T \int_0^T dt ds W(\bar{r}(t) - \bar{r}(s)) \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

ฟังก์ชันสหสัมพันธ์(4.12) นั้นขึ้นอยู่กับศักย์กระเจิงอย่างชัดเจน และสมการ(4.13)สามารถเขียนอยู่ในรูปของแอคชัน S ดังนี้

$$\bar{K}(\bar{r}''; \bar{r}'; T) = \int D[\bar{r}(t)] e^{(i/\hbar) S[\bar{r}(t)]} \quad (4.14)$$

โดยที่

$$S[r(t)] = (m/2) \int_0^T (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Omega(xy - yx)) dt + (i\sigma/2\hbar) \int_0^T \int_0^T W(\bar{r}(t) - \bar{r}(s)) dt ds \quad (4.15)$$

4.4 แบบจำลองเกาส์เซียนแบบสุ่ม(the gaussian random model)

เพื่อที่จะให้ได้มาซึ่งฟังก์ชันสหสัมพันธ์(4.12)หรือที่ปรากฏในสมการ(4.15) เราจำเป็นต้องสมมติศักย์กระเจิงอันเนื่องมาจากอนุภาคของสารเจือปน(impurities) โดยสมมติว่าอยู่ในรูปแบบเกาส์เซียน กล่าวคือ

$$v(\bar{r} - \bar{R}) = (u/\pi l^2) \exp\left[-|\bar{r} - \bar{R}|^2/l^2\right] \quad (4.16)$$

เมื่อ u คือความแรง(strength)ของศักย์กระเจิง เราจะพบว่าสำหรับศักย์แบบเกาส์เซียน(gaussian potential) ทำให้ฟังก์ชันสหสัมพันธ์กลับกลายเป็น

$$W(r(t) - r(s)) = (u^2 / \pi L^2) \exp[-|\bar{r}(t) - \bar{r}(s)|^2 / L^2] \quad (4.17)$$

โดยที่ L หมายถึงความยาวสหสัมพันธ์ของระบบสุ่มดังกล่าว และมีความสัมพันธ์กับ l ผ่านสมการ

$$L^2 = 2l^2 \quad (4.18)$$

4.5 การประมาณคิวมุลแลนต์ที่หนึ่ง(first cumulant approximation)

ในการคำนวณความหนาแน่นสถานะ(4.2)นั้น ตัวแปรกระจาย(4.14)จะต้องทราบแน่ชัด อย่างไรก็ตามตัวแปรกระจาย(4.14)ที่คล่องจองกับแอกชัน(4.15)นั้นปรากฏว่ามีฟังก์ชันสหสัมพันธ์ตามสมการ(4.17)เป็นองค์ประกอบที่สำคัญ ส่งผลให้เกิดความยุ่งยากในทางการคำนวณเป็นอย่างยิ่ง ทำให้เราไม่สามารถคำนวณตัวแปรกระจายออกมาได้อย่างแม่นยำตรง ด้วยเหตุผลดังกล่าวเราจึงต้องคำนวณโดยวิธีการประมาณ ในการประมาณตัวแปรกระจายดังกล่าวเราเริ่มต้นด้วยการสร้างหรือตั้งต้นด้วยแบบจำลองอันดับศูนย์(zero order model) ขั้นตอนมีดังนี้ พิจารณาแอกชัน(4.15) เมื่อแทนฟังก์ชันสหสัมพันธ์เข้าไปเราได้

$$S[r(t)] = (m/2) \int_0^T (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Omega(xy - yx)) dt + (i\sigma/2\hbar) \int_0^T \int_0^T (u^2 / \pi L^2) \exp[-|\bar{r}(t) - \bar{r}(s)| / L^2] dt ds \quad (4.19)$$

โดยการกระจายฟังก์ชันชี้กำลังที่ปรากฏอยู่ในพจน์ที่สองของสมการ(4.19)และเก็บพจน์ที่กระจายดังกล่าวไว้เพียงสองพจน์แรก กล่าวคือ เรามี

$$e^{-|\bar{r}(t) - \bar{r}(s)| / L^2} = 1 - \frac{|\bar{r}(t) - \bar{r}(s)|^2}{L^2} + \dots \quad (4.20)$$

ส่งผลให้สมการ(4.19)กลับกลายเป็น

$$S_0[r(t)] = \frac{m}{2} \int_0^T (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Omega(xy - yx)) dt - \frac{i\sigma u^2}{2\pi\hbar L^4} \int_0^T \int_0^T |\bar{r}(t) - \bar{r}(s)|^2 dt ds + \frac{i\sigma u^2}{2\pi\hbar L^2} T^2 \quad (4.21)$$

สมการ(4.21)คือแอกชันอันดับศูนย์ของระบบและเราจะใช้มันเป็นฐานในการประมาณอันดับ

หนึ่ง(first cumulant approximation)ในโอกาสต่อไป ด้วยการให้ $\omega^2 = \frac{4T}{m} \left(\frac{i\sigma u^2}{2\pi\hbar L^4} \right)$ ส่งผล

ให้(4.21)กลับกลายเป็น

$$S_0[\bar{r}(t)] = \frac{m}{2} \int_0^T (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Omega(xy - yx)) dt - \frac{1}{2T} \frac{m\omega^2}{2} \int_0^T \int_0^T |\bar{r}(t) - \bar{r}(s)|^2 dt ds + \frac{i\sigma u^2}{2\pi\hbar L^2} T^2 \quad (4.22)$$

นี่คือแอกชันของอนุภาคอิเล็กตรอนที่อยู่ภายใต้สนามแม่เหล็ก แรงรบกวนภายนอกและnonlocal harmonic oscillator potentialนั่นเอง ตัวแพร่กระจายที่สมนัยกับแอกชันอันดับศูนย์สามารถคำนวณได้อย่างแม่นยำ(ดูบทที่ 3 ประกอบ) ได้ผล

$$K_0(\vec{r}_b, \vec{r}_a; \omega, T) = \int_0^1 D[\vec{r}(t)] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^T \left(\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m\Omega}{2} (xy - yx) \right) dt - \frac{im}{2T} \frac{\omega^2}{2\hbar} \int_0^T \int_0^T |\vec{r}(t) - \vec{r}(s)|^2 dt ds - \frac{\sigma U^2 T^2}{2\hbar^2 \pi L^2} \right] \quad (4.23)$$

หลังจากกระบวนการอินทิกรัลตามเส้นทางแล้วเสร็จ เราได้

$$K_0(\vec{r}_b, \vec{r}_a; \omega, T) = e^{-\frac{\sigma U^2 T^2}{2\hbar^2 \pi L^2}} \left(\frac{mT\omega^2}{4\pi\hbar[\cos(\Omega T/2) - \cos(\Omega' T)]} \right) e^{\frac{i}{\hbar} S_0^d} \\ = e^{-\frac{\sigma U^2 T^2}{2\hbar^2 \pi L^2}} K_0^0(\vec{r}_b, \vec{r}_a; \omega, T) \quad (4.24)$$

โดยที่ $\Omega' = ((\Omega/2)^2 + \omega^2)$ และ K_0^0 คือตัวแพร่กระจายของ nonlocal harmonic oscillator ที่ปราศจากแรงภายนอกรบกวนซึ่งคล้องจองกับแอกชัน

$$S_0^0[\vec{r}(t)] = \frac{m}{2} \int_0^T (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Omega(xy - yx)) dt - \frac{1}{2T} \frac{m\omega^2}{2} \int_0^T \int_0^T |\vec{r}(t) - \vec{r}(s)|^2 dt ds \quad (4.25)$$

จนถึงขณะนี้เรามีแอกชันแตกต่างกันสามค่า ประกอบด้วย

$$S_0^0[\vec{r}(t)] = \frac{m}{2} \int_0^T (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Omega(xy - yx)) dt - \frac{1}{2T} \frac{m\omega^2}{2} \int_0^T \int_0^T |\vec{r}(t) - \vec{r}(s)|^2 dt ds,$$

$$S_0[\vec{r}(t)] = \frac{m}{2} \int_0^T (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Omega(xy - yx)) dt - \frac{1}{2T} \frac{m\omega^2}{2} \int_0^T \int_0^T |\vec{r}(t) - \vec{r}(s)|^2 dt ds + \frac{i\sigma U^2}{2\pi\hbar L^2} T^2$$

$$S[\vec{r}(t)] = \frac{m}{2} \int_0^T (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \Omega(xy - yx)) dt + (i\sigma/2\hbar) \int_0^T \int_0^T W(\vec{r}(t) - \vec{r}(s)) dt ds$$

ซึ่งสมนัยกับ K_0^0, K_0 และ K ตามลำดับ บัดนี้เราจะเขียนตัวแพร่กระจาย $K(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T)$ ในรูปของ $K_0(\vec{r}_b, \vec{r}_a; \omega, T)$ โดยที่

$$K(\vec{r}_b, \vec{r}_a; T) = K_0(\vec{r}_b, \vec{r}_a; \omega, T) \left\langle e^{\frac{i}{\hbar}(S - S_0)} \right\rangle_{S_0} \quad (4.26)$$

ในส่วนของถูกเฉลี่ยถูกนิยามโดย

$$\langle A \rangle_{S_0} = \frac{\int_0^1 D[\vec{r}(t)] A e^{\frac{i}{\hbar} S_0}}{\int_0^1 D[\vec{r}(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S_0}} \quad (4.27)$$

ตัวแพร่กระจาย K_0 สามารถคำนวณได้อย่างแม่นยำ(ดูบทที่ 3 ประกอบ) ในส่วนที่เป็นการเฉลี่ยสามารถคำนวณได้อย่างประมาณตามระเบียบวิธีการประมาณแบบคิวมิวแลนต์ ดังแสดงให้เห็นเป็นที่ประจักษ์โดย Kubo(22)

$$\langle e^x \rangle = \exp[\langle x \rangle - (1/2!)\{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2\} + \dots] \quad (4.28)$$

ด้วยสาเหตุที่เราต้องการเฉพาะความแตกต่าง $S - S_0$ ส่งผลให้พจน์พลังงานจลน์และพจน์ที่ประกอบด้วยสนามแม่เหล็กหักล้างกันจนหมดสิ้น คงเหลือเฉพาะพจน์สหสัมพันธ์เท่านั้น กล่าวคือ โดยอาศัยการประมาณคิวมิวแลนต์ที่หนึ่ง (first cumulant approximation) ส่งผลให้สมการ (4.26) กลับกลายเป็น

$$\begin{aligned}
K(\bar{r}_b, \bar{r}_a; T) &\approx K_0(\bar{r}_b, \bar{r}_a; \omega, T) \exp \frac{i}{\hbar} \left[\frac{i\sigma}{2\hbar} \int_0^T \int_0^T \langle W(\bar{r}(t) - \bar{r}(s)) \rangle_{S_0} ds dt \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2T} \frac{m\omega^2}{T} \int_0^T \int_0^T \langle |\bar{r}(t) - \bar{r}(s)|^2 \rangle_{S_0} ds dt - \left\langle \frac{i\sigma u^2 T^2}{2\hbar \pi L^2} \right\rangle_{S_0} \right] \\
&= e^{\frac{\sigma u^2 T^2}{2\hbar^2 \pi L^2}} K_0(\bar{r}_b, \bar{r}_a; \omega, T) \exp \frac{i}{\hbar} \left[\frac{i\sigma}{2\hbar} \int_0^T \int_0^T \langle W(\bar{r}(t) - \bar{r}(s)) \rangle_{S_0} ds dt \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2T} \frac{m\omega^2}{T} \int_0^T \int_0^T \langle |\bar{r}(t) - \bar{r}(s)|^2 \rangle_{S_0} ds dt \right] \\
&= e^{\frac{\sigma u^2 T^2}{2\hbar^2 \pi L^2}} e^{\frac{\sigma u^2 T^2}{2\hbar^2 \pi L^2}} K_0^0(\bar{r}_b, \bar{r}_a; \omega, T) \exp \frac{i}{\hbar} \left[\frac{i\sigma}{2\hbar} \int_0^T \int_0^T \langle W(\bar{r}(t) - \bar{r}(s)) \rangle_{S_0} ds dt \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2T} \frac{m\omega^2}{T} \int_0^T \int_0^T \langle |\bar{r}(t) - \bar{r}(s)|^2 \rangle_{S_0} ds dt \right] \\
&= K_0^0(\bar{r}_b, \bar{r}_a; \omega, T) \exp \frac{i}{\hbar} \left[\frac{i\sigma}{2\hbar} \int_0^T \int_0^T \langle W(\bar{r}(t) - \bar{r}(s)) \rangle_{S_0} ds dt \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2T} \frac{m\omega^2}{2} \int_0^T \int_0^T \langle |\bar{r}(t) - \bar{r}(s)|^2 \rangle_{S_0} ds dt \right] \quad (4.29)
\end{aligned}$$

4.6 การคำนวณ $\langle |\bar{r}(t) - \bar{r}(s)|^2 \rangle_{S_0}$

ในหัวข้อนี้เราจะทำการคำนวณปริมาณ $\langle |\bar{r}(t) - \bar{r}(s)|^2 \rangle_{S_0}$ เป็นอันดับแรกเนื่องจากค่อนข้างง่าย เริ่มต้นด้วยการพิจารณาตัวแปรกระจายอันดับศูนย์ $K_0(\bar{r}_b, \bar{r}_a; \omega, T)$ เรามี

$$\begin{aligned}
K_0(\bar{r}_b, \bar{r}_a; \omega, T) &= e^{\frac{\sigma u^2 T^2}{2\hbar^2 \pi L^2}} K_0^0(\bar{r}_b, \bar{r}_a; \omega, T) = e^{\frac{\sigma u^2 T^2}{2\hbar^2 \pi L^2}} D[\bar{r}(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S_0^0} \\
\frac{\omega^2 \frac{d}{d\omega^2} K_0(\bar{r}_b, \bar{r}_a; \omega, T)}{K_0(\bar{r}_b, \bar{r}_a; \omega, T)} &= \frac{e^{\frac{\sigma u^2 T^2}{2\hbar^2 \pi L^2}} D[r(t)] \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{m\omega^2}{2T} \int_0^T \int_0^T |\bar{r}(t) - \bar{r}(s)|^2 ds dt \right) e^{\frac{i}{\hbar} S_0^0}}{e^{\frac{\sigma u^2 T^2}{2\hbar^2 \pi L^2}} D[r(t)] e^{\frac{i}{\hbar} S_0^0}} \\
&= -\frac{i}{\hbar} \frac{m\omega^2}{2T} \int_0^T \int_0^T \langle |\bar{r}(t) - \bar{r}(s)|^2 \rangle_{S_0} ds dt \\
&= \frac{\omega^2 \frac{d}{d\omega^2} K_0^0(\bar{r}_b, \bar{r}_a; \omega, T)}{K_0^0(\bar{r}_b, \bar{r}_a; \omega, T)} \\
&= -\frac{i}{\hbar} \frac{m\omega^2}{2T} \int_0^T \int_0^T \langle |\bar{r}(t) - \bar{r}(s)|^2 \rangle_{S_0^0} ds dt \quad (4.30)
\end{aligned}$$

สมการ(4.30)สามารถคำนวณได้อย่างแม่นยำตรง ได้ผล

$$-\frac{i}{\hbar} \frac{m \omega^2}{2T} \frac{\omega^2}{2} \int_0^T \int_0^T \langle |\bar{r}(t) - \bar{r}(s)|^2 \rangle_{s_0^0} ds dt = 1 - \frac{\omega^2 T \sin(\Omega' T)}{2\Omega' [\cos(\frac{\Omega T}{2}) - \cos(\Omega' T)]} \quad (4.31)$$

จากสมการ(4.29)และสมการ(4.31) เราได้ตัวแพร่กระจายเฉลี่ยโดยประมาณดังนี้

$$K(\bar{r}_b, \bar{r}_a; T) \approx K_0^0(\bar{r}_b, \bar{r}_a; \omega, T) \exp \left[-\frac{\sigma}{2\hbar^2} \int_0^T \int_0^T \langle W(\bar{r}(t) - \bar{r}(s)) \rangle_{s_0} ds dt + \frac{\omega^2 T \sin(\Omega' T)}{2\Omega' [\cos(\Omega T / 2) - \cos(\Omega' T)]} - 1 \right] \quad (4.32)$$

4.7 การคำนวณ $\langle W(\bar{r}(t) - \bar{r}(s)) \rangle_{s_0}$

สำหรับฟังก์ชันสหสัมพันธ์แบบเกาส์เซียน

$$W(\bar{r}(t) - \bar{r}(s)) = (u^2 / \pi L^2) \exp[-|\bar{r}(t) - \bar{r}(s)|^2 / L^2] \quad (4.33)$$

เราเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปแบบ

$$W(\bar{r}(t) - \bar{r}(s)) = (1/2\pi)^2 u^2 \int d^2 k e^{-\frac{k^2 L^2}{4} + i\vec{k} \cdot (\bar{r}(t) - \bar{r}(s))} \quad (4.34)$$

ด้วยเหตุนี้ตัวแพร่กระจายเฉลี่ยจึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$K(\bar{r}_b, \bar{r}_a; T) \approx K_0^0(\bar{r}_b, \bar{r}_a; \omega, T) \exp \left[-\frac{\sigma}{2\hbar^2} \frac{u^2}{(2\pi)^2} \int_0^T \int_0^T \langle e^{i\vec{k} \cdot (\bar{r}(t) - \bar{r}(s))} \rangle_{s_0} ds dt e^{-\frac{k^2 L^2}{4}} d^2 k + \frac{\omega^2 T \sin(\Omega' T)}{2\Omega' [\cos(\Omega T / 2) - \cos(\Omega' T)]} - 1 \right] \quad (4.35)$$

ปริมาณ $e^{i\vec{k} \cdot (\bar{r}(t) - \bar{r}(s))}$ มีคุณสมบัติ

$$\langle e^{i\vec{k} \cdot (\bar{r}(t) - \bar{r}(s))} \rangle_{s_0} \equiv \langle e^{i\vec{k} \cdot (\bar{r}(t) - \bar{r}(s))} \rangle_{s_0^0} \quad (4.36)$$

ซึ่งสามารถคำนวณออกมาได้อย่างแม่นยำตรงโดยอาศัยฟังก์ชันก่อเกิด(generating functional) ผลลัพธ์ที่ได้คือ

$$\langle e^{i\vec{k} \cdot (\bar{r}(t) - \bar{r}(s))} \rangle_{s_0^0} \Big|_{\bar{r}_a = \bar{r}_b} = e^{\frac{i}{\hbar} \frac{(\hbar \vec{k})^2}{m \Omega' \sin(\Omega' T)} [A(t, s) + B(t, s)]} \quad (4.37)$$

เมื่อ

$$A(t, s) = \frac{1}{2} \left(\cos(\Omega' T) - \cos\left(\frac{\Omega}{2}(t-s)\right) \cos(T - (t-s)) \right) \quad (4.38)$$

$$B(t, s) = \frac{1}{\cos(\frac{\Omega T}{2}) - \cos(\Omega' T)} \left[\sin^2\left(\frac{1}{2}\left(\Omega' + \frac{\Omega}{2}\right)(t-s)\right) \sin^2\left(\frac{1}{2}\left(\Omega' - \frac{\Omega}{2}\right)T\right) \right]$$

$$+ \sin^2\left(\frac{1}{2}(\Omega' - \frac{\Omega}{2})(t - s)\right) \sin^2\left(\frac{1}{2}(\Omega' + \frac{\Omega}{2})T\right) \Big] \quad (4.39)$$

4.8 ตัวแพร่กระจายเฉลี่ย $\bar{K}(0,0;T)$

จากสมการ(4.35), (4.37), (4.38) และ(4.39) ภายใต้เงื่อนไข $\vec{F}_a = \vec{F}_b = 0$ เราได้ตัวแพร่กระจายเฉลี่ยโดยประมาณดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{K}(0,0;T) &= K_0^0(0,0;T) e^{\frac{\omega^2 T \sin(\Omega' T) - 1}{2m\Omega' [\cos(\Omega T/2) - \cos(\Omega' T)]}} \\ &\times \exp \left[-\frac{\sigma U^2}{2\hbar^2 (2\pi)^2} \int_0^T \int_0^T \int e^{-\frac{k^2 L^2}{4} + \frac{\hbar k^2}{m\Omega' \sin(\Omega' T)} [A(t,s) + B(t,s)]} d^2 k dt ds \right] \quad (4.40) \end{aligned}$$

อินทิกรัลเทียบกับ k สามารถจัดการได้อย่างแม่นยำตรงทั้งนี้เนื่องจากเป็นอินทิกรัลแบบเกาส์เซียนส่งผลให้สมการ(4.40)กลับกลายเป็น

$$\begin{aligned} \bar{K}(0,0;T) &= K_0^0(0,0;T) e^{\frac{\omega^2 T \sin(\Omega' T)}{2m\Omega' [\cos(\Omega T/2) - \cos(\Omega' T)]} - 1} \\ &\times \exp \left[-\frac{\sigma U^2}{2\hbar^2 (2\pi)^2} \pi \int_0^T \int_0^T [F(T,t,s)]^{-1} dt ds \right] \\ &= \frac{mT\omega^2}{4\pi\hbar [\cos(\frac{\Omega T}{2}) - \cos(\Omega' T)]} e^{\frac{\omega^2 T \sin(\Omega' T)}{2m\Omega' [\cos(\Omega T/2) - \cos(\Omega' T)]} - 1} \\ &\times \exp \left[-\frac{\sigma U^2}{2\hbar^2 (2\pi)^2} \pi \int_0^T \int_0^T [F(T,t,s)]^{-1} dt ds \right] \quad (4.41) \end{aligned}$$

โดยที่

$$F(T,t,s) = \frac{L^2}{4} - \frac{\hbar}{m\Omega' \sin(\Omega' T)} [A(t,s) + B(t,s)] \quad (4.42)$$

หรืออาจอาศัยเอกลักษณ์

$$\cos(\Omega T/2) - \cos(\Omega' T) \equiv 2 \sin \left[\frac{1}{2} \left(\Omega' + \frac{\Omega}{2} \right) T \right] \sin \left[\frac{1}{2} \left(\Omega' - \frac{\Omega}{2} \right) T \right] \quad (4.43)$$

ตัวแพร่กระจายเฉลี่ย $\bar{K}(0,0;T)$ โดยประมาณกลับกลายเป็น

$$\begin{aligned} \bar{K}(0,0;T) &= \frac{mT\omega^2}{8\pi\hbar \left(\sin \left[\frac{1}{2} \left(\Omega' + \frac{\Omega}{2} \right) T \right] \sin \left[\frac{1}{2} \left(\Omega' - \frac{\Omega}{2} \right) T \right] \right)} e^{\frac{\omega^2 T \sin(\Omega' T)}{2m\Omega' [\cos(\Omega T/2) - \cos(\Omega' T)]} - 1} \\ &\times \exp \left[-\frac{\sigma U^2}{2\hbar^2 (2\pi)^2} \pi \int_0^T \int_0^T [F(T,t,s)]^{-1} dt ds \right] \quad (4.44) \end{aligned}$$

โดยที่ $F(T,t,s)$ กลับกลายเป็น

$$\begin{aligned}
F(T, t, s) = \frac{L^2}{4} - \frac{\hbar}{2m\Omega' \sin(\Omega' T)} & \left[\cos(\Omega' T) - \cos\left(\frac{\Omega}{2}(t-s)\right) \cos(T - (t-s)) \right. \\
& + \frac{\sin((\Omega' + \Omega/2)T) \sin^2((\Omega' - \Omega/2)(t-s))}{\sin((\Omega' - \Omega/2)T)} \\
& \left. + \frac{\sin((\Omega' - \Omega/2)T) \sin^2((\Omega' + \Omega/2)(t-s))}{\sin((\Omega' + \Omega/2)T)} \right] \quad (4.45)
\end{aligned}$$

เดือนความทรงจำอีกครั้งหนึ่งว่า

$$\left. \begin{aligned}
\omega^2 &= \frac{4T}{m} \left(\frac{i\sigma u^2}{2\pi\hbar L^4} \right) \\
\Omega' &= \left[\left(\frac{\Omega}{2} \right)^2 + \omega^2 \right]^{1/2}
\end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

บทที่ 5

ความหนาแน่นสถานะของก๊าซอิเล็กตรอน

ในระบบสองมิติที่ไร้ระเบียบ

ท่ามกลางสนามแม่เหล็ก

5.1 บทนำ

ในบทนี้เราจะแสดงวิธีการคำนวณความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนในระบบสองมิติภายใต้สนามแม่เหล็กและความไร้ระเบียบอันเนื่องมาจากตัวกระเจิง(scatterers)จากตัวแผ่กระจายที่ได้จากสมการ(4.44) อย่างไรก็ตามเพื่อความสะดวกต่อการคำนวณบางประการ เราจะให้ความสนใจเป็นพิเศษต่อกรณีที่มีความถี่ไซโคลตรอนมีค่ามากกว่าความถี่ของ nonlocal harmonic oscillator มากๆซึ่งสอดคล้องกับกรณี $\omega/\Omega \ll 1$ ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อสนามแม่เหล็กมีความเข้มสูงหรือความยาวสหสัมพันธ์ L มีค่ามาก เตือนความทรงจำว่าเรามี

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 &= \frac{4T}{m} \left(\frac{i\sigma U^2}{2\pi\hbar L^4} \right) \\ \Omega' &= \left((\Omega/2)^2 + \omega^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

ต่อกรณี $\omega/\Omega \ll 1$ เราได้

$$\begin{aligned} \Omega' &\approx \frac{\Omega}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{\omega^2}{\Omega^2} + \dots \right] \\ &= \frac{\Omega}{2} + \frac{\omega^2}{\Omega} \end{aligned} \quad (5.2)$$

pre-exponential factor ที่ปรากฏในสมการ(4.4)คือ

$$F(T) = \frac{mT\omega^2}{4\pi\hbar[\cos(\Omega T/2) - \cos(\Omega' T)]}$$

ลดรูปไปสู่

$$F(T) \approx \frac{m\Omega}{4\pi\hbar} \frac{1}{\sin(\Omega T/2)} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^4 T^2}{24\Omega^2}\right)} \approx \frac{m\Omega}{4\pi\hbar(\sin(\Omega T/2))} \left(1 + \frac{\omega^4 T^2}{24\Omega^2} + \dots\right) \quad (5.3)$$

ในทำนองเดียวกันในส่วนของฟังก์ชันกำลังของตัวแผ่กระจาย(4.44)

$$\exp \left[\frac{\omega^2 T \sin(\Omega' T)}{2\Omega'(\cos(\Omega T/2) - \cos(\Omega' T))} - 1 - \frac{\sigma}{2\hbar^2} \left(\frac{U}{2\pi} \right)^2 \pi \int_0^T \int_0^T \frac{1}{B[T,t,s]} dt ds \right]$$

จะลดรูปไปสู่

$$\exp\left[\frac{\omega^4 T^2}{24\Omega^2} - \frac{\sigma}{2\hbar^2} \left(\frac{u}{2\pi}\right)^2 \pi \int_0^T \int_0^T \frac{1}{G[T,t,s]} dt ds\right] \quad (5.4)$$

โดยที่

$$G[T,t,s] = \frac{L^2}{4} + \frac{\hbar \sin[(\Omega/2)(T-(t-s))] \sin[(\Omega/2)(t-s)]}{m\Omega \sin[(\Omega T/2)]} \quad (5.5)$$

จากสมการ(4.4), (5.3)และ(5.4) เราได้ตัวแพร่กระจายต่อกรณี $\omega/\Omega \ll 1$ ดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{K}(0,0;T) &= \frac{m\Omega}{4\pi\hbar(\sin(\Omega T/2))} \left(1 + \frac{\omega^4 T^2}{24\Omega^2}\right) \\ &\times \exp\left[\frac{\omega^4 T^2}{24\Omega^2} - \frac{\sigma}{2\hbar^2} \left(\frac{u}{2\pi}\right)^2 \pi \int_0^T \int_0^T \frac{1}{G[T,t,s]} dt ds\right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

อย่างไรก็ตามเนื่องจาก พจน์ $\exp\left[\frac{\omega^4 T^2}{24\Omega^2}\right]$ ประมาณได้เป็น

$$\exp\left[\frac{\omega^4 T^2}{24\Omega^2}\right] \approx 1 + \frac{\omega^4 T^2}{24\Omega^2} \quad (5.7)$$

ส่งผลให้สมการ(5.6)กลับกลายเป็น

$$\bar{K}(0,0;T) = \frac{m\Omega}{4\pi\hbar(\sin(\Omega T/2))} \left(1 + \frac{\omega^4 T^2}{12\Omega^2}\right) \exp\left[-\frac{\sigma}{2\hbar^2} \left(\frac{u}{2\pi}\right)^2 \pi \int_0^T \int_0^T \frac{1}{G[T,t,s]} dt ds\right] \quad (5.8)$$

อย่างไรก็ตามให้ตั้งข้อสังเกต $G(T,t,s)$ ว่ามีคุณสมบัติ

$$G(T,t,s) = G(T,T-(t-s)) \quad (5.9)$$

ส่งผลให้ตัวแพร่กระจายเฉลี่ยโดยประมาณลดรูปไปสู่

$$\bar{K}(0,0;T) = \frac{m\Omega}{4\pi\hbar(\sin(\Omega T/2))} \left(1 + \frac{\omega^4 T^2}{12\Omega^2}\right) \exp\left[-\frac{\sigma}{2\hbar^2} \left(\frac{u}{2\pi}\right)^2 \pi T \int_0^T \frac{1}{G[T,y]} dy\right] \quad (5.10)$$

โดยที่

$$G[T,y] = \frac{L^2}{4} + \frac{\hbar \sin[(\Omega/2)(T-y)] \sin[(\Omega/2)y]}{m\Omega \sin[(\Omega T/2)]} \quad (5.11)$$

5.2 ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนต่อกรณี T มีค่ามาก

(large time approximation)

ก่อนที่จะนำสมการ(4.2)ไปประยุกต์ใช้กับสมการ(5.10)เพื่อให้ได้มาซึ่งความหนาแน่นสถานะ เราจะใช้วิธีการของ Halperin and Lax(23) ด้วยการกำหนดให้ $E_L = \hbar^2 / (2mL^2)$ ซึ่งสมพันธ์กับพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนที่ถูกขังอยู่ในขอบเขตของความยาวสหสัมพันธ์ L , ให้

$\xi_L = \sigma u^2 / (\pi L^2)$ เป็นขนาดของความแปรปรวน(variance) และให้ $x = \hbar\Omega / E_L$ จากสมการ(5.10)และ(5.11)เราได้ความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนเมื่อรวมทุกสปินเป็น

$$\rho(E) = \frac{A}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dT \frac{m\Omega}{4\pi\hbar(\sin(\Omega T/2))} \left(1 + \frac{\omega^4 T^2}{12\Omega^2}\right) \times \exp\left[\frac{iET}{\hbar} - \left(\frac{\xi_L}{2\hbar^2}\right)^2 T \int_0^T \frac{1}{G(T,y)} dy\right] \quad (5.12)$$

โดยที่

$$G(T,y) = 1 + \frac{8i \sin[(\Omega/2)(T-y)] \sin[(\Omega/2)y]}{x \sin[(\Omega T/2)]} \quad (5.13)$$

และ A คือพื้นที่ของระนาบที่อิเล็กตรอนดำรงอยู่ อินทิกรัลเทียบกับ y สามารถจัดการได้โดยให้ผลอย่างแม่นยำตรง ส่งผลให้(5.12)กลับกลายเป็น

$$\rho(E) = \frac{A}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dT \frac{m\Omega}{4\pi\hbar(\sin(\Omega T/2))} \left(1 + \frac{\omega^4 T^2}{12\Omega^2}\right) \times \exp\left[\frac{iET}{\hbar} - \left(\frac{\xi_L x T \sin(\Omega T/2)}{2\hbar\Omega\sqrt{a^2(x,T)-1}}\right) \tan^{-1} \frac{\sqrt{a(x,T)-1}}{\sqrt{a(x,T)+1}} \tan(\Omega T/4)\right] \quad (5.14)$$

โดยที่

$$a(x,T) = (x/4i) \sin(\Omega T/2) - \cos(\Omega T/2) \quad (5.15)$$

ด้วยสาเหตุที่

$$\omega^2 = \frac{4T}{m} \left(\frac{i\sigma u^2}{2\pi\hbar L^4}\right) = \frac{4iT}{\hbar^3} E_L \xi_L$$

เราได้

$$\omega^4 = -\frac{16T^2}{\hbar^6} (E_L \xi_L)^2 \quad (5.16)$$

และ

$$\begin{aligned} \frac{\omega^4}{\Omega^2} &= -\frac{16T^2}{\hbar^4} \left(\frac{\xi_L^2 E_L^2}{\hbar^2 \Omega^2}\right) \\ &= -\frac{16T^2 \xi_L^2}{\hbar^4 x^2} \end{aligned} \quad (5.17)$$

จากสมการ(5.14)และ(5.17)ทำให้เราได้

$$\rho(E) = \frac{A}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dT \frac{m\Omega}{4\pi\hbar(\sin(\Omega T/2))} \left(1 - \frac{4\xi_L^2 T^4}{3\hbar^4 x^2}\right) \times \exp\left[\frac{iET}{\hbar} - \left(\frac{\xi_L x T \sin(\Omega T/2)}{2\hbar\Omega\sqrt{a^2(x,T)-1}}\right) \tan^{-1} \frac{\sqrt{a(x,T)-1}}{\sqrt{a(x,T)+1}} \tan(\Omega T/4)\right] \quad (5.18)$$

ความหนาแน่นสถานะ(5.18)ไม่อาจคำนวณออกมาได้อย่างแม่นยำตรงด้วยสาเหตุของความซับซ้อนของพจน์ที่เป็นฟังก์ชันชี้กำลัง อินทิกรัลดังกล่าวจำเป็นต้องอาศัยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเท่า

นั่น อย่างไรก็ตามถึงตอนนี้เราต้องการคำนวณความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนต่อกรณีของสถานะพื้น(ground state)ซึ่งสามารถคำนวณได้โดยง่าย

ตามหลักความไม่แน่นอนของไฮเซนเบิร์ก ลิมิตสถานะพลังงานของสถานะพื้นบ่งชี้ว่าเป็นลิมิตที่เวลา(time)มีค่ามาก ลิมิตดังกล่าวสามารถกระทำได้ด้วยการประมาณปริมาณต่อไปนี้

$$\sin(\Omega x / 2) = \frac{e^{\Omega x / 2} - e^{-\Omega x / 2}}{2i} = (1/2i)e^{\Omega x / 2}(1 - e^{-\Omega x}) \rightarrow (1/2i)e^{\Omega x / 2} \quad (5.19)$$

$$\cot(\Omega x / 2) = i \frac{e^{\Omega x / 2} + e^{-\Omega x / 2}}{e^{\Omega x / 2} - e^{-\Omega x / 2}} = i \left(\frac{1 + e^{-\Omega x}}{1 - e^{-\Omega x}} \right) \rightarrow i \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\Omega x / 2) \sin[(\Omega / 2)(T - x)]}{\sin(\Omega T / 2)} &= (1/2i) \frac{(e^{\Omega x / 2} - e^{-\Omega x / 2})(e^{\Omega(T-x)/2} - e^{-\Omega(T-x)/2})}{(e^{\Omega T / 2} - e^{-\Omega T / 2})} \\ &= (1/2i) \frac{(1 - e^{-\Omega x})(1 - e^{-\Omega(T-x)})}{(1 - e^{-\Omega T})} \rightarrow (1/2i) \quad (5.21) \end{aligned}$$

จากการประมาณตามสมการ(5.19)-(5.21) ทำให้เราได้ความหนาแน่นสถานะต่อกรณี T มีค่ามากเป็น

$$\begin{aligned} \rho(E) &= \frac{A}{\pi \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dT \frac{m\Omega}{4\pi \hbar (\sin(\Omega T / 2))} \left(1 - \frac{4\xi_L^2 T^4}{3\hbar^4 x^2}\right) \times \exp\left[\frac{iET}{\hbar} - \frac{\xi_L}{2\hbar^2} \frac{xT^2}{(4+x)}\right] \\ &= \frac{A}{\pi \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dT \frac{m\Omega}{4\pi \hbar (\sin(\Omega T / 2))} \times \exp\left[\frac{iET}{\hbar} - \frac{\xi_L}{2\hbar^2} \frac{xT^2}{(4+x)}\right] \\ &\quad - \frac{A}{\pi \hbar} \left(\frac{4\xi_L^2}{3\hbar^4 x^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dT \frac{m\Omega T^4}{4\pi \hbar (\sin(\Omega T / 2))} \times \exp\left[\frac{iET}{\hbar} - \frac{\xi_L}{2\hbar^2} \frac{xT^2}{(4+x)}\right] \\ &= \rho_V(E) + \rho_1(E) \quad (5.22) \end{aligned}$$

โดยที่

$$\rho_V(E) = \frac{A}{\pi \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dT \frac{m\Omega}{4\pi \hbar (\sin(\Omega T / 2))} \times \exp\left[\frac{iET}{\hbar} - \frac{\xi_L}{2\hbar^2} \frac{xT^2}{(4+x)}\right] \quad (5.23)$$

และ

$$\rho_1(E) = -\frac{A}{\pi \hbar} \left(\frac{4\xi_L^2}{3\hbar^4 x^2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dT \frac{m\Omega T^4}{4\pi \hbar (\sin(\Omega T / 2))} \times \exp\left[\frac{iET}{\hbar} - \frac{\xi_L}{2\hbar^2} \frac{xT^2}{(4+x)}\right] \quad (5.24)$$

โดยอาศัยการกระจายฟังก์ชันไซน์ออกเป็นอนุกรมของฟังก์ชันซีกำลัง กล่าวคือ

$$\frac{1}{\sin(\Omega T / 2)} = (2i) \frac{1}{e^{\Omega T / 2} - e^{-\Omega T / 2}} = (2i) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i(n+1/2)\Omega T} \quad (5.25)$$

และอาศัยสูตรอินทิกรัล

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a} \quad (5.26)$$

และ

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2+bx} dx = \frac{12a^2 + 12ab^2 + b^4}{16} \sqrt{\frac{\pi}{a^9}} e^{b^2/4a} \quad (5.27)$$

ตามลำดับทำให้เราได้

$$\begin{aligned}\rho_V(E) &= \frac{mA}{\pi\hbar^2} \frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2\pi(\xi_L X / (4+x))}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(E-E_n)^2}{2(\xi_L X / (4+x))}} \\ &= \rho_0 \frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2\pi}^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(E-E_n)^2}{2\Gamma^2}}\end{aligned}\quad (5.28)$$

และ

$$\begin{aligned}\rho_1(E) &= -\frac{A}{\pi\hbar^2} \left(\frac{4\xi_L^2}{3\hbar^4 X^2} \right) \left(\frac{m\Omega}{2\pi} \right) \left(\frac{1}{16} \right) \left(\sqrt{\frac{\pi}{(\xi_L X / (2\hbar^2(4+x)))^9}} \right) \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \left[12 \left(\frac{\xi_L X}{2\hbar^2(4+x)} \right)^2 - 12 \left(\frac{\xi_L X}{2\hbar^2(4+x)} \right) \frac{(E-E_n)^2}{\hbar^2} + \frac{(E-E_n)^4}{\hbar^4} \right] e^{-\frac{(E-E_n)^2}{2\xi_L X / (4+x)}} \\ &= -\rho_0 \frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2\pi}^2} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{4+x}{X^2} \right)^2 \left(3 - 6 \frac{(E-E_n)^2}{\Gamma^2} + \frac{(E-E_n)^4}{\Gamma^4} \right) \right] e^{-\frac{(E-E_n)^2}{2\Gamma^2}}\end{aligned}\quad (5.29)$$

โดยที่

$$\Gamma^2 = \frac{\xi_L X}{4+x} \quad (5.30)$$

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\Omega \quad (5.31)$$

และ

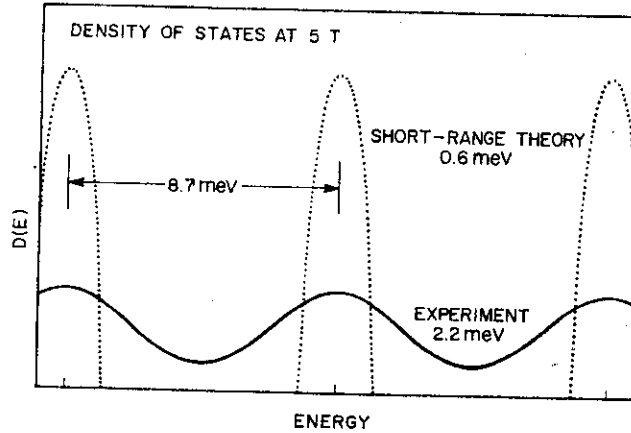
$$\rho_0 = \frac{mA}{\pi\hbar^2} \quad (5.32)$$

คือความหนาแน่นของอิเล็กตรอนอิสระในระบบสองมิติ จากสมการ(5.22), (5.28) และสมการ (5.29) เราได้

$$\begin{aligned}\rho(E) &= \rho_V(E) + \rho_1(E) \\ &= \rho_0 \frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2\pi}^2} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{4+x}{X^2} \right)^2 \left(3 - 6 \frac{(E-E_n)^2}{\Gamma^2} + \frac{(E-E_n)^4}{\Gamma^4} \right) \right] e^{-\frac{(E-E_n)^2}{2\Gamma^2}}\end{aligned}\quad (5.33)$$

ความหนาแน่นสถานะตามสมการ(5.33)เป็นผลรวมของ $\rho_V(E)$ และ $\rho_1(E)$ โดยที่ $\rho_V(E)$ เป็นความหนาแน่นสถานะตามแบบจำลองที่เสนอโดยวีรพท์และคณะ(14)คล้อยจองกับ แอคชันของอิเล็กตรอนตามสมการ(1.2) $\rho_V(E)$ ดังกล่าวเป็นผลบวกของฟังก์ชันเกาส์เซียนที่มีจุดศูนย์กลางตรงตำแหน่งระดับแลนดาว ส่วน $\rho_1(E)$ เป็นส่วนที่เพิ่มเติมขึ้นมาอันเนื่องมาจากแบบจำลองของผู้วิจัยสมนัยกับแอคชันตามสมการ(1.3) ใครก็ตามสามารถพิสูจน์ได้ว่าสมการ(5.33)จะลดรูปไปสู่สมการ(5.32)เมื่อสนามแม่เหล็กลดขนาดเข้าสู่ศูนย์ ความกว้าง(width)ของฟังก์ชันเกาส์เซียนนั้นเป็นฟังก์ชันของสนามแม่เหล็ก B ผ่านความสัมพันธ์ $x = (2e / \hbar^2 c) B L^2$ และยังเป็นฟังก์ชันของ L ผ่านความสัมพันธ์ $\xi_L = \rho u^2 / \pi L^2$ เป็นที่ชัดเจนว่าในขณะที่ $\Gamma \rightarrow 0$ ความหนาแน่นสถานะจะลดรูปไปสู่ฟังก์ชันเดลตาดีแรก $\rho(E) = n_0 \hbar\Omega \sum_n \delta(E - E_n)$ สำหรับค่า Γ

ที่ได้รับผลกระทบจากการเฉพาะ(6-13)คือ $\Gamma \approx 1(\text{meV T}^{-1/2})B^{1/2}$ หรือ $\Gamma \approx 2 \text{ meV}$ ณ ค่าสนามแม่เหล็ก $B \approx 5 \text{ T}$ (ดูรูป 5.1 ประกอบ)



รูป 5.1 แสดงความหนาแน่นสถานะที่ได้จากการทดลอง(เส้นทึบ) เปรียบเทียบกับที่ได้จากการคำนวณโดยอาศัยทฤษฎีอันตรกิริยาพิสัยสั้น(short-range interaction theory : SCBA) ณ ความเข้ม $B = 5 \text{ T}$, $\hbar\Omega = 8.7 \text{ meV}$

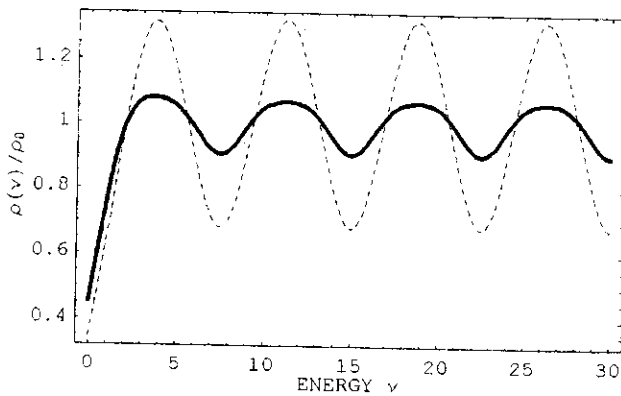
ลิมิตของ Γ นั้นเป็นปริมาณที่น่าสนใจ ต่อกรณีที่สนามแม่เหล็ก B ต่ำ หรือ L มีค่าน้อย กล่าวคือ $x \leq 1, \Gamma^2 \rightarrow \xi_L x / x$ และ Γ นั้นประมาณได้ว่าเป็นปฏิภาคโดยตรงต่อ \sqrt{B} ดังที่สังเกตได้จากการทดลอง ด้วยสาเหตุที่ $\xi_L x$ นั้นมีได้ขึ้นกับ L ดังนั้นขนาดของ Γ จึงถูกกำหนดโดยขนาดของการเปลี่ยนแปลงศักย์(potential fluctuation)ในขณะที่มีการปรับค่าสนาม B ต่อกรณีที่สนามแม่เหล็ก B มีค่ามากและความยาว L มาก นั่นคือ $x \gg 4, \Gamma \rightarrow \xi_L$ และ Γ กลับกลายเป็นขึ้นต่อ B ความหนาแน่นสถานะ $\rho(E)$ ที่ได้จากสมการ(5.33)นั้นแสดงให้เห็นถึงการดำรงอยู่ของความหนาแน่นสถานะระหว่างระดับแลนดาวที่ขึ้นต่อ L อย่างมีนัยสำคัญ ค่าของ L นั้นขึ้นกับความไร้ระเบียบ(disorder) ถ้าหากความไร้ระเบียบนั้นเกิดขึ้นจากการก้ำกัของสารเจือที่มีประจุ L จะมีค่าโดยประมาณเท่ากับความยาวของการก้ำกั(screening length)ซึ่งความยาวดังกล่าวมีขนาดระดับ 100 \AA ใน heterojunction(2) บทบาทของ L ในที่นี้ต้องจัดการให้สเกลพลังงาน $E_L = \hbar^2 / 2mL^2$ ต่อกรณีที่ $L = 100 \text{ \AA}$, $E_L \approx 1 \text{ meV}$ ในที่นี้เราสมมติให้ $E_L = 1 \text{ meV}$ จะเป็นการสะดวกกว่าที่เขียนความหนาแน่นสถานะดังกล่าวในรูปของ n_0 และตัวแปรที่ไม่มีหน่วย กล่าวคือโดยการให้ $\xi'_L = \xi_L / E_L^2$, $v = E / E_L$ และ $\Gamma'^2 = \Gamma^2 / E_L^2$ เราได้

$$\rho(\nu) = \frac{\rho_0 x}{\sqrt{2\pi}\Gamma'^2} \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{4+x}{x^2} \right)^2 \left(3 - 6 \frac{(\nu - (n+1/2)x)^2}{\Gamma'^2} + \frac{(\nu - (n+1/2)x)^4}{\Gamma'^4} \right) \right] e^{-\frac{(\nu - (n+1/2)x)^2}{2\Gamma'^2}} \quad (5.34)$$

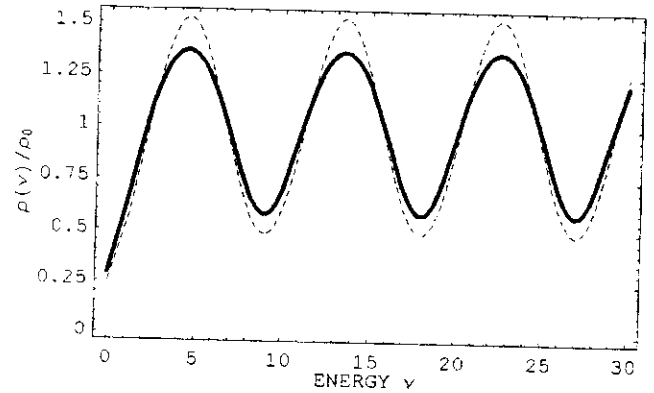
ด้วยค่า $E_L = 1 \text{ meV}$ ดังกล่าวสำหรับ $1 \leq B \leq 10 \text{ T}$ จะต้องจองกับที่มีค่า integer filling factor ν_F อยู่ระหว่าง 1 ถึง 8 x มีค่าอยู่ระหว่าง 1 ถึง 15 สำหรับ $\Gamma \approx 2 \text{ meV}$ และ $E_L = 1 \text{ meV}$ เราจะได้ ξ'_L และอยู่ในระดับ 1 ถึง 10

สำหรับกราฟของ $\rho(\nu) / \rho_0$ ต่อกรณี x และ ξ'_L บางค่าได้แสดงไว้ดังรูป 5.2 และ 5.3 ตามลำดับ(เส้นทึบ) โดยเปรียบเทียบกับที่ได้จากแบบจำลองของวิรุพห์และคณะ [$\rho_V(\nu) / \rho_0$ (เส้นประ)]

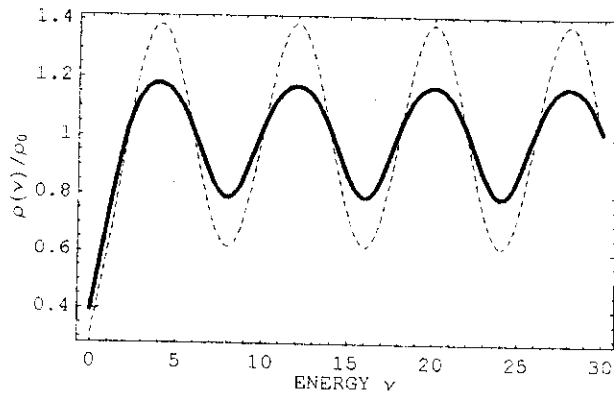
$x = 7.5, \xi'_L = 8$



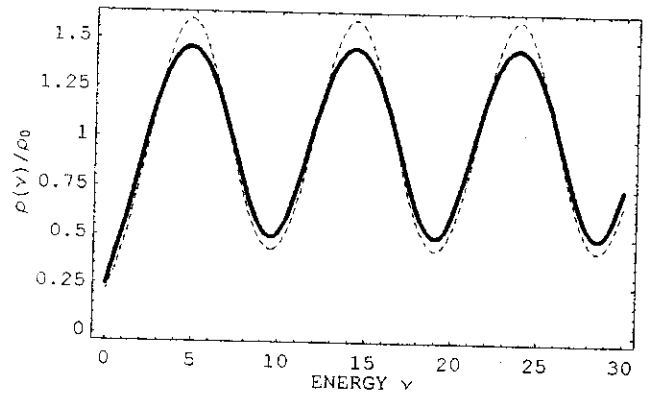
$x = 9, \xi'_L = 8$



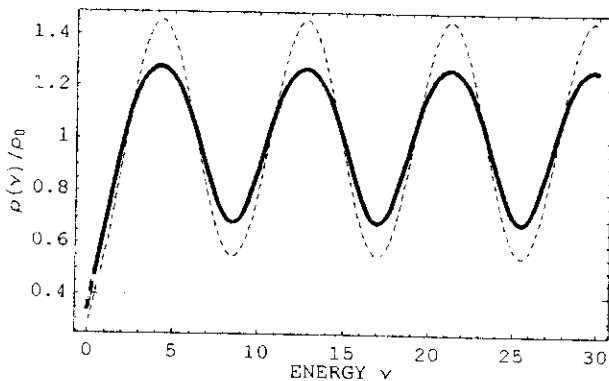
$x = 8, \xi'_L = 8$



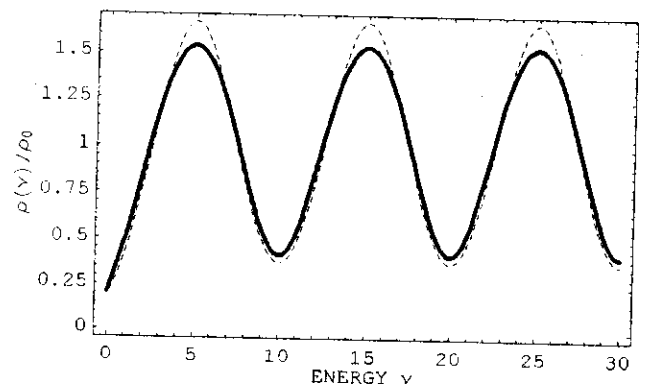
$x = 9.5, \xi'_L = 8$

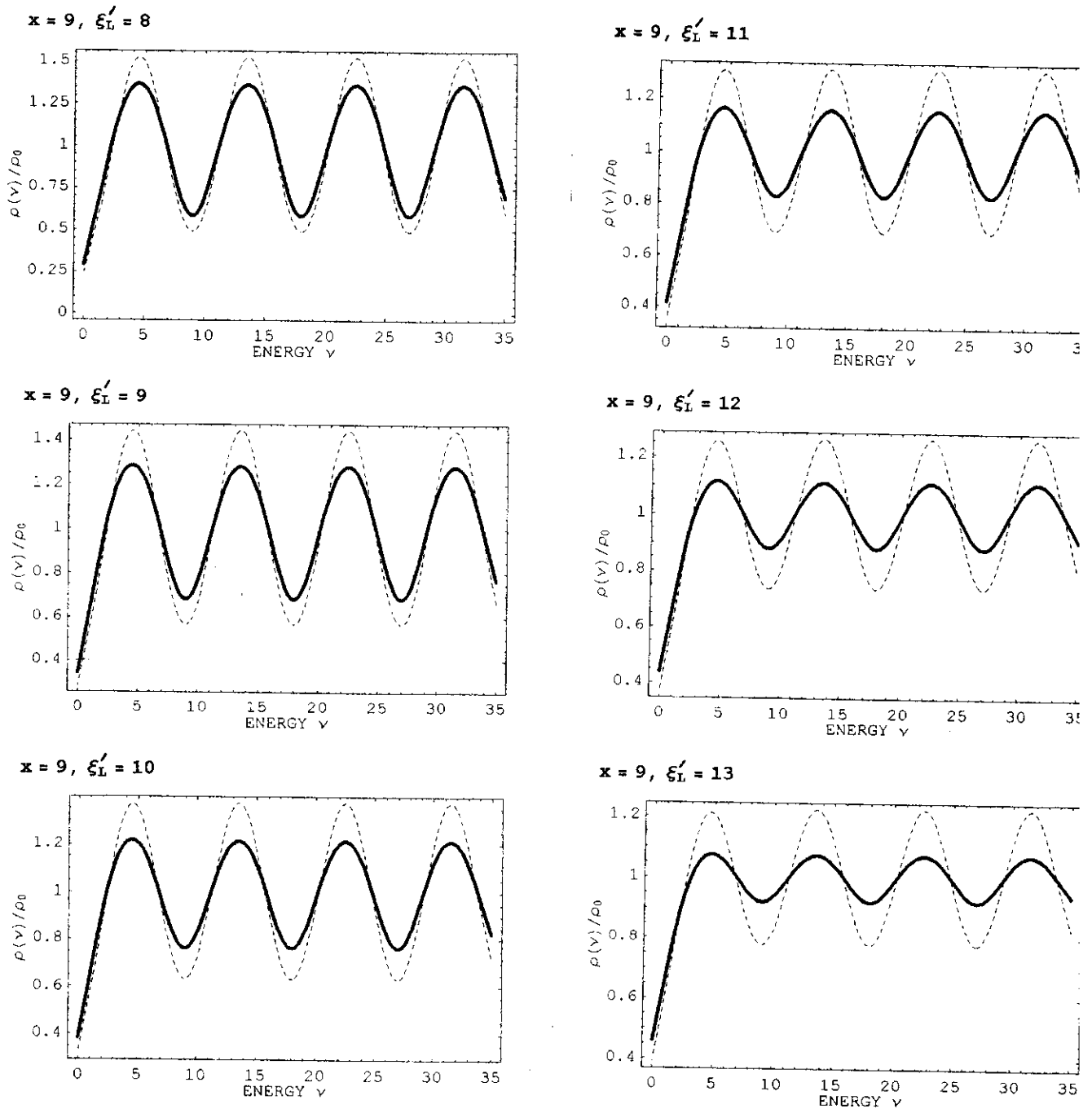


$x = 8.5, \xi'_L = 8$



$x = 10, \xi'_L = 8$





รูป 5.3 แสดงกราฟ ρ/ρ_0 พล็อตเทียบกับ v เมื่อ ξ_L' แปรค่าระหว่าง 8 ถึง 13 ภายใต้ x คงที่เท่ากับ 9

จะเห็นได้ว่าความหนาแน่นสถานะตามแบบจำลองของคูวีจิช(กราฟเส้นทึบ)มีความหนาแน่นสถานะระหว่างระดับแลนดาวเพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญโดยเฉพาะเมื่อ x ลดลง หรือ ξ_L' เพิ่มขึ้น

5.3 ผลการคำนวณเชิงตัวเลขและเปรียบเทียบกับผลจากการทดลองของความหนาแน่นสถานะในกรณีทั่วไป

ตามที่ได้ประจักษ์ในหัวข้อก่อนหน้าต่อกรณีที่ T มีค่ามากกว่าความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนสองมิติท่ามกลางสนามแม่เหล็กนั้นเป็นบวคของฟังก์ชันแกาส์เซียนที่มีศูนย์กลางอยู่ตรงระดับแลนดาว E_n ด้วยพารามิเตอร์ความกว้าง(width)

$$\begin{aligned}\Gamma^2 &= \xi_L \frac{x}{x+4} \\ &= \xi_L \frac{1}{1+2\ell^2/L^2}\end{aligned}\quad (5.35)$$

โดยที่ ℓ และ L เป็นความยาวเชิงแม่เหล็กและความยาวสหสัมพันธ์ตามลำดับ จากรูป 5.1-5.3 ได้แสดงให้เห็นเป็นที่ประจักษ์ว่าเราสามารถที่จะเพิ่มความหนาแน่นสถานะระหว่างระดับแลนดาวได้ด้วยการเลือกความแปรปรวนแกาส์เซียนและความยาวสหสัมพันธ์ L ที่เหมาะสม ทว่าผลที่ได้ความกว้างและความสูงของพีคในแต่ละระดับแลนดาวมีค่าคงตัวที่เท่ากันดูเหมือนจะขัดแย้งกับที่ได้จากการทดลองของกูซุคกินและทีโมฟีเยฟที่แสดงในรูปที่ 1.2 ซึ่งความกว้างและความสูงของพีคของระดับแลนดาวขึ้นกับเลขควอนตัม N และตัวประกอบการบรรจุ ν สำหรับการบรรจุเต็มของอิเล็กตรอน ความกว้างของพีคอาจอยู่ในรูป

$$\Gamma^2 = \frac{Q^2}{1+(4N+2)\ell^2/d^2}\quad (5.36)$$

โดยที่ Q คือแอมพลิจูดของความแปรปรวน(fluctuation amplitude) d คือสเกลเชิงเส้นของความแปรปรวน(linear scale of fluctuation) ส่วน N แทนดัชนีแลนดาว(Landau index) เน้นอนที่ Q^2 ในสมการ(5.36)ย่อมคล้องจองกับ ξ_L และสเกลเชิงเส้น d ย่อมสมนัยกับความยาวสหสัมพันธ์ L ในสมการ(5.35) เป็นที่ชัดเจนว่าสมการ(5.36)จะกลับกลายเป็นสมการ(5.35)เมื่อ $N=0$ นั้นหมายความว่านิพจน์ $\rho(E)$ ใช้การได้เฉพาะระดับแลนดาวต่ำสุดจำนวนเล็กน้อยเท่านั้น(คล้องจองกับ $T \rightarrow \infty$) เพื่อหลีกเลี่ยงความไม่สอดคล้องกับการทดลอง(อันเนื่องมาจากการประมาณ $T \rightarrow \infty$) ดังกล่าว เราจำเป็นต้องอาศัยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการคำนวณอินทิกรัลที่ซับซ้อนของสมการ(5.18) หลังจากนั้นจึงนำผลการคำนวณที่ได้เปรียบเทียบกับความหนาแน่นสถานะที่ได้จากการทดลอง

กูซุคกินและทีโมฟีเยฟได้ทำการทดลองวัดความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอนบนผิว Si ชนิด p ของ metal-oxide-semiconductor transistors โดยวิธีที่เรียกว่า "magneto-optic experiment" p-Si มีสารเจือปนโบรอนซึ่งเข้มข้น $8.3 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ โครงสร้างเชิงเรขาคณิตสองมิติเป็นรูปร่างแหวน (annular geometry or Carbinio disks) ความหนาของแผ่นฉนวนมีขนาด 1300 \AA และสภาพการเคลื่อนที่ได้สูงสุดของอิเล็กตรอนเป็น $\mu = 3 \text{ m}^2 / (V \cdot s)$ อุณหภูมิ $T = 1.6 \text{ K}$ ส่วนสนามแม่เหล็กแปรค่าได้สูงถึง 8 T

ในการคำนวณความหนาแน่นสถานะ(5.12)-(5.18) เราเขียน

$$\rho(E) = \frac{2}{\pi} \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dt \operatorname{Re} [1 - (\frac{64}{3}) t^4 \xi_L'^2 x^{-6}] e^{2i(v/x - (n+1/2))t + f'(t)} \quad (5.37)$$

โดยที่

$$f'(t) = \frac{it \sin t}{2x} \xi_L' \int_0^{\infty} dy \frac{1}{-(ix/4) \sin t - \cos t + \cos y} \quad (5.38)$$

เมื่อ $\xi_L' = \xi_L / E_L^2$ และ $v = E / E_L$ สมการ(5.38)สามารถอินทิเกรตได้ ด้วยการให้ $t = \pi N + \theta$ ($-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$) สมการ(3.51)กลับกลายเป็น

$$\rho(E) = \sum_{n=0}^{\infty} K(v - x(n+1/2)) \quad (5.39)$$

โดยที่

$$K(v) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dt \operatorname{Re} [1 - (\frac{64}{3}) t^4 \xi_L'^2 x^{-6}] e^{[2ivt/x + f'(t)]} \quad (5.40)$$

เมื่อ

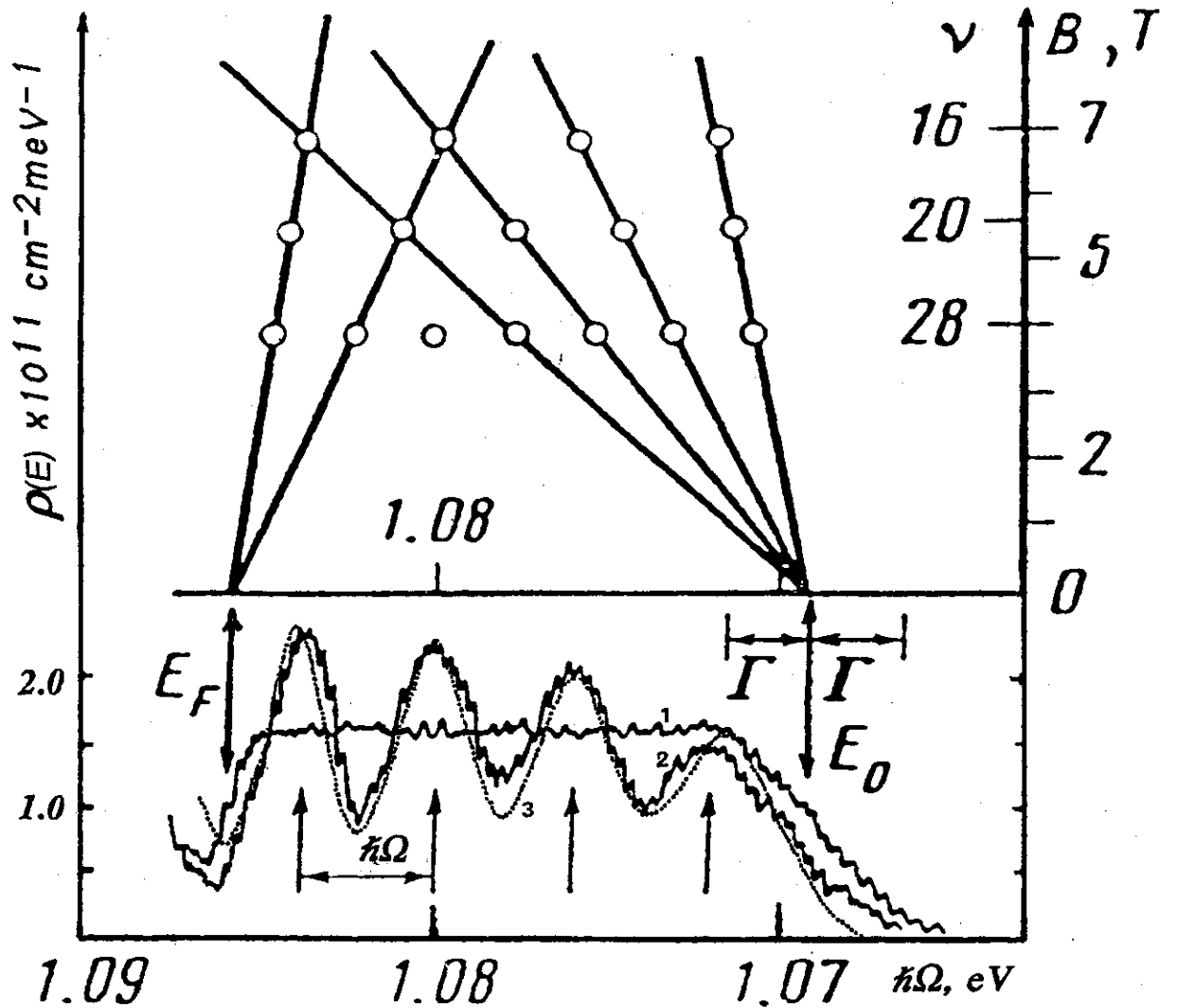
$$f'(t) = i(\pi N + \theta) \xi_L' \frac{\sin \theta}{2x\sqrt{a^2 - 1}} [\pi N + 2 \tan^{-1}(\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}} \tan(\frac{\theta}{2}))] \quad (5.41)$$

และ

$$a = -\frac{x}{4} \sin \theta - \cos \theta, \quad |a - \sqrt{a^2 - 1}| < 1 \quad (5.42)$$

อินทิกรัลเทียบกับเวลาสามารถจัดการได้ด้วยการประมาณเชิงตัวเลข โดยอาศัยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ Mathematica 4.1 ผลการประมาณเชิงตัวเลขได้แสดงไว้ในตารางที่ 1(รายละเอียดดูจากภาคผนวก)

รูป 5.4 เส้นโค้งหมายเลข 1 แสดงสเปกตรัม recombination radiation ของอิเล็กตรอนที่ปราศจากสนามแม่เหล็กเมื่อความหนาแน่น $n=2.7 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ ซึ่งทำการทดลองโดยดูซุซกินและทีโมฟิเยฟ เส้นโค้งหมายเลข 2 เป็นเส้นโค้งเมื่อมีสนามแม่เหล็ก $B=7.0 \text{ T}$ สเปกตรัมการเปล่ง(emission spectra) สะท้อนถึงการคงตัวของความหนาแน่นสถานะของอิเล็กตรอน(เมื่อ $B=0$) ภายใต้สนามแม่เหล็ก 7.0 T และความหนาแน่น $n=2.7 \times 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ ($U=16$) พบว่าพีคของสเปกตรัมห่างกันเป็นระยะทางที่เท่าๆกัน 4 พีค คล้องจองกับระดับแลนดาว 4 ระดับซึ่งห่างกันเท่ากับพลังงานไซโคลตรอน $\hbar\Omega = 4.0 \text{ meV}$ โดยสอดคล้องกับมวลยังผลหรือมวลไซโคลตรอน(cyclotron mass) $m^* = 0.20m$ สำหรับเส้นโค้งหมายเลข 3 (เส้นประ) เป็นผลที่คำนวณได้จากการประมาณเชิงตัวเลขของความหนาแน่นสถานะโดยใช้ $\xi_L = 6.8 \text{ meV}^2$, $L = 97 \text{ \AA}$ (ขนาดของความหนาแน่นสถานะ $\rho_0 = 1.6 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3} \text{ meV}^{-1}$) จากรูป 5.4 จะเห็นได้ว่าผลการคำนวณเชิงตัวเลข(เส้นโค้งหมายเลข 2)ค่อนข้างสอดคล้องกับการทดลอง(เส้นโค้งหมายเลข 3)



รูปที่ 5.4 เส้นโค้งหมายเลข 1 และหมายเลข 2 แสดงสเปกตรัมการเปล่งของก๊าซอิเล็กตรอนสองมิติเมื่ออุณหภูมิ $T=1.6$ K ภายใต้สนามแม่เหล็ก $B=0$ (เส้นโค้งหมายเลข 1) และ $B=7$ T, $\hbar\Omega = 4.0$ meV (เส้นโค้งหมายเลข 2) เส้นโค้งหมายเลข 3 (เส้นประ) แสดงผลลัพธ์เชิงตัวเลขของความหนาแน่นสถานะโดยใช้ $\xi_L = 6.8$ meV², $L = 97$ Å โดยที่ความหนาแน่นสถานะเมื่อปราศจากสนามแม่เหล็ก $\rho_0 = 1.6 \times 10^{11}$ cm⁻² meV⁻¹

ตารางที่ 1 แสดงค่าเชิงตัวเลขของความหนาแน่นสถานะ $\rho(E)$ ต่อกรณี $\xi'_L = 1.7$, $\xi_L = 6.8 \text{ meV}^2$, $x = 2$, และ $\hbar\Omega = 4.0 \text{ meV}$

พลังงาน E(meV)	$\rho(E) [\times 10^{11} \text{ cm}^{-2} \text{ meV}^{-1}]$
-3.00000	0.0156121
-2.80000	0.0164097
-2.60000	0.0242794
-2.40000	0.0363625
-2.20000	0.0518425
-2.00000	0.0759702
-1.80000	0.1309640
-1.60000	0.1368120
-1.40000	0.1187210
-1.20000	0.2359780
-1.00000	0.3106860
-0.80000	0.3684090
-0.60000	0.5815090
-0.40000	0.5986380
-0.20000	0.7183430
0.00000	0.8511170
0.20000	0.9773860
0.40000	1.1075000
0.60000	1.2817100
0.80000	1.3402000
1.00000	1.4430400
1.20000	1.5802000
1.40000	1.5815600
1.60000	1.5969000
1.80000	1.5759100
2.00000	1.5281800

ตารางที่ 1 (ต่อ)

พลังงาน E(meV)	$\rho(E) [\times 10^{11} \text{cm}^{-2} \text{meV}^{-1}]$
2.40000	1.410500
2.60000	1.369300
2.80000	1.269230
3.00000	1.169340
3.20000	1.078980
3.40000	1.007450
3.60000	0.964032
3.80000	0.968024
4.00000	0.968774
4.20000	1.065670
4.40000	1.190675
4.60000	1.305800
4.80000	1.468150
5.00000	1.624920
5.20000	1.775891
5.40000	1.901960
5.60000	2.005090
5.80000	2.063380
6.00000	2.055324
6.20000	1.993220
6.40000	1.870400
6.60000	1.852990
6.80000	1.711490
7.00000	1.546487
7.20000	1.358560
7.40000	1.188400
7.60000	1.046670

ตารางที่ 1 (ต่อ)

พลังงาน E(meV)	$\rho(E) [\times 10^{11} \text{cm}^{-2} \text{meV}^{-1}]$
7.80000	0.964067
8.00000	0.891266
8.20000	0.908936
8.40000	0.977717
8.60000	1.108210
8.80000	1.289053
9.00000	1.486430
9.20000	1.705050
9.40000	1.917170
9.60000	2.083040
9.80000	2.216480
10.00000	2.276600
10.20000	2.264390
10.40000	2.166090
10.60000	2.171560
10.80000	1.990540
11.00000	1.762700
11.20000	1.527780
11.40000	1.275250
11.60000	1.054700
11.80000	0.885646
12.00000	0.769577
12.20000	0.731982
12.40000	0.773356
12.60000	0.894206
12.80000	1.085060
13.00000	1.324500

ตารางที่ 1 (ต่อ)

พลังงาน E(meV)	$\rho(E) [\times 10^{11} \text{ cm}^{-2} \text{ meV}^{-1}]$
13.20000	1.592110
13.40000	1.877580
13.60000	2.105600
13.80000	2.294970
14.00000	2.418530
14.20000	2.443190
14.40000	2.374920
14.60000	2.383770
14.80000	2.189860
15.00000	1.933340
15.20000	1.644450
15.40000	1.343450
15.60000	1.060650
15.80000	0.826403
16.00000	0.661076
16.20000	0.585053
16.40000	0.598727
16.60000	0.712487
16.80000	0.909711
17.00000	1.161760

5.4 สรุปและวิจารณ์ผล

จากการเปรียบเทียบผลการคำนวณเชิงตัวเลข(เส้นโค้งหมายเลข 3)กับผลการทดลอง (เส้นโค้งหมายเลข 2)ในรูปที่ 5.4 เราจะเห็นได้ว่ามีความสอดคล้องกันค่อนข้างดี สามารถคำนวณความหนาแน่นสถานะได้ทุกระดับแลนดาวโดยไม่ทำให้ความหนาแน่นสถานะระหว่างระดับแลนดาวเป็นศูนย์ ซึ่งคุณลักษณะดังกล่าวเป็นสิ่งจำเป็น และสามารถปรับค่าความยาวสหสัมพันธ์ได้ทุก ระดับคล่องจองกับศักย์อิเล็กตรอน-ไอออน $v(\vec{r} - \vec{R}_i)$ ของสิ่งเจือที่มีพิสัยจำกัด

อย่างไรก็ตามในการได้มาซึ่งความหนาแน่นสถานะรูปทรงเกาส์เซียนตามสมการ(5.34)นั้น เราจำเป็นต้องมีการประมาณ กล่าวคือเราให้ลิมิตเวลา(time limit) ของตัวแผ่กระจายของอิเล็กตรอน มีค่าเป็นอนันต์ นั่นหมายความว่าความหนาแน่นสถานะที่ได้นี้สามารถใช้งานได้เฉพาะระดับแลนดาวต่ำสุดจำนวนเล็กน้อยเท่านั้น กล่าวโดยสรุปเราสามารถสร้างหรือเพิ่มความหนาแน่นสถานะระหว่างระดับแลนดาวในแก๊สอิเล็กตรอนสองมิติดังปรากฏในรูป 5.2 -5.4 ได้ด้วยแบบจำลองของความไร้ระเบียบที่มีความแปรปรวนแบบเกาส์เซียนด้วยความยาวสหสัมพันธ์จำกัด $L \approx 100 \text{ \AA}$

สารอ้างอิง

1. T. Ando, A.B. Fowler, and F. Stern, **Rev. Mod. Physics.** 54, 437(1982).
2. K. von Klitzing, **Rev. Mod. Physics.** 58, 519(1986).
3. K. von Klitzing, G. Dora, and M. Pepper, **Phys. Rev. Letter.** 45, 494(1980).
4. D. Weiss, K. von Klitzing, and V. Mosser, in **Two-Dimensional System : Physics and New Devices, Vol. 67 of Springer Series in Solid States Sciences**, edited by G Bauer, F. Kuchar, and H. Heinrich (Springer, Berlin, 1986), p. 204.
5. D. Weiss, E. Stahl, G. Weimann, K. Ploog, and K. von Klitzing, in **Proceedings of Sixth International Conference on Electronic Properties of Two-Dimensional System**, Japan, 1985 (unpublished); **J. Physics. C.** C18, L783 (1985).
6. M.G. Gavrilo, and I.V. KuKushkin, **Pis's ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.** 43, 79 (1986)[**JETP Lett.** 43, 54, 1820 (1986)]
7. E. Gornik, R. Lassnig, G. Strasser, H.L. Stormer, A.C. Gossard, and W. Wegman, **Phys. Rev. Lett.** 54, 1820 (1985).
8. T.P. Smith III, W.I. Wang, and P.J. Stiles, **Phys. Rev. B** 34, 2995 (1986).
9. T.P. Smith, B.B. Goldberg, P.J. Stiles, and M. Heiblum, **Phys. Rev. B** 32, 2696 (1985).
10. T. Haavasoja, H.L. Stormer, D. J. BiShop, V. Narayanamurti, A.C. Gossard, and W. Weigmann, **Surf. Sci.** 142 , 294 (1984).
11. J.P. Einsentein, H.L. Stormer, V. Narayamurti, A.Y. Cho, A.C. Gossard, And C.W. Tu, **Phys. Rev. Lett.** 55 875 (1985).
12. I.V. Kukushkin, and V.B. Timofeev, **Sov. Phys. JETP** 66, 613 (1987)
13. T. Ando, **J. Phys. Soc. Jpn.** 38, 989 (1985); T. Ando, and Y. Uemura, in **High Magnetic Fields in Semiconductor Physics**, Vol. 71 of Springer Series in Solid State Science, edited by G. Landwehr (Springer, Berlin, 1987).
14. V. Sa-yakanit, N. Choosiri, and H.R. Glyde, **Phys. Rev. B** 38, 1340 (1987).
15. J.H. van Vleck, in **The Correspondence Principle in the Statistical Interpretation of Quantum Mechanics**, **Proc. Natn. Acad. Sci.**, 14, 178-188, (1978).
16. R.P. Feynman, **Phys. Rev.** 97, 660 (1955).
17. R.L. Stratonovich, **Soviet Physics. Doklady**, 2, 416 (1958).
18. G.J. Papadopolous, **J. Phys. A : Gen. Phys.**, 4, 773 (1971).
19. V. Sa-yakanit, N. Choosiri, and U. Robkob, **Phys. Rev. B** 37,10851 (1988-II)

20. V. Sa-yakanit, *J. Phys. C. : Solid St. Phys.*, 7, 2849 (1974).
21. S.F. Edwards, and Y.B. Gulyaev, *Proc. Phys. Soc.*, 83, 495 (1964)
22. K. Kubo, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 17, 1100 (1962).
23. B.I. Halperin, and M. Lax, *Phys. Rev.*, 148, 722 (1966).

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (-3/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

0.0156121

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (-2.8/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

0.0164097

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (-2.6/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

0.0242794

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (-2.4/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

0.0363625

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (-2.2/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

0.0518425

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (-2.0/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

0.0759702

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (-1.8/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

0.103964

```

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (-1.6/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
0.136812

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (-1.4/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
0.18721

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (-1.2/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
0.235978

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (-1.0/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
0.310686

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (-0.8/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
0.386409

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (-0.6/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
0.581509

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (-0.4/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}] - 0.10
0.598638

```



```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (-0.2/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
0.718343

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (0.0/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
0.851117

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (0.2/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
0.977386

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (0.4/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.1075

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (0.6/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.28171

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (0.8/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.3402

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (1.0/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.44304

```

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (1.2/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

1.5802

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (1.4/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

1.58156

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (1.6/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

1.5969

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (1.8/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

1.57591

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (2.0/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

1.52818

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (2.2/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

1.44322

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (2.4/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

1.4105

```

M1[x_] :=
  Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (2.6/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
    Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
    Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

1.36939

M1[x_] :=
  Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (2.8/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
    Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
    Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}] - 0.03

1.26923

M1[x_] :=
  Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (3.0/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
    Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
    Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

1.16934

M1[x_] :=
  Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (3.2/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
    Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
    Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

1.07898

M1[x_] :=
  Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (3.4/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
    Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
    Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

1.00745

M1[x_] :=
  Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (3.6/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
    Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
    Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

0.964032

M1[x_] :=
  Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (3.8/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
    Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
    Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

0.968024

```

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (4.0/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
0.968774

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (4.2/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.06567

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (4.6/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}] - 0.46
1.3058

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (4.8/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.46815

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (5.0/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.62492

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (5.2/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.77589

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (5.4/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}] + 0.05
1.91096

```

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (5.6/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
2.00509

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (5.8/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
2.06338

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (6.0/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
2.05532

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (6.2/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.99322

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (6.4/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.8704

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (6.6/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.85299

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (6.8/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.71149

```

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (7.0/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.54648

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (7.2/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.35856

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (7.4/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.1884

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (7.6/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.04667

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (7.8/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
0.964067

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (8.0/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
0.891266

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (8.2/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
0.908936

```

```

M1[x_] :=
  Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (8.4/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
    Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
    Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
0.977717

M1[x_] :=
  Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (8.6/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
    Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
    Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.10821

M1[x_] :=
  Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (8.8/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
    Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
    Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.28095

M1[x_] :=
  Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (9.0/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
    Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
    Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.48643

M1[x_] :=
  Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (9.2/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
    Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
    Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.70505

M1[x_] :=
  Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (9.4/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
    Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
    Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.91717

M1[x_] :=
  Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (9.6/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
    Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
    Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
2.08304

```

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (9.8/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
2.21648

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (10.0/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
2.2766

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (10.2/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
2.26439

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (10.4/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
2.16609

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (10.6/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
2.17156

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (10.8/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.99054

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (11.0/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.76273

```



```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (11.2/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.52778

```

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (11.4/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.27525

```

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (11.6/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
1.0547

```

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (11.8/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
0.885646

```

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (12.0/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
0.769577

```

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (12.2/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
0.731982

```

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (12.4/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]
0.773356

```

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (12.6/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

0.894206

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (12.8/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

1.08506

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (13.0/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

1.3245

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (13.2/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

1.59211

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (13.4/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

1.87758

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (13.6/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

2.1056

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (13.8/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

2.29497

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (14.0/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

2.41853

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (14.2/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

2.44319

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (14.4/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

2.37492

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (14.6/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] ,
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

2.38377

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (14.8/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

2.18986

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (15.0/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

1.93334

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (15.2/4 - (k + 1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

1.64445

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (15.4/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

1.34345

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (15.6/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

1.06065

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (15.8/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

0.826403

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (16.0/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

0.661076

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (16.2/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

0.585053

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (16.4/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

0.598727

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (16.6/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

0.712487

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (16.8/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

0.909711

```

M1[x_] :=
Sum[Re[(1 - 64/3 1.7^2 x^4 1/2^6) Exp[2 I (17.0/4 - (k+1/2)) x + (1.7 I/4) x Sin[x] /
Sqrt[-Sin[x]^2/4 + Cos[x]^2 - I Sin[x] Cos[x] - 1] 2 ArcTan[Tan[x/2]
Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] - 1] / Sqrt[-I Sin[x]/2 - Cos[x] + 1]]], {k, 0, 50}]
a1 = 1.01859 NIntegrate[M1[x], {x, 0, Pi/2}]

```

1.16176