บทความวิชาการ

ระบบสัจพจน์ของฮิลแบร์ทสำหรับเรขาคณิตแบบยุคลิด

(Hilbert's System of Axioms for Euclidean Geometry)

สมใจ จิตพิทักษ์ กศ.ด. (พัฒนศึกษาศาสตร์)

Somjai Jitpitak Ed.D. (Dev.Ed.)

รองศาสตราจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

Associate Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Thaksin University

เสกสรรค์ ดำกระบี่ กศ.ม. (คณิตศาสตร์)

Seksan Dumkrabi M.Ed. (Mathematics)

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

Assistant Professor, Mathematics Department, Faculty of Science, Thaksin University

เรขาคณิตว่าด้วยรูปและทรง การรับรู้เกี่ยวกับรูปทรงของเราขึ้นอยู่กับสามัญความคิดเชิงเทศะ(spatial intuition) ซึ่งขาดความเป็นปรนัย นักคณิตศาสตร์กรีกในอดีตได้พัฒนาเรขาคณิตเชิงตรรกด้วยการแสดงสัจพจน์(axiom)ออกมาโดยแจ้งชัดไม่ต้องอาศัยสามัญความคิดหรือสหัชญาณ จากเจตน์จำนงนี้ก่อให้เกิดหนังสือชื่ออิลิเมนต์ที่เรียบเรียงโดยยุคลิด (Euclid's Elements) ซึ่งยอมรับกันเป็นเวลานานว่าเป็นแบบจำลองที่สมบูรณ์ของระบบตรรก อย่างไรก็ตาม เมื่อเวลาผ่านไปนักคณิตศาสตร์ได้สังเกตพบความบกพร่องหลายประการ โดยเฉพาะตั้งแต่คริสตศตวรรษที่ 19 เป็นต้นมาได้มีการวิเคราะห์วิจารณ์อิลิเมนต์อย่างเป็นระบบ เรขาคณิตนอกแบบยุคลิด (Non-Euclidean geomerty) ได้ถือกำเนิดขึ้นมาจากการสำรวจตรวจสอบสัจพจน์การขนานของยุคลิด (Euclid's axiom of parallels) หรือสัจพจน์ที่ห้า (the fifth postulate) และยังพบด้วยว่าระบบสัจพจน์ของยุคลิดยังขาดความสมบูรณ์ สัจพจน์ต่าง ๆ สำหรับเรขาคณิตแบบยุคลิดได้ถูกปรับปรุงขึ้นมาโดยนักคณิตศาสตร์หลายท่าน โดยเฉพาะในยุโรปในช่วงครึ่งหลังของศตวรรษที่ 19 หนึ่งในบรรดานักคณิตศาสตร์ที่ว่านี้ได้แก่ ฮิลแบร์ท (D. Hilbert, 1862 – 1943) นักคณิตศาสตร์เยอรมัน ศาสตราจารย์แห่งมหาวิทยาลัยเกิตติงเงน (University of Göttingen) ได้เสนอรากฐานเรขาคณิตพิมพ์เผยแพร่ครั้งแรกในปี ค.ศ.1899 ในช่วงชีวิตท่านได้ปรับปรุงแก้ไข 7 ครั้ง พิมพ์ครั้งที่ 7 ในปี ค.ศ. 1930

ฮิลแบร์ทกำหนดพจน์อนิยามไว้สามสิ่งได้แก่ **จุด** (points) (เขียนแทนด้วย A, B, C,...) **เส้นตรง** (straight lines) (หรือเรียกสั้น ๆ ว่า **เส้น** (lines)) (เขียนแทนด้วย a, b, c,...) และ **ระนาบ** (planes) (เขียนแทนด้วย α, β, γ,...) ระหว่างสิ่งเหล่านี้มีความสัมพันธ์อุบัติการณ์ (incidence relation) (แสดงด้วยวลีเช่น "A อยู่บน a" "a ผ่าน A" เป็นต้น) ความสัมพันธ์อันดับ (order relation) ("B อยู่ระหว่าง A และ C") ความสัมพันธ์สมภาค (congruence relation) และความสัมพันธ์ขนานกัน (parallel relation) ความสัมพันธ์เหล่านี้เป็นไปภายใต้กลุ่มของสัจพจน์ห้ากลุ่มต่อไปนี้

(I) สัจพจน์อุบัติการณ์ (Incidence axioms) :

(1) สำหรับจุดสองจุด A, B มีเส้น a ผ่าน A และ B

(2) ถ้า $A \neq B$ เส้น a ผ่าน A, B มีได้เพียงเส้นเดียว

เราเขียน $a = A \cup B$ และเรียก a ว่า**เส้นเชื่อม** (join) ของ A, B

(3) ทุกเส้นบรรจุจุดต่างกันอย่างน้อยสองจุด และมีจุดอย่างน้อยสามจุดที่ไม่อยู่บนเส้นเดียวกัน

(4) ถ้า A, B, C เป็นจุดไม่อยู่บนเส้นเดียวกัน จะมีระนาบ α ผ่าน A, B, C (เราอาจกล่าวว่า A, B, C อยู่บน α) แต่ละระนาบ β มีจุด D อย่างน้อยหนึ่งจุดบน β

(5) ถ้า A, B, C เป็นจุดไม่อยู่บนเส้นเดียวกัน ระนาบผ่าน A, B, C มีได้เพียงระนาบเดียว เราเขียน $\alpha = A \cup B \cup C$ และเรียก α ว่าระนาบ**เชื่อม** (join) ของ A, B, C

(6) ถ้า A, B เป็นจุดสองจุดต่างกันบนเส้น a และถ้า A, B อยู่บนระนาบ α แล้วทุกจุดบน a อยู่บนระนาบ α (เรากล่าวว่า a อยู่บน α หรือ α ผ่าน a)

(7) ถ้าจุด A อยู่บนสองระนาบ α, β จะมีจุดอย่างน้อยอีกจุดหนึ่งคือ B ที่อยู่ทั้งบน α และ β

(8) มีจุดอย่างน้อยสี่จุดที่ไม่อยู่บนระนาบเดียวกัน

(II) สัจพจน์อันดับ (Ordering axioms) :

(1) ถ้า B อยู่ระหว่าง A และ C แล้ว A, B, C เป็นจุดสามจุดต่างกันบนเส้นเดียวกันและยังได้ว่า B อยู่ระหว่าง C และ A

(2) ถ้า A, C เป็นจุดสองจุดที่ต่างกันแล้ว จะมีจุด B ที่ C อยู่ระหว่าง A และ B

(3) ถ้า B อยู่ระหว่าง A และ C แล้ว A ไม่อยู่ระหว่าง B และ C

เรานิยาม**ส่วนของเส้นตรง** (segment) ว่าหมายถึงเซตของจุด A, B และจุดระหว่าง A กับ B เขียนแทนด้วย AB หรือ BA เรียก A และ B ว่า**จุดปลาย** (ends) ของส่วนของเส้นตรง AB เซตของจุดระหว่าง A, B เรียกว่า **จุดภายใน** (interior) ของ AB และเซตของจุดของ $A \cup B$ ที่ไม่เป็นจุดปลายหรือจุดภายในของ AB เรียกว่า **จุดภายนอก** (exterior) ของ AB

(4) ให้ A, B, C เป็นจุดสามจุดไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ถ้าเส้นตรง a บนระนาบ $A \cup B \cup C$ ไม่ผ่านจุด A, B หรือ C แต่ผ่านจุดภายในของ AB แล้ว มันจะผ่านจุดภายในของ BC หรือ CA (**สัจพจน์ของพาสซ์** (Pasch's axiom))

ทฤษฎีบทที่พิสูจน์ได้จากสัจพจน์ข้างต้นเช่น ทฤษฎีบทอันดับเชิงเส้น (theorem of linear ordering) มีใจความดังนี้ กำหนดจุด n จุด $A_1, A_2, ..., A_n$ บนเส้นตรง ($n > 2$) เราสามารถจัดเรียง(ถ้าจำเป็น) ให้ได้จุด A_j อยู่ระหว่าง

A_i และ A_k เมื่อ $1 \leq i < j < k \leq n$ มีเพียงสองวิธีเท่านั้นที่จัดเรียงจุดในลักษณะเช่นนี้

ให้ O เป็นจุดบนเส้นตรง a ให้ A, B เป็นสองจุดบนเส้นตรงที่ต่างจาก O เราเขียน $A \sim B$ เมื่อ $A = B$ หรือ O ไม่อยู่ระหว่าง A กับ B ถ้าไม่เป็นไปตามนี้เราเขียน $A \nsim B$ จะได้ $\sim$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลระหว่างจุดบนเส้นตรงที่ต่างจาก O และจะได้ว่า ถ้า $A \nsim B$ และ $A \nsim C$ แล้ว $B \sim C$ เรากล่าวว่า A, B อยู่ด้านเดียวกัน(same side) หรืออยู่ด้านตรงข้ามกัน(opposite side) ของ O บน a ขึ้นอยู่กับว่า $A \sim B$ หรือ $A \nsim B$

เซตย่อยสองเซต a' และ a'' ของ a ที่นิยามโดย $a' = \{A' \mid A \sim A'\}$ และ $a'' = \{A'' \mid A \nsim A''\}$ เรียกว่า**ครึ่งเส้นตรง** (half–lines) หรือ**รังสี** (rays) บน a โดยที่ O เป็นส่วนสุด(หรือเริ่มต้นจาก O) เพื่อให้สั้นและกระชับนิยมให้ a แทนเซตของจุดบน(เส้นตรง) a ดังนั้น $a = a' \cup \{O\} \cup a''$ (disjoint union)

ให้ a เป็นเส้นตรงบน α ให้ A, B เป็นสองจุดบน α ที่ไม่อยู่บน a ถ้า $A = B$ หรือถ้าภายในของส่วนของเส้นตรง AB ไม่มีจุดร่วมกับ a เรากล่าวว่า A, B อยู่**บนด้านเดียวกัน** (same side) ของ a บน α และเขียน $A \sim B$ กรณีอื่น(นิเสธ) เรากล่าวว่า A, B อยู่บน**ด้านตรงข้าม** (opposite side) ของ a บน α และเขียน $A \nsim B$ จะได้ $\sim$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลระหว่างจุดบน α ที่ไม่อยู่บน a และถ้า $A \nsim B$, $A \nsim C$ จะได้ $B \sim C$

เซตย่อย $\alpha' = \{A' \mid A \sim A'\}$ และ $\alpha'' = \{A'' \mid A \nsim A''\}$ ของ α เรียกว่า**ครึ่งระนาบ** (half–plane) บน α มี**ขอบเขต** (bounded) โดย a เช่นเดียวกับกรณีของเส้นตรง ถ้าให้ α และ a แทนเซตของจุดบน α และบน a ตามลำดับ แล้วจะได้ $\alpha = \alpha' \cup a \cup \alpha''$ (disjoint union)

(III) สัจพจน์สมภาค (Congruence axioms) :

ส่วนของเส้นตรง AB, $A'B'$ มีความ**สัมพันธ์สมภาค** (congruence) เขียนแทนด้วย $AB \equiv A'B'$ (อาจกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่าส่วนของเส้นตรง AB และ $A'B'$ **สมภาคกัน** (congruent) จากนิยามส่วนของเส้นตรงจะได้ ความสัมพันธ์ทั้งสี่คือ $AB \equiv A'B'$, $BA \equiv A'B'$, $AB \equiv B'A'$, $BA \equiv B'A'$ ต่างสมมูลกัน) ความสัมพันธ์สมภาคเป็นไปภายใต้สัจพจน์สามข้อต่อไปนี้

(1) ให้ A, B เป็นจุดสองจุดต่างกันบนเส้นตรง a และ A_1 เป็นจุดบนเส้นตรง a_1 (a_1 อาจเท่าหรือไม่เท่ากับ a) ให้ a_1' เป็นรังสีบน a_1 เริ่มต้นจาก A_1 จะมีจุด B_1 เพียงจุดเดียวบน a_1' ที่ $AB \equiv A_1B_1$

(2) ถ้า $A_1B_1 \equiv AB$ และ $A_2B_2 \equiv AB$ แล้ว $A_1B_1 \equiv A_2B_2$ (จากสัจพจน์นี้จะได้ $\equiv$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลระหว่างส่วนของเส้นตรง)

(3) ให้ A, B, C เป็นจุดสามจุดโดยที่ B อยู่ระหว่าง A กับ C ให้ A_1, B_1, C_1 เป็นสามจุดโดยที่ B_1 อยู่ระหว่าง A_1 กับ C_1 ถ้า $AB \equiv A_1B_1$ และ $BC \equiv B_1C_1$ แล้ว $AC \equiv A_1C_1$

ให้ h, k เป็นเส้นตรงสองเส้นต่างกันในระนาบ α และผ่านจุด O ให้ h', k' เป็นรังสีบน h, k ตามลำดับ เริ่มต้นจาก O เซตของสองรังสี h', k' เรียกว่า**มุม** (angle) ใน α เขียนแทนด้วย $\angle(h', k')$ หรือ $\angle(k', h')$ มุมนี้ยังเขียนแทนด้วย $\angle AOB$ โดยที่ A, B เป็นจุดบน h', k' ตามลำดับ รังสี h', k' เรียกว่า**ด้าน** (แขน)(sides) และจุด O เรียกว่า**จุดยอด** (vertex) ของมุม

เซตย่อย h' ของครึ่งระนาบบน α มีขอบเขตโดย k และ k' เป็นเซตย่อยของครึ่งระนาบบน α มีขอบเขตโดย h อินเตอร์เซกชันของสองครึ่งระนาบเรียกว่า**ภายใน** (interior) ของมุม เซตย่อย α - O ซึ่งประกอบด้วยจุดที่ไม่อยู่ภายใน

หรือบนด้าน(แขน)ของมุมเรียกว่า**ภายนอก** (exterior) ของมุม

ระหว่างมุม $\angle(h', k')$, $\angle(h_1', k_1')$ จะมีความสัมพันธ์สมภาค เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\equiv$ เช่นเดียวกับกรณีส่วนของเส้นตรง และความสัมพันธ์นี้เป็นไปภายใต้สองสัจพจน์ต่อไปนี้

(4) ให้ $\angle(h', k')$ เป็นมุมบนระนาบ α และ h_1 เป็นเส้นตรงบน α_1 (α_1 อาจเท่าหรือไม่เท่า α) ให้ O_1 เป็นจุดบน h_1 ให้ h_1' เป็นรังสีบน α_1 เริ่มต้นจาก O_1 และ α_1' เป็นครึ่งระนาบบน α_1 มีขอบเขตโดย h_1 จะมีรังสี k_1' เพียงรังสีเดียวที่เริ่มต้นจาก O_1 และอยู่ใน α_1' ที่ $\angle(h', k') \equiv \angle(h_1', k_1')$ นอกจากนี้ยังได้ $\angle(h', k') \equiv \angle(h', k')$ ดังนั้น $\equiv$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลระหว่างมุม

(5) ให้ A, B, C และ A_1, B_1, C_1 เป็นชุดสามของจุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ถ้า $AB \equiv A_1B_1$, $AC \equiv A_1C_1$ และ $\angle BAC \equiv \angle B_1A_1C_1$ แล้ว $\angle ABC \equiv \angle A_1B_1C_1$

(IV) สัจพจน์ของการขนาน (Axiom of parallels) :

สมมติ a, b เป็นเส้นตรงสองเส้นต่างกัน จากสัจพจน์ (I).(2) จะได้ว่า ถ้า a และ b มีจุดร่วม(จุดตัด) P แล้วจุดนี้เป็นจุดเดียวที่อยู่ทั้งบน a และ b ในกรณีนี้เรากล่าวว่า a, b **ตัดกัน** (intersect) ที่ P เขียนแทนด้วย $a \cap b = P$ อีกกรณีถ้า a และ b ไม่มีจุดร่วม โดยที่ a, b อยู่บนระนาบเดียวกัน เรากล่าวว่า a, b **ขนานกัน** (parallel) และเขียน $a // b$

สัจพจน์ของการขนานกล่าวว่า ถ้าจุด A เส้นตรง a อยู่บนระนาบ α และ A ไม่อยู่บน a จะมีเส้นตรง b เพียงเส้นเดียวที่ผ่าน A ใน α ที่ $a // b$

(V) สัจพจน์ของความต่อเนื่อง (Axiom of continuity) :

(1) ให้ AB, CD เป็นส่วนของเส้นตรงสองส่วน จะมีจำนวนจุดจำกัดจุด $A_1, A_2, ..., A_n$ บน $A \cup B$ ที่ $CD \equiv AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv ... \equiv A_{n-1}A_n$ และ B อยู่ระหว่าง A กับ A_n (**สัจพจน์ของอาร์คีมีดีส**(Archimedes' axiom))

(2) เซตของจุดบนเส้นตรง a (เพื่อให้สั้นและกระชับเขียนแทนด้วย a) "ใหญ่สุด"(maximal) ในความหมายที่ว่าสอดคล้องกับสัจพจน์ (II).(1) – (II).(3), (III).(1), (V).(1) และทฤษฎีบทอันดับเชิงเส้น ถ้า $\bar{a}$ เป็นเซตของจุดที่สอดคล้องกับสัจพจน์ดังกล่าว โดยที่ $\bar{a} \supset a$ แล้ว $\bar{a}$ ควรจะ = a (**สัจพจน์ของความสมบูรณ์เชิงเส้น**(axiom of linear completeness)) ผลที่ได้คือทฤษฎีบทของความสมบูรณ์ : เซตของจุด เส้นตรง และระนาบ "ใหญ่สุด" คือไม่สามารถเพิ่มจุด เส้นตรง หรือระนาบเข้าไปในเซตนี้โดยเซตที่ได้ใหม่ยังคงสอดคล้องกับสัจพจน์ (I) – (IV) และ (V).(1)

ระบบสัจพจน์ทั้งห้ากลุ่มไม่ขัดกันคือมีความต้องกัน (consistency) เป็นอิสระต่อกัน (independence) และบริบูรณ์ (completeness) จึงถือเป็นรากฐานของเรขาคณิตแบบยุคลิดในระบบสัจพจน์ที่สมบูรณ์ระบบหนึ่ง และในปัจจุบันถือกันว่าระบบสัจพจน์ของฮิลแบร์ทเป็นระบบสัจพจน์ที่ดีที่สุดที่ใช้แก้ไขจุดบกพร่องของเรขาคณิตแบบยุคลิด

เอกสารอ้างอิง

Hilbert, D. (1971). Foundations of Geometry. 2nd. ed. (trans. by Leo Unger from the German Edition). La Salle, IL: Open Court.

Mathematical Society of Japan. (1987). "Foundations of Geometry," in Encyclopedic Dictionary of Mathematics. 2nd. ed. (edited by Kiyosi Ito). MIT Press.