บทความวิจัย

อินทิกรัลตามเส้นทางสำหรับตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกภายใต้แรงคงที่

Path Integral for an Harmonic Oscillator in the Presence of Constant Force

<u>พรศิริ ทองแก้ว</u>[1] เอกพันธ์ จันผง[2] และนิคม ชูศิริ[3*]

<u>Pornsiri Thongkeaw</u>[1], Ekkapun Junpong[2] and Nikom Choosiri[3*]

บทคัดย่อ

ในบทความนี้เราได้ประยุกต์ใช้วิธีอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมนกับระบบควอนตัมของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกภายใต้แรงคงที่ f โดยที่ลากรางเกียนของระบบดังกล่าวเขียนอยู่ในรูป $L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}m\omega^2x^2+fx$ พบว่าตัวแผ่กระจายสามารถเขียนอยู่ในรูปเชิงวิเคราะห์ดังนี้

$$K(b,a)=\left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}\right)^{1/2}\exp\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega T}\Big[(x_b^2+x_a^2)\cos\omega T-2x_ax_b+\tfrac{2f}{m\omega^2}(x_a+x_b)(1-\cos\omega T)-\tfrac{2f^2}{m^2\omega^4}(1-\cos\omega T)+\tfrac{f^2T\sin\omega T}{m^2\omega^3}\Big],$$

ในที่นี้ $T=t_b-t_a$ จากตัวแผ่กระจายที่ได้สามารถนำมาคำนวณหาระดับพลังงานที่เป็นไปได้และฟังก์ชันคลื่น โดยที่ระดับพลังงานที่เป็นไปได้คือ

$$E_n=(n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega-\tfrac{f^2}{2m\omega^2},\quad n=0,1,2,\ldots$$

[1,2] นิสิตบัณฑิตศึกษา ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา 90000

[3] รองศาสตราจารย์ ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา 90000

[*] โทรศัพท์ : 0817484122 e-mail : nikom@tsu.ac.th

อย่างไรก็ตามในที่นี้จะแสดงให้เห็นถึงฟังก์ชันคลื่นเฉพาะสถานะพื้นถึงสถานะตื่นตัวระดับที่ 2 เท่านั้น โดยที่เราได้

$$\psi_0(x) = \left(\tfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\tfrac{m\omega}{2\hbar}x^2 + \tfrac{f}{\omega\hbar}x - \tfrac{f^2}{2m\omega^3\hbar}\right],$$

$$\psi_1(x) = \left(\tfrac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^{1/2}\left(\tfrac{m\omega^2}{f}x - 1\right)\psi_0(x)$$

และ

$$\psi_2(x) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\tfrac{2m\omega}{\hbar}x^2 - \tfrac{4f}{\omega\hbar}x + \tfrac{2f^2}{m\omega^3\hbar} - 1\right)\psi_0(x)$$

เมื่อปราศจากแรงคงที่ f ระบบที่เราสนใจจะคล้องจองกับกรณี $f \rightarrow 0$ ฟังก์ชันคลื่นข้างต้นจะลดรูปเข้าสู่ฟังก์ชันคลื่นของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิก

คำสำคัญ : ตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิก อินทิกรัลตามเส้นทาง ตัวแผ่กระจาย ฟังก์ชันคลื่น

Abstract

In this paper we apply Feynman path integral method to quantum mechanical system of an harmonic oscillator in the presence of constant force f where the Lagrangian is in the form . We find that the propagator can be written in an analytical form,

$$K(b,a) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}\right)^{1/2} \exp\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega T}\Big[(x_b^2 + x_a^2)\cos\omega T - 2x_a x_b + \tfrac{2f}{m\omega^2}(x_a + x_b)(1-\cos\omega T) - \tfrac{2f^2}{m^2\omega^4}(1-\cos\omega T) + \tfrac{f^2 T\sin\omega T}{m^2\omega^3}\Big],$$

where $T = t_b - t_a$. From the propagator, the possible energy levels and the wave functions are derived. We obtain the energy level :

$$E_n = (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega - \tfrac{f^2}{2m\omega^2}, \quad n=0,1,2,...$$

However, for the wave functions we display them only in the case of ground state up to the second exited states. We find that

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + \frac{f}{\omega\hbar}x - \frac{f^2}{2m\omega^3\hbar}\right],$$

$$\psi_1(x) = \left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^{1/2}\left(\frac{m\omega^2}{f}x - 1\right)\psi_0(x)$$

and

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - \frac{4f}{\omega\hbar}x + \frac{2f^2}{m\omega^3\hbar} - 1\right)\psi_0(x)$$

When the constant force f approaches zero, the system of interest corresponds to the case $f \rightarrow 0$ the wave functions reduce to the wave functions of an harmonic oscillator.

Keywords : Harmonic Oscillator, Path Integral, Wave functions

คำนำ

นับตั้งแต่นิวตันได้คิดค้นวิชากลศาสตร์คลาสซิก(classical mechanics)ขึ้นตั้งแต่คริตศตวรรษที่ 17 นับเนื่องจนถึงคริตศตวรรษที่ 19 ยังไม่เคยมีปรากฏการณ์ธรรมชาติใดขัดแย้งกับหลักวิชาดังกล่าว แม้มีปรากฏการณ์ใหม่ๆที่ยุ่งยากบังเกิดขึ้นก็สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยการเพิ่มหรือดัดแปลงตัวแปร หรือเพิ่มสมการใหม่เข้าไป นอกจากไม่มีปรากฏการณ์ใดขัดแย้งกับหลักการสำคัญของกลศาสตร์คลาสซิกดังกล่าวแล้ว ในทางตรงกันข้ามกล-ศาสตร์คลาสซิก รวมทั้งฟิสิกส์คลาสซิกที่เหลือคือ ความร้อน แม่เหล็กไฟฟ้า และเสียง ได้ก้าวหน้าต่อไปอย่างไม่หยุดยั้ง ความก้าวหน้าดังกล่าวได้เจริญรุดหน้าไปเรื่อยๆจนถึงปี ค.ศ.1900 ซึ่งเป็นปีที่เริ่มต้นมีอุปสรรคเกิดขึ้น ปัญหานี้เพราะเราได้เข้าไปสู่ปรากฏการณ์ธรรมชาติของวัตถุที่มีขนาดเล็กในระดับอะตอมหรือเล็กกว่า ในระดับนี้หลักต่างๆที่มีในฟิสิกส์คลาสซิก(ประกอบด้วยกลศาสตร์ ความร้อน แม่เหล็กไฟฟ้าและเสียง)ไม่อาจนำมาใช้ได้ การอธิบายปรากฏการณ์เหล่านี้ต้องอาศัยหลักฟิสิกส์แนวใหม่ การค้นพบฟิสิกส์แนวใหม่นี้เกิดขึ้นหลายระยะและบุคคลหลายกลุ่มเกี่ยวข้องด้วย หว่าจุดเริ่มต้นที่ถือว่าเป็นการค้นพบฟิสิกส์แนวใหม่คือปี ค.ศ.1925 ซึ่งเป็นปีที่ชเรอดิงเงอร์ให้กำเนิดวิชากลศาสตร์ควอนตัม(quantum mechanics)[1]

หลักการของชเรอดิงเงอร์คือ อนุภาคที่มีขนาดเล็กระดับอะตอมหรือเล็กกว่าจะมีพฤติกรรมเป็นคลื่น(คลื่นสสาร) ตำแหน่งและโมเมนตัมของอนุภาคไม่อาจทำนายได้แต่จะสอดคล้องกับหลักความไม่แน่นอนของไฮเซนเบิร์ก ดังนั้นเราจึงไม่กล่าวถึงเส้นทางของอนุภาคได้เลย(เพราะไม่สามารถหาได้)ปริมาณต่างๆที่สังสรรค์อยู่กับอนุภาคสามารถสืบสาวได้จากฟังก์ชันคลื่น(wave function)ที่คล้องจองกับอนุภาคนั้น โดยที่ฟังก์ชันดังกล่าวจะต้องสอดคล้องสมการคลื่นชเรอดิงเงอร์(Schrödinger wave equation)ที่มีตัวแปรเป็นตำแหน่งและเวลาซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x,y,z,t)\right)\psi(x,y,z,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,y,z,t) \qquad (1)$$

เมื่อ ∇^2 และ V(x,y,z,t) เป็นตัวดำเนินการลาปลาเซียนและพลังงานศักย์ของอนุภาคตามลำดับ ข้อจำกัดของสมการชเรอดิงเงอร์ก็คือถ้าหากพลังงานศักย์ของอนุภาคมีรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนและขึ้นอยู่กับเวลาแล้วละก็ โอกาสที่จะแก้สมการหาผลเฉลยคือฟังก์ชันคลื่นนั้นแทบเป็นไปได้

ในกรณีพิเศษเมื่อพลังงานศักย์ไม่ขึ้นต่อเวลาอย่างชัดแจ้ง กล่าวคือ V=V(x,y,z) สมการชเรอดิงเงอร์(1) จะลดรูปไปสู่

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x,y,z)\right)\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z) \qquad (2)$$

และเรียกสมการนี้ว่า สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นต่อเวลา จากสมการ(2)จะเห็นว่าแม้ตัวแปร t ถูกกำจัดออกไปหนึ่งตัวแปร แต่ถ้าหากพลังงานศักย์มีรูปแบบที่ซับซ้อนเกินไปก็ใช่ว่าจะแก้สมการ(2)หาผลเฉลยฟังก์ชันคลื่นได้โดยง่าย สำหรับปัญหาของพลังงานศักย์ที่สามารถแก้ได้โดยง่ายโดยอาศัยสมการ(2)นั้นส่วนใหญ่มักเป็นปัญหาของอนุภาคที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของแรงใดแรงหนึ่งเพียงแรงเดียว อาทิ แรงฮาร์มอนิก แรงคงที่(เช่นแรงอันเนื่อง มาจากสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ) แรงแม่เหล็ก แรงไฟฟ้า(อันเนื่องมาจากประจุจุดหรือแรงคูลอมบ์) เป็นต้น แต่ถ้าพลังงานศักย์เกิดจากแรงสองแรงขึ้นไปเช่นอนุภาคที่อยู่ภายใต้แรงฮาร์มอนิก(ตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิก)และแรงคงที่ การหาฟังก์ชันคลื่นจากการแก้สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นต่อเวลาแทบเป็นไปไม่ได้ ในทางปฏิบัตินั้นกระทำได้เพียงหาฟังก์ชันคลื่นโดยประมาณต่อกรณีที่แรงคงที่นั้นมีค่าน้อยโดยอาศัยทฤษฎีการรบกวน(perturbation theory) หรือกรณีที่แรงคงที่มีค่ามากอาจหาฟังก์ชันคลื่นโดยประมาณด้วยวิธีเชิงตัวเลข(numerical method)

ในปี ค.ศ. 1948 ฟายน์แมน[2]ได้ใช้กลศาสตร์คลาสสิกในการอธิบายพฤติกรรมของอนุภาคโดยพิจารณาว่าอนุภาคที่มีขนาดเล็กเช่นอิเล็กตรอนประพฤติตัวเป็นอนุภาค เขาพบว่าถ้าเราติดตามพฤติกรรมของอนุภาคขนาดเล็กเราอาจใช้วิธีของชเรอดิงเงอร์เพื่อหาแอมปลิจูดของคลื่น(หรือฟังก์ชันคลื่น) ฟายน์แมนพบว่าแอมปลิจูดของคลื่นนั้นอาจคำนวณได้โดยถือว่าอนุภาคนั้นมีพฤติกรรมเป็นอนุภาค โดยการรวมแอมปลิจูดที่คล้องจองกับทุกเส้นทางที่เป็นไปได้ทั้งหมดของอนุภาคหรือที่เรียกว่าอินทิกรัลตามเส้นทาง(path integral) ผลจากจากการคำนวณดังกล่าวทำให้ได้ผลเป็นปริมาณอันหนึ่งที่มีชื่อว่าตัวแผ่กระจาย ตัวแผ่กระจายดังกล่าวสามารถนำไปสู่ปริมาณทางกายภาพต่างๆของอนุภาคได้เช่นเดียวกับวิธีของชเรอดิงเงอร์ อาทิ ฟังก์ชันคลื่นและพลังงานที่เป็นไปได้ เป็นต้น

ในงานวิจัยนี้จะใช้วิธีอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมนคำนวณหาตัวแผ่กระจายของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกภายใต้แรงคงที่ซึ่งเป็นข้อจำกัดของวิธีของชเรอดิงเงอร์ จากตัวแผ่กระจายที่ได้จะแสดงให้เห็นถึงวิธีการคำนวณหาระดับพลังงานที่เป็นไปได้ทั้งหมดทุกระดับ อย่างไรก็ตามสำหรับฟังก์ชันคลื่นจะแสดงการคำนวณถึงระดับสถานะตื่นตัวที่ 2 เท่านั้น(กล่าวคือ $n = 0, 1,$ และ 2)

อุปกรณ์และวิธีการ

ตัวแผ่กระจายและทฤษฎีอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมน

ในกลศาสตร์ควอนตัม ข้อมูลเชิงพลวัต(dynamical information)ของระบบกลศาสตร์ควอนตัมนั้นบรรจุอยู่ในฟังก์ชันคลื่น โดยที่ฟังก์ชันคลื่นเป็นฟังก์ชันที่กำหนดคุณลักษณะความเป็นคลื่นที่คล้องจองกับอนุภาค ในทางปฏิบัติเราสามารถคำนวณฟังก์ชันคลื่นได้จากการแก้สมการชเรอดิงเงอร์ ตามแนวคิดของชเรอดิงเงอร์นั้น[3]ปรากฏมีเวกเตอร์สถานะ(state vector) $|\psi(t)\rangle$ ซึ่งมีพัฒนาการตามเวลาดังสมการ

$$|\psi(t)\rangle = U(t,t')|\psi(t')\rangle \tag{3}$$

โดยที่ U (t,t')คือตัวดำเนินการพัฒนาการตามเวลา(time evolution operator) ถ้าหากตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียนของระบบมิได้เป็นฟังก์ชันของเวลาอย่างชัดแจ้งแล้วละก็ ตัวดำเนินการพัฒนาการตามเวลาจะอยู่ในรูป

$$U(t'',t') = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(t''-t')H\right\} \tag{4}$$

ในรูปของตัวแทนโครงแบบ(configuration representation) สมการ(3)กลับกลายเป็น

$$\langle\vec{x}''|\psi(t'')\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\langle\vec{x}''|U(t'',t')|\vec{x}'\rangle\langle\vec{x}'|\psi(t')\rangle d^3x' \,, \tag{5}$$

โดยที่เราได้อาศัยเงื่อนไขการทำให้เป็นปกติ(normalization condition)

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\vec{x}'\rangle\langle\vec{x}'|d^3x' = 1 \tag{6}$$

เราสามารถเขียนสมการ(5)ในรูป

$$\psi(\vec{x}'',t'') = \int_{-\infty}^{\infty}K(\vec{x}'',t'';x',t')\psi(\vec{x}',t')d^3x' \tag{7}$$

โดยที่

$$K(\vec{x}'',t'';\vec{x}',t') = \langle\vec{x}''|U(t'',t')|\vec{x}'\rangle \tag{8}$$

และเรียกพจน์ดังกล่าวว่า "ตัวแผ่กระจาย" หรือแอมปลิจูดของความน่าจะเป็นของอนุภาคในการเลื่อนตำแหน่งจาก $\vec{x}'$ ณ เวลา t' ไปยัง $\vec{x}''$ ณ เวลา t'' ตามความคิดของฟายน์แมนนั้นมีเส้นทางจำนวนนับไม่ถ้วนระหว่างจุดคู่ดังกล่าวที่อนุภาคสามารถเคลื่อนที่ได้ แอมปลิจูดความน่าจะเป็นรวมทั้งหมดเกิดจากการรวมแอมปลิจูดของความน่าจะเป็นย่อยสอดคล้องกับของแต่ละเส้นทาง กล่าวคือ

$$K(\vec{x}'',t'';\vec{x}',t') = \sum_{\substack{\text{over all paths}\\ \text{from } \vec{x}' \text{ to } \vec{x}''}} \Phi[\vec{x}(t)] \tag{9}$$

การมีส่วนร่วมของแต่ละเส้นทางนั้นมีเฟสที่เป็นปฏิภาคโดยตรงกับแอคชัน(action) กล่าวคือ

$$\Phi[\vec{x}(t)] = \text{const.}e^{\frac{i}{\hbar}S[\vec{x}(t)]} \tag{10}$$

โดยที่แอคชัน $S = \int_{t'}^{t''} L(\vec{x},\dot{\vec{x}})dt$ และลากรางเกียน (Lagrangian) $L(\vec{x},\dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x})$ โดยอาศัยพื้นฐานเชิงรูปหลายเหลี่ยม (polygonal basis) ของทฤษฎีการอินทิเกรต ตัวแผ่กระจายในสมการ(9)อาจเขียนอยู่ในรูป

$$K(\vec{x}'',t'';\vec{x}',t') = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left(\frac{2\pi\hbar i\varepsilon}{m}\right)^{-3N/2} \int\int\ldots\int \exp\{\tfrac{i}{\hbar}\sum_{i=1}^{N}\left[\tfrac{m}{2\varepsilon}(\vec{x}_i-\vec{x}_{i-1})^2\right.$$
$$\left. -\varepsilon V(\vec{x}_i)\right]\}\, d^3x_1 d^3x_2 \ldots d^3x_{N-1} \qquad (11)$$

ฟายน์แมนเขียนผลรวมการมีส่วนร่วมของทุกเส้นทางดังกล่าวในรูปที่กระทัดรัดกว่าดังนี้

$$K(\vec{x}'',t'';\vec{x}',t') = \int_{\vec{x}'}^{\vec{x}''} e^{\frac{i}{\hbar}S[\vec{x}'',\vec{x}']} D[\vec{x}(t)] \qquad (12)$$

ซึ่งเขาเรียกนิพจน์ดังกล่าวว่า "อินทิกรัลตามเส้นทาง" นอกจากนั้นถ้าหากสเปกตรัมพลังงานของอนุภาคมีค่าไม่ต่อเนื่อง ตัวแผ่กระจายของสมการ(11)สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$K(\vec{x}'',t'';\vec{x}',t') = \sum_n \psi_n(\vec{x}'')\psi_n^*(\vec{x}')e^{-\frac{iE_n}{\hbar}(t''-t')} \qquad (13)$$

และต่อกรณีที่สเปกตรัมของอนุภาคมีค่าต่อเนื่อง สมการ(13)กลับกลายเป็น

$$K(\vec{x}'',t'';\vec{x}',t') = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(\vec{x}'')\psi_k^*(\vec{x}')e^{-\frac{iE(k)}{\hbar}(t''-t')} d^3k\ . \qquad (14)$$

จากสมการ(13)และ(14) เราจะเห็นได้ว่าตัวแผ่กระจายนั้นบรรจุข้อมูลเกี่ยวกับสถานะไอเกนและระดับพลังงานที่เป็นไปได้พร้อมๆกัน ยิ่งไปกว่านั้นสำหรับอนุภาคใดๆที่ลากรางเกียนมีสมบัติกำลังสอง (quadratic) ทั้งตำแหน่งและความเร็ว ตัวแผ่กระจายจะมีรูปแบบ $Fe^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}}$ โดยที่ F คือตัวประกอบข้างหน้าหรือตัวประกอบที่ทำให้เป็นปกติ (pre-factor or normalizing factor) และ S_{cl} คือแอคชันแบบฉบับ ซึ่งก็คืออินทิกรัลของลากรางเกียนตามเส้นทางแบบฉบับ สำหรับตัวประกอบข้างหน้านั้นสามารถคำนวณได้โดยอาศัยสูตร[4,5]

$$F(t'',t') = \det\left[\frac{i}{2\pi\hbar}\frac{\partial^2}{\partial\vec{x}'\partial\vec{x}''}S_{cl}(\vec{x}'',\vec{x}')\right]^{1/2} \qquad (15)$$

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

ตัวแผ่กระจาย ตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกภายใต้แรงคงที่มีลากรางเกียนในรูปแบบดังนี้

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + fx \qquad (16)$$

อาจกล่าวได้ว่าระบบดังกล่าวอยู่ภายใต้แรง 2 แรงคือแรงยืดหยุ่นหรือดึงกลับของสปริงซึ่งเป็นปฏิภาคโดยตรงกับการกระจัด x และแรงคงที่ f อย่างไรก็ตามเนื่องจากลากรางเกียนของอนุภาคยังมีสมบัติกำลังสอง(quadratic) กล่าวคือตัวแปร x และ $\dot{x}$ มีกำลังไม่เกิน 2 จึงสามารถหาตัวแผ่กระจายได้โดยอาศัยสูตร

$$K(x_b,x_a,T)=K(b,a)=Fe^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}}$$
$$=\det\left[\frac{i}{2\pi\hbar}\frac{\partial^2}{\partial x_a\partial x_b}S_{cl}(x_b,x_a)\right]^{1/2}e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}} \tag{17}$$

โดยที่ $T=t_b-t_a$ สำหรับแอคชันแบบฉบับ S_{cl} สามารถหาได้ด้วยการหาเส้นทางแบบฉบับโดยอาศัยสมการการเคลื่อนที่หรือสมการลากรางจ์(Lagrange equation) :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \tag{18}$$

เมื่อแทน(16)ลงใน(18) ได้ผลสมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคดังนี้

$$\ddot{x}+\omega^2x=\frac{f}{m} \tag{19}$$

หลังจากแก้สมการการเคลื่อนที่(19)ภายใต้เงื่อนไข $X(t_a)=X_a$ และ $X(t_b)=X_b$ เราได้เส้นทางแบบฉบับดังนี้

$$x_{cl}(t)=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t+\frac{f}{m\omega^2} \tag{20}$$

โดยที่

$$\left.\begin{aligned}C_1&=-\tfrac{1}{\sin\omega T}\left(x_b\sin\omega t_a-x_a\sin\omega t_b-\tfrac{f}{m\omega^2}(\sin\omega t_a-\sin\omega t_b)\right)\\C_2&=-\tfrac{1}{\sin\omega T}\left(x_b\cos\omega t_a-x_a\cos\omega t_b+\tfrac{f}{m\omega^2}(\cos\omega t_a-\cos\omega t_b)\right)\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

เมื่อ $T=t_b-t_a$ โดยอาศัยเส้นทางแบบฉบับตามสมการ(20) เมื่อแทนลงในสมการ

$$S_{cl}=\int_{t_a}^{t_b}L(x_{cl},\dot{x}_{cl})dt \tag{22}$$

ได้ผล

$$S_{cl}=\frac{m\omega}{2\sin\omega T}\Big[(x_b^2+x_a^2)\cos\omega T-2x_ax_b+\tfrac{2f}{m\omega^2}(x_a+x_b)(1-\cos\omega T)$$
$$-\tfrac{2f^2}{m^2\omega^4}(1-\cos\omega T)+\tfrac{f^2T\sin\omega T}{m^2\omega^3}\Big] \tag{23}$$

หลังจากอาศัยสมการ(23)และ(15)เราได้ตัวแผ่กระจายของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกภายใต้แรงคงที่ดังนี้

$$K(b,a)=\left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}\right)^{1/2}\exp\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega T}\Big[(x_b^2+x_a^2)\cos\omega T-2x_ax_b$$
$$+\tfrac{2f}{m\omega^2}(x_a+x_b)(1-\cos\omega T)$$
$$-\tfrac{2f^2}{m^2\omega^4}(1-\cos\omega T)-\tfrac{f^2T\sin\omega T}{m^2\omega^3}\Big] \tag{24}$$

ระดับพลังงานที่เป็นไปได้และฟังก์ชันคลื่น ในการหาพลังงานที่เป็นไปได้และฟังก์ชันคลื่นของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกภายใต้แรงคงที่นั้นเราจะต้องกระจายทางด้านขวาของสมการ(24)ออกเป็นอนุกรมตามแบบสมการ(13) กล่าวคือ

$$K(b,a)=\psi_0(x_b)\psi_0^*(x_a)e^{-iE_0T/\hbar}+\psi_1(x_b)\psi_1^*(x_a)e^{-iE_1T/\hbar}+\psi_2(x_b)\psi_2^*(x_a)e^{-iE_2T/\hbar}+\ldots \quad (25)$$

โดยอาศัยความสัมพันธ์[6]

$$\sin\omega T=\frac{e^{i\omega T}-e^{-i\omega T}}{2i}=\frac{e^{i\omega T}(1-e^{-2i\omega T})}{2i} \quad (26)$$

$$\frac{1}{(1-e^{-i\omega T})}=1+e^{-i\omega T}+e^{-2i\omega T}+\ldots \quad (27)$$

$$\frac{1}{(1-e^{-i\omega T})^{1/2}}=1+\tfrac{1}{2}e^{-i\omega T}+\tfrac{1.3}{2.4}e^{-2i\omega T}+\ldots \quad (28)$$

และ

$$e^{\theta}=1+\theta+\tfrac{1}{2!}\theta^2+\ldots \quad (29)$$

ส่งผลให้สมการ(24)กลับกลายเป็น

$$\begin{aligned}K(b,a)&=\left(\tfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}e^{\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_b^2+x_a^2)+\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)-\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\right]}e^{-i(\frac{\omega}{2}-\frac{f^2}{2m\hbar\omega^2})T}\\&+\left(\tfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}e^{\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_b^2+x_a^2)+\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)-\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\right]}e^{-i(\frac{3\omega}{2}-\frac{f^2}{2m\hbar\omega^2})T}\left(\tfrac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)\left(\tfrac{m\omega^2}{f}x_b-1\right)\left(\tfrac{m\omega^2}{f}x_a-1\right),\\&+\left(\tfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}e^{\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_b^2+x_a^2)+\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)-\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\right]}e^{-i(\frac{5\omega}{2}-\frac{f^2}{2m\hbar\omega^2})T}\times\\&\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2m\omega}{\hbar}x_b^2-\tfrac{4f}{\omega\hbar}x_b+\tfrac{2f^2}{m\omega^3\hbar}-1\right)\left(\tfrac{2m\omega}{\hbar}x_a^2-\tfrac{4f}{\omega\hbar}x_a+\tfrac{2f^2}{m\omega^3\hbar}-1\right)+\ldots\end{aligned} \quad (30)$$

เมื่อนำสมการ(30)เปรียบเทียบกับสมการ(25) เราได้ระดับพลังงานที่เป็นไปได้ดังนี้

$$E_0=\tfrac{1}{2}\hbar\omega-\tfrac{f^2}{2m\omega^2}$$

$$E_1=\tfrac{3}{2}\hbar\omega-\tfrac{f^2}{2m\omega^2}$$

$$E_2=\tfrac{5}{2}\hbar\omega-\tfrac{f^2}{2m\omega^2}$$

หรือ

$$E_n=(n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega-\tfrac{f^2}{2m\omega^2},\ n=1,2,3,\ldots \quad (31)$$

ในขณะเดียวกันเราได้ผลคูณของฟังก์ชันคลื่นในสถานะ n =0, 1, 2 ตามลำดับดังนี้

$$\psi_0(x_b)\psi_0^*(x_a) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_b^2+x_a^2)+\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)-\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\right]}$$

$$\psi_1(x_b)\psi_1^*(x_a) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_b^2+x_a^2)+\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)-\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\right]}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)\left(\frac{m\omega^2}{f}x_b-1\right)\left(\frac{m\omega^2}{f}x_a-1\right)$$

$$\psi_2(x_b)\psi_2^*(x_a) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_b^2+x_a^2)+\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)-\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\right]}\times$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x_b^2-\frac{4f}{\omega\hbar}x_b+\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}-1\right)\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x_a^2-\frac{4f}{\omega\hbar}x_a+\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}-1\right)$$

หรือ

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x+\frac{f}{\omega\hbar}x-\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\right]} \tag{32}$$

$$\psi_1(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x+\frac{f}{\omega\hbar}x-\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\right]}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^{1/2}\left(\frac{m\omega^2}{f}x-1\right)$$
$$= \left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^{1/2}\left(\frac{m\omega^2}{f}x-1\right)\psi_0(x) \tag{33}$$

$$\psi_2(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x+\frac{f}{\omega\hbar}x-\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\right]}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2-\frac{4f}{\omega\hbar}x+\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}-1\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2-\frac{4f}{\omega\hbar}x+\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}-1\right)\psi_0(x) \tag{34}$$

ต่อกรณีที่ต้องการหาฟังก์ชันคลื่นในสถานะ n ใดๆ ก็สามารถทำได้ด้วยการกระจายทางด้านขวาของสมการ(24) จนถึงเทอมที่มี $e^{-i(n+1/2)\omega T}$ เป็นตัวประกอบซึ่งในทางปฏิบัติอาจมีความยุ่งยากเป็นอย่างยิ่ง ในที่นี้ผู้วิจัยจึงจำกัดการกระจายเพียงเทอม n=2 เท่านั้น จากสมการ(32), (33) และ(34) เราสามารถพิสูจน์ได้ว่าถ้าหากแรงภายนอกมีค่าเป็นศูนย์ ฟังก์ชันคลื่นดังกล่าวจะลดรูปไปสู่ฟังก์ชันคลื่นของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิก

สรุปผลการวิจัย

จากตัวแผ่กระจายของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกภายใต้แรงคงที่ เราสามารถนำมาคำนวณหาระดับพลังงานได้ทุกระดับชั้น และโดยหลักการเราสามารถกระจายตัวแผ่กระจายดังกล่าวออกเป็นอนุกรมเพื่อคำนวณหาฟังก์ชันคลื่นได้ทุกสถานะระดับพลังงานได้เช่นกัน ทว่ายิ่งระดับพลังงานสูงขึ้นเท่าใด ความยุ่งยากในการคำนวณยิ่งเพิ่มมากขึ้นเท่านั้น ในงานวิจัยนี้เราได้แสดงให้เห็นถึงศักยภาพของทฤษฎีอินทิกรัลตามเส้นทางในการคำนวณระดับพลังงานและฟังก์ชันคลื่นต่อกรณีที่วิธีการคำนวณของชเรอดิงเงอร์มีข้อจำกัด อย่างไรก็ตามในที่นี้เราได้แสดงให้เห็นถึงการคำนวณฟังก์ชันคลื่นสถานะพื้นถึงสถานะตื่นตัวที่ 2 เท่านั้น

เอกสารอ้างอิง

[1] วิรุฬห์ สายคณิต. (2525). **ทฤษฎีควอนตัม**. สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

[2] Feynman, R.P. and Hibbs, A.R. (1965). **Quantum Mechanics and Path Integrals.** McGraw-Hill. New York.

[3] Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. (1965). **Table of Integrals, Series and Products.** 4^{th} ed. Acadamic Press. New York.

[4] Messiah, A. (1961). **Quantum Mechanics I** . Wiley. New York.

[5] Pauli, W. (1952). **Ausgewalte Kapitel de Feldquantiserung (Lecture note)**. Zurich : ETH. 139.

[6] van Vleck, J.H. (1978). Proc. **Natn. Acad. Sci.**.,14(178).