บทความวิชาการ

ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์กรณีสองฟังก์ชัน

สุวิชา ขวัญทอง นิสิตวิชาเอกคณิตศาสตร์
Suwicha Khanthong
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

สมใจ จิตพิทักษ์ กศ.ด. (พัฒนศึกษาศาสตร์)
Somjai Jitpitak Ed.D.(Dev.Ed.)
รองศาสตราจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

1. บทนำ

ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ของฟังก์ชันค่าจริง $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ ที่ f ต่อเนื่องกล่าวว่า

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \tag{a}$$

สำหรับบางค่า $c\in(a,b)$ กรณีสองฟังก์ชันคือ $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ และ $g:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ ที่ f ต่อเนื่อง และ g หาปริพันธ์รีมันน์ได้และไม่เป็นลบ จะมี $c\in(a,b)$ ที่

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx \tag{b}$$

กรณี f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเป็นฟังก์ชันเพิ่ม g หาปริพันธ์รีมันน์ได้และไม่เป็นลบ จะมี $c\in(a,b)$ ท

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^c g(x)\,dx + f(b)\int_c^b g(x)\,dx \tag{c}$$

และกรณี f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะมี $c\in(a,b)$ ที่

$$\int_a^c f(x)g(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = f(c)(c-a) - f(c)g(c)(c-b) \tag{d}$$

การพิสูจน์ (a) จะหาได้ในตำราแคลคูลัสทั่วไป กรณีสองฟังก์ชัน (b) นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส Pierre Ossian Bonnet (ค.ศ.1819-1892) ได้พิสูจน์ไว้ซึ่งจะได้กล่าวถึงและพิสูจน์ในตอนที่สาม (ทฤษฎีบท 3.1) การพิสูจน์ (c) และ (d) แนวคิดหลักได้จาก [2] และ [3]

2. ความรู้พื้นฐาน

ฟังก์ชันค่าจริง f บนช่วงปิด [a, b] จะเขียนแทนด้วย $f(c)(c-a)-f(c)g(c)(c-b)$ โดยที่ $\mathbb{R}$ คือเซตของจำนวนจริง

บทนิยาม 2.1 ให้ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ จะเรียก f ว่าเป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม** (increasing function) ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) \le f(x_2)$ ทุก $x_1, x_2 \in [a, b]$ เรียก f ว่าเป็น**ฟังก์ชันไม่เป็นลบ** (non-negative function) ถ้า $f(x) \ge 0$ ทุก $x \in [a, b]$ และเรียก f ว่าเป็น**ฟังก์ชันมีขอบเขต** (bounded function) ถ้ามี $B > 0$ ที่ทุก $f(x) \le B$ ทุก $x \in [a, b]$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้นำมาใช้โดยไม่พิสูจน์ สำหรับการพิสูจน์ดู [1] หรือ [2] หรือ ตำราแคลคูลัส หรือ ตำราคณิตวิเคราะห์ทั่วไป

ทฤษฎีบท 2.2 (ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง : Intermediate Value Theorem : IVT) ให้ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และสมมติ $f(a) < f(b)$ สำหรับแต่ละจำนวนจริง k ที่ $f(a) < k < f(b)$ จะมี $c \in (a, b)$ ที่ $f(c) = k$

ทฤษฎีบท 2.3 (ทฤษฎีบทค่าสุดขีด : Extreme Value Theorem : EVT) ถ้า $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ และ f ต่อเนื่อง แล้วจะมี c และ d ใน [a, b] ที่ $f(c) \le f(x) \le f(d)$ ทุก $x \in [a, b]$ หรือมีจำนวนจริง m, M ที่ $m \le f(x) \le M$ ทุก $x \in [a, b]$

ทฤษฎีบท 2.4 (ทฤษฎีบทของรอล : Rolle's Theorem) ให้ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ต่อเนื่องบน [a, b] หาอนุพันธ์ได้บน (a, b) ถ้า $f(a) = f(b) = 0$ แล้วจะมี $c \in (a, b)$ ที่ $f'(c) = 0$

เนื่องจากฟังก์ชันที่จะกล่าวถึงต่อไปเป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์รีมันน์ได้ (Riemann integrable function) เพื่อจะนำไปสู่บทนิยามปริพันธ์รีมันน์ (Riemann integral) จึงสมควรที่จะทบทวนมโนทัศน์เกี่ยวกับผลบวกรีมันน์ (Riemann sum) โดยสังเขปดังนี้ : ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีขอบเขตบน [a, b] ให้ P เป็นผลแบ่งกั้น (partition) ความยาว N ของ [a, b] นั่นคือ P ได้จากการเลือกจุดใดๆ ใน [a, b] ที่แบ่งช่วง [a, b] ออกเป็น N ช่วงย่อย

ผลแบ่งกั้น P : $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

ช่วงย่อย : $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{N-1}, x_N]$

ความยาวของช่วงที่ i , i = 1,2,...,N

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

ค่าสูงสุด (maximum) ของความยาว Δx_i เรียกว่านอร์ม (norm) ของผลแบ่งกั้น P เขียนแทนด้วย $\|P\|$ และเรียกเซตของจุด $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$ โดยที่ $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ว่า เซตของจุดระหว่างกลาง (set of intermediate point) ผลบวกรีมันน์ นิยามดังนี้

$$R(f,P,C) = \sum_{i=1}^{N} f(c_i)\,\Delta x_i$$

จากการปริทัศน์โดยสังเขปข้างต้นเราสามารถให้นิยามฟังก์ชันหาปริพันธ์รีมันน์ได้ และปริพันธ์รีมันน์ได้ดังนี้

บทนิยาม 2.5 ฟังก์ชัน $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ หาปริพันธ์รีมันน์ได้ (Riemann integrable) ถ้าทุกผลบวก รีมันน์ เข้าสู่ลิมิต L ค่าหนึ่งและค่าเดียว เมื่อนอร์มของผลแบ่งกั้นเข้าสู่ศูนย์นั่นคือ

$$L=\lim_{\|P\|\to 0} R(f,P,C)=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{N} f(c_i)\,\Delta x_i$$

หรืออีกนัยหนึ่ง ถ้า $|R(f,P,C)-L|$ มีค่าน้อยตามใจชอบเมื่อนอร์ม $\|P\|$ เข้าสู่ศูนย์ [ทุก $\varepsilon>0$ จะมี $\delta>0$ ที่ถ้า $\big|\|P\|-0\big|<\delta$ แล้ว $|R(f,P,C)-L|<\varepsilon$] ไม่ว่าจะเลือกผลแบ่งกั้นและจุดระหว่างกลางเป็นอย่างไรก็ตาม

ลิมิต L ถ้ามีจริง (exist) จะเขียนแทนด้วย $\int_a^b f(x)\,dx$ เรียกปริพันธ์นี้ว่า **ปริพันธ์จำกัดเขต** (definite integral) **หรือ ปริพันธ์รีมันน์** (Riemann integral) **ของฟังก์ชัน** f บน [a, b]

ทฤษฎีบท 2.6 ให้ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจะได้ f หาปริพันธ์รีมันน์ได้

ทฤษฎีบท 2.7 ถ้า $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ หาปริพันธ์รีมันน์ได้ ให้ $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\ x\in[a,b]$ จะได้ $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ ต่อเนื่อง

ทฤษฎีบท 2.8 (ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส : Fundamental Theorem of Calculus : FTC) ให้ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง นิยาม

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\qquad x\in[a,b]$$

จะได้ F หาอนุพันธ์ได้ และ $F'(x)=f(x)$ สำหรับทุก $x\in[a,b]$

ทฤษฎีบท 2.9 (สมบัติทางเดียว : Monotonicity) ให้ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ และ $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์-รีมันน์ได้ ถ้า $f(x)\le g(x)$ ทุก $x\in[a,b]$

แล้ว $\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$

3. ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์กรณีสองฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ต่อเนื่อง และ $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ หาปริพันธ์รีมันน์ได้ และไม่เป็นลบ (Riemann integrable and nonnegative) จะมี $c\in(a,b)$ ที่

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx \tag{1}$$

การพิสูจน์ จาก f ต่อเนื่องบน [a, b] โดยทฤษฎีบทค่าสุดขีดจะมีจำนวนจริง m และ M ที่ $m \le f(x) \le M$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ และเนื่องจาก $g(x) \ge 0$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ เราได้ $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$ หาปริพันธ์ (integrating) จาก a ถึง b และโดยทฤษฎีบท 2.9 จะได้

$$\int_a^b mg(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \int_a^b Mg(x)\,dx$$

จาก m และ M เป็นค่าคงตัวจะได้

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx$$

ถ้า $\int_a^b g(x)\,dx = 0$ จะได้ $0 = m \cdot 0 \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M \cdot 0 = 0$

นั่นคือ $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ ดังนั้นสำหรับทุก $c \in (a,b)$

จะได้ $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$

ถ้า $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0$ จะได้ $\int_a^b g(x)\,dx > 0$ ดังนั้น

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le M$$

โดยทฤษฎีบทค่าระหว่างกลางจะมี $c \in (a,b)$ ที่

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$$

ซึ่งจะได้

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

บทแทรก 3.2 ให้ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ต่อเนื่อง จะมี $c\in(a,b)$ ที่

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \tag{2}$$

การพิสูจน์ นิยาม $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ดังนี้

$g(x)=1, a\le x\le b$

จะได้ g หาปริพันธ์รีมันน์ได้และไม่เป็นลบ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.1 จะได้ว่ามี $c\in(a,b)$ ที่

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ให้ $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ หาปริพันธ์รีมันน์ได้และไม่เป็นลบ จะได้ว่ามี $c\in(a,b)$ ที่

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^c g(x)\,dx + f(b)\int_c^b g(x)\,dx \tag{3}$$

การพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 3.1 จะมี $\alpha\in(a,b)$ ที่

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\alpha)\int_a^b g(x)\,dx \tag{i}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เราได้

$f(a)\le f(\alpha)\le f(b)$

นิยาม $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ ดังนี้

$$F(x) = \left[f(b)-f(a)\right]\int_x^b g(t)\,dt$$

จาก g หาปริพันธ์รีมันน์ได้ จะได้ F(x) นิยามแจ่มชัด (well-defined) และต่อเนื่องบนช่วง [a, b] (โดยทฤษฎีบท 2.7)
จาก $g(x)\ge 0$ และ $f(\alpha)-f(a)\ge 0$ จะได้

$$F(b) = 0 \le \left[f(\alpha)-f(a)\right]\int_a^b g(x)\,dx \le F(a)$$

Thaksin.J., Vol.11 (2) July - December 2008

โดยทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง จะมี $c \in (a,b)$ ที่

$$F(c) = \left[f(\alpha) - f(a)\right] \int_a^b g(x)\,dx$$

ดังนั้น

$$f(b)\int_c^b g(x)\,dx - f(a)\int_c^b g(x)\,dx = f(\alpha)\int_a^b g(x)\,dx - f(a)\int_a^b g(x)\,dx$$

นั่นคือ

$$f(\alpha)\int_a^b g(x)\,dx = f(b)\int_c^b g(x)\,dx + f(a)\int_b^c g(x)\,dx + f(a)\int_a^b g(x)\,dx \qquad \text{(ii)}$$

ซึ่งจะได้จาก (i) และ (ii)

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^c g(x)\,dx + f(b)\int_c^b g(x)\,dx$$

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ และ $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะมี $c \in (a,b)$ ที่

$$\int_a^c f(x)g(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = f(c)(c-a) - f(c)g(c)(c-b) \qquad (4)$$

การพิสูจน์ ให้

$$F(x) = (x-b)\int_a^x f(t)g(t)\,dt + (x-a)\int_x^b f(t)\,dt$$

เนื่องจาก f และ g ต่อเนื่อง จะได้ fg ต่อเนื่องบน [a, b] ดังนั้น fg หาปริพันธ์รีมันน์ได้ ให้

$$F_1(x) = \int_a^x f(t)g(t)\,dt, \quad F_2(x) = \int_x^b f(t)\,dt$$

จะได้ $F_1(x)$ และ $F_2(x)$ ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ ดังนั้น (x-b) $F_1(x)$ และ (x-a) $F_2(x)$ ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้ ซึ่งจะได้ F(x) ต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้บนช่วง [a, b] จากการนิยาม F(x) จะได้ $F(a) = 0 = F(b)$ โดยทฤษฎีบทของรอล จะมี $c \in (a,b)$ ที่

$$F'(c) = 0$$

หาอนุพันธ์ฟังก์ชัน F(x) ได้

$$F'(x) = \left[\int_a^x f(t)g(t)\,dt + (x-b)f(x)g(x)\right] + \left[\int_x^b f(t)\,dt + (x-a)(-f(x))\right]$$

ดังนั้น

$$0 = F'(c) = \left[\int_a^c f(x)g(x)\,dx + (c-b)f(c)g(c)\right] + \left[\int_c^b f(x)\,dx - (c-a)f(c)\right]$$

นั่นคือ

$$\int_a^c f(x)g(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = f(c)(c-a) - f(c)g(c)(c-b)$$

ในทฤษฎีบท 3.4 ถ้าให้ $g(x) = 1$ สำหรับทุก $x \in [a,b]$ จะได้

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = f(c)(c-a) - f(c)(c-b)$$

นั่นคือ จะได้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์ :

$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$ ตามบทแทรก 3.2 หรือ ทฤษฎีบทค่ามัชฌิมสำหรับปริพันธ์

4. บรรณานุกรม

[1] สมใจ จิตพิทักษ์. (2550). คณิตวิเคราะห์ : ทฤษฎีและตัวอย่าง. สงขลา : มหาวิทยาลัยทักษิณ.

[2] Kosmala, Witold A. J. (1995). Introductory Mathematical Analysis. Dubuque, IA. : Wm. C. Brown Publishers.

[3] Tong, Jingcheng. (2002, March). "Mean value theorem for integrals generalized to involve two functions," The Mathematical Gazette. (90), 126-127.