อินทิกรัลตามเส้นทางสำหรับฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่

พรศิริ ทองแก้ว

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

มหาวิทยาลัยทักษิณ

2552

ใบรับรองวิทยานิพนธ์

ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์

มหาวิทยาลัยทักษิณ

ชื่อวิทยานิพนธ์ : อินทิกรัลตามเส้นทางสำหรับฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่

ชื่อ - ชื่อสกุลผู้ทำวิทยานิพนธ์ : นางสาวพรศิริ ทองแก้ว

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

(...)

(รองศาสตราจารย์ ดร.นิคม ชูศิริ)

ประธานที่ปรึกษา

(...)

(อาจารย์ ดร.ประสงค์ เกษราธิคุณ)

กรรมการที่ปรึกษา

คณะกรรมการสอบปากเปล่าวิทยานิพนธ์

(...)

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จอมภพ แววศักดิ์)

ประธานกรรมการ

(...)

(อาจารย์ ดร. ภราดร ภักดีวานิช)

กรรมการ

(...)

(รองศาสตราจารย์ ดร.นิคม ชูศิริ)

กรรมการ

(...)

(อาจารย์ ดร.ประสงค์ เกษราธิคุณ)

กรรมการ

มหาวิทยาลัยทักษิณอนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์ ของมหาวิทยาลัยทักษิณ

(...)

(รองศาสตราจารย์ประดิษฐ์ มีสุข)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่...28...เดือน...ตุลาคม... พ.ศ. ..2552....

บทคัดย่อ

ชื่อวิทยานิพนธ์ อินทิกรัลตามเส้นทางสำหรับฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่
ชื่อ - ชื่อสกุลผู้ทำวิทยานิพนธ์ : นางสาวพรศิริ ทองแก้ว
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ : รองศาสตราจารย์ ดร.นิคม ชูศิริ
อาจารย์ ดร. ประสงค์ เกษราธิคุณ
ปริญญาและสาขาวิชา : ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
ปีการศึกษาที่สำเร็จ : 2552

ในงานวิจัยนี้ได้ใช้ทฤษฎีอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมนกับระบบควอนตัมของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่ f โดยที่ลากรางเกียนของระบบดังกล่าวเขียนอยู่ในรูป $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} + fx$ พบว่าตัวแผ่กระจายสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบเชิงวิเคราะห์ดังนี้

$$K(b,a) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin\omega \mathrm{T}}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega\mathrm{T}}\Big[(x_b^2 + x_a^2)\cos\omega\mathrm{T} - 2x_a x_b$$

$$+\frac{2f}{m}(x_b + x_a)(1-\cos\omega\mathrm{T}) - \frac{2f^2}{m^2\omega^4}(1-\cos\omega\mathrm{T}) + \frac{f^2\mathrm{T}\sin\omega\mathrm{T}}{m^2\omega^3}\Big]$$

โดยที่ $T = t_b - t_a$

จากตัวแผ่กระจายที่ได้สามารถนำมาคำนวณหาระดับพลังงานที่เป็นไปได้และฟังก์ชันคลื่น โดยที่ระดับพลังงานที่เป็นไปได้คือ

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{f^2}{2m\omega^2} \qquad n = 0,1,2,3,.....$$

อย่างไรก็ตามในที่นี้ได้แสดงให้เห็นฟังชันคลื่นถึงระดับตื่นตัวที่สามเท่านั้น คือ

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + \frac{f}{\omega\hbar}x - \frac{f^2}{2m\omega^3\hbar}\right]$$

$$\psi_1(x) = \left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m\omega^2}{f}x - 1\right)\psi_0(x)$$

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - \frac{4f}{\omega\hbar}x + \frac{2f^2}{m\omega^3\hbar} - 1\right)\psi_0(x)$$

และ

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{3f^2}{m\omega^3\hbar}}\left(\frac{2}{3}\frac{m^2\omega^3}{\hbar f}x^3 - \frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - \frac{m\omega^2}{f}x + \frac{2f}{\omega\hbar}x - \frac{2}{3}\frac{f^2}{m\omega^2\hbar} + 1\right)\psi_0(x)$$

เมื่อปราศจากแรงคงที่ f ระบบที่เราสนใจจะคล้องจองกับกรณี $f \to 0$ ฟังก์ชันคลื่นข้างต้นจะลดรูปเข้าสู่ฟังก์ชันคลื่นของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์

Abstract

Thesis Title : Path Integral for an Harmonic Oscillator in the Presence of Constant Force

Student's Name : Pornsiri Thongkeaw

Advisory Committee : Assoc.Prof. Dr. Nikom Choosiri

Dr. Prasong Kessaratikoon

Degree and Program: Master of Science in Physics

Academic Year: 2009

In this paper we apply Feynman path integral method to quantum mechanical system of an harmonic oscillator in the presence of constant force f where the Lagrangian is in the form $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} + fx$. We find that the propagator can be written in an analytical form,

$$K(b,a) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega\mathrm{T}}\Big[(x_b^2 + x_a^2)\cos\omega\mathrm{T} - 2x_a x_b$$

$$+\frac{2f}{m}(x_b + x_a)(1-\cos\omega\mathrm{T}) - \frac{2f^2}{m^2\omega^4}(1-\cos\omega\mathrm{T}) + \frac{f^2\mathrm{T}\sin\omega\mathrm{T}}{m^2\omega^3}\Big],$$

where $T = t_b - t_a$. From the propagator, the possible energy levels and the wave functions are derived. We obtain the energy level :

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{f^2}{2m\omega^2} \qquad n = 0,1,2,3,..... \quad .$$

However, for the wave functions we display them only in the case of ground state up to the third exited states. We find that

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + \frac{f}{\omega\hbar}x - \frac{f^2}{2m\omega^3\hbar}\right],$$

$$\psi_1(x) = \left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m\omega^2}{f}x - 1\right)\psi_0(x),$$

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - \frac{4f}{\omega\hbar}x + \frac{2f^2}{m\omega^3\hbar} - 1\right)\psi_0(x),$$

and

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{3f^2}{m\omega^3\hbar}}\left(\frac{2}{3}\frac{m^2\omega^3}{\hbar f}x^3 - \frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - \frac{m\omega^2}{f}x + \frac{2f}{\omega\hbar}x - \frac{2}{3}\frac{f^2}{m\omega^2\hbar} + 1\right)\psi_0(x).$$

When the constant force f approaches zero, the system of interest corresponds to the case $f \to 0$ the wave functions reduce to the wave functions of an harmonic oscillator.

ประกาศคุณูปการ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณา ช่วยเหลือ แนะนำและให้คำปรึกษาอย่างดียิ่งจาก รองศาสตราจารย์ ดร.นิคม ชูศิริ ประธานที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ กรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ อาจารย์ ดร.ประสงค์ เกษราธิคุณ กรรมการสอบปากเปล่าวิทยานิพนธ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.จอมภพ แววศักดิ์ และอาจารย์ ดร. ภราดร ภักดีวานิช ที่ได้กรุณาถ่ายทอดความรู้ แนวคิด วิธีการ คำแนะนำ และตรวจสอบแก้ไข ข้อบกพร่องต่าง ๆ ด้วยความเอาใจใส่ยิ่ง ผู้วิจัยกราบขอบคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบคุณพี่ ๆ เพื่อน ๆ และน้อง ๆ นิสิตสาขาวิชาฟิสิกส์ทุกท่านที่ได้ให้คำแนะนำและส่งเสริมกำลังใจตลอดมา

ขอขอบคุณนายประเสริฐ ทองแก้ว นางสมศรี ทองแก้ว และครอบครัวของนายเทอดพงศ์ พรหมพิชัย และญาติพี่น้องทุกท่านที่คอยช่วยเหลือสนับสนุนทั้งด้านกำลังใจและกำลังทรัพย์ด้วยดีตลอดมา นอกจากนี้ยังมีผู้ที่ให้ความร่วมมือช่วยเหลืออีกหลายท่าน ซึ่งผู้วิจัยไม่สามารถกล่าวนามในที่นี้ได้หมด จึงขอขอบคุณทุกท่านเหล่านั้นไว้ ณ โอกาสนี้ด้วย

คุณค่าทั้งหลายที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบเป็นกตัญญูกตเวทีแด่บิดามารดา และบูรพาจารย์ที่เคยอบรมสั่งสอน รวมทั้งผู้มีพระคุณทุกท่าน

พรศิริ ทองแก้ว

15 กันยายน 2552

สารบัญ

บทที่ หน้า

1 บทนำ ...1

ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย...1

วัตถุประสงค์ของการวิจัย ...5

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ ...5

ขอบเขตของการวิจัย ...5

2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ...6

ทฤษฎีอินทิกรัลตามเส้นทางเบื้องต้น ...6

ฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของอนุภาค ...12

ฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้น...15

ฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของฮาร์มอนิกออสซิลเตอร์เชิงเส้น...20

3 วิธีดำเนินการวิจัย...25

เส้นทางแบบฉบับของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่ ...25

แอคชันแบบฉบับของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่ ...37

ตัวแผ่กระจายของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่...40

4. ผลการวิจัย...40

อินทิกรัลตามเส้นทางสำหรับฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่...40

ตัวแผ่กระจายสำหรับฮาร์มอนิกออสซิลเตอร์ภายใต้แรงคงที่...40

ระดับพลังงานที่เป็นไปได้และฟังก์ชันคลื่นของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์
ภายใต้แรงคงที่...40

5. สรุปและอภิปรายผล...68

บรรณานุกรม...70

ภาคผนวก...73

ประวัติย่อผู้วิจัย...74

สารบัญภาพประกอบ

ภาพที่		หน้า
2.1	แสดงเส้นทางที่เป็นไปได้กับเส้นทางแบบฉบับ	7
2.2	แสดงเส้นทางเดินของอนุภาคจากจุด x_a ไปยังจุด x_b โดยแบ่งออกเป็นเส้นทางย่อย	9
2.3	แสดงเส้นทางแบบฉบับ $\bar{x}(t)$ และส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากเส้นทางแบบฉบับ $y(t)$	10

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

จากการศึกษาทฤษฎีควอนตัมแบบเก่าและการศึกษาทฤษฎีควอนตัมแบบใหม่พบว่า ทฤษฎีควอนตัมแบบเก่าแม้จะไม่สามารถแก้ข้อขัดแย้งได้ทั้งหมดแต่ทฤษฎีควอนตัมแบบเก่าก็ใช้อธิบายปรากฏการณ์ต่าง ๆ ได้ดีพอสมควร วิธีการสำคัญที่ใช้ในการคำนวณเพื่อหาปริมาณต่าง ๆ ของทฤษฎีควอนตัมแบบเก่า คือ หลักการคล้องจองของบอร์ หลักการนี้นอกจากจะใช้สำหรับคำนวณหาปริมาณต่าง ๆ ทางฟิสิกส์แล้วยังอาจใช้เป็นหลักชี้นำอีกด้วย จะเห็นได้ว่านักฟิสิกส์ส่วนใหญ่ที่อยู่ภายใต้การนำของบอร์ได้อาศัยหลักการนี้ช่วยในการคำนวณสิ่งที่เขาพบก็คือ ปรากฏการณ์ต่าง ๆ ที่ไม่สามารถอธิบายได้ด้วยทฤษฎีควอนตัมแบบเก่าได้และถูกขจัดไปจนเกือบหมดสิ้น จนมาพบทฤษฎีควอนตัมที่แท้จริงและผลการคำนวณที่ได้จากการใช้หลักการคล้องจองก็ไม่ผิดกับผลการคำนวณที่ได้จากทฤษฎีควอนตัมแบบใหม่เท่าไรนัก อย่างไรก็ตามวิธีการที่กลุ่มนักฟิสิกส์ โดยการนำของบอร์นั้นเป็นวิธีการเดามากกว่าที่จะเป็นวิธีการที่มีหลักเกณฑ์ตามแบบฉบับของวิทยาศาสตร์

ดังนั้นจึงมีนักวิทยาศาสตร์เป็นจำนวนมากพยายามที่จะแก้ข้อบกพร่องนี้ ผู้ที่ประสบความสำเร็จเป็นคนแรกคือ ไฮเซนเบอร์ก เป็นนักวิทยาศาสตร์ชาวเยอรมัน ในปี ค.ศ. 1925 วิธีการของไฮเซนเบอร์กนอกจากใช้หลักการคล้องจองด้วยแล้ว ยังได้อาศัยคณิตศาสตร์แบบใหม่ที่เรียกว่าเมทริกซ์ (matrix) เข้าช่วยในการพิจารณาปัญหา ทำให้เกิดวิชากลศาสตร์ควอนตัมแบบใหม่ที่เรียกว่า กลศาสตร์เมทริกซ์ (matrix mechanics) กลศาสตร์ควอนตัมแบบใหม่ของไฮเซนเบอร์กนี้ เมื่อนำไปแก้ปัญหาต่าง ๆ ทางฟิสิกส์แล้วพบว่าให้ผลดีเกินคาด ปัญหาต่าง ๆ ที่เคยตกค้างมาจากทฤษฎีควอนตัมแบบเก่าได้ถูกขจัดจนหมดสิ้น

เนื่องจากควอนตัมแบบใหม่นี้ใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ที่นักฟิสิกส์ส่วนใหญ่ไม่คุ้นเคย ดังนั้นจึงยากที่จะเข้าใจความหมายที่แท้จริงของทฤษฎีนี้ อย่างไรก็ตามปัญหานี้ก็ได้คลี่คลายลงหลังจากที่ได้มีผู้ค้นพบกลศาสตร์ควอนตัมอีกรูปหนึ่งซึ่งเรียกว่า กลศาสตร์เชิงคลื่น (wave mechanics)

ขณะที่บอร์กับกลุ่มนักวิทยาศาสตร์ของเขากำลังพัฒนาหลักการคล้องจองเพื่อแก้ปัญหาทางฟิสิกส์อยู่นั้น ในประเทศฝรั่งเศสได้มีนักวิทยาศาสตร์ชื่อ เดอบรอยล์(de Broglie)กำลังสนใจปัญหาเกี่ยวกับธรรมชาติของแสงที่สามารถเป็นได้ทั้งคลื่นและอนุภาค เดอบรอยล์สังเกตว่า การที่แสงเป็นได้ทั้งคลื่นและอนุภาคกับปัญหาเกี่ยวกับเงื่อนไขควอนตัมของบอร์นั้น มีความสัมพันธ์กันอย่างแยกไม่ออก อาศัยความจริงข้อนี้ เดอบรอยล์คิดว่าความสัมพันธ์นี้น่าจะเกิดขึ้นกับสสารได้ เช่น อิเล็กตรอนซึ่ง ถ้าความคิดนี้เป็นจริง อิเล็กตรอนซึ่งเป็นอนุภาคก็อาจมีโอกาสเป็นคลื่นได้ จากความคิดดังกล่าวเดอบรอยล์จึงเสนอว่าการที่สสารมีสถานะไม่ต่อเนื่องนั้นจะต้องเนื่องมาจากสสารประพฤติตัวเป็นคลื่น จึงทำให้เกิดการแทรกสอดขึ้น ลักษณะเช่นนี้คล้ายกับการแทรกสอดที่เกิดขึ้นกับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า เดอบรอยล์ได้เสนอความคิดนี้ในปี ค.ศ. 1923 (Tipler;1992) ในระยะแรกนักวิทยาศาสตร์ไม่ค่อยสนใจความคิดนี้เท่าใด แต่หลังจากนั้นเพียงเล็กน้อย ในปี ค.ศ. 1925 ที่ประเทศสวิสเซอร์แลนด์มีนักวิทยาศาสตร์ ชื่อชเรอดิงเงอร์ (Schrödinger) ได้นำเอาความคิดของเดอบรอยล์ไปเขียนเป็นสมการของคลื่น ในตอนแรกชเรอดิงเงอร์เขียนสมการคลื่นสำหรับใช้กับอิเล็กตรอน แต่ต่อมาก็ได้นำทฤษฎีของเขาไปประยุกต์กับปัญหาอื่น ๆ ปรากฏว่าได้ผลตรงกับการทดลองเป็นอย่างดี เช่น ปัญหาของอิเล็กตรอนซึ่งชเรอดิงเงอร์ได้นำทฤษฎีของเขาไปคำนวณหาระดับพลังงานของอะตอมไฮโดรเจนปรากฏว่าสามารถอธิบายสูตรของบาลเมอร์ได้ สำหรับความความคิดของเดอบรอยล์ที่ว่าอิเล็กตรอนประพฤติตัวเป็นคลื่นได้

หลักการของชเรอดิงเงอร์คือ อนุภาคที่มีขนาดเล็กในระดับอะตอมหรือเล็กกว่าจะมีพฤติกรรมแบบคลื่นสสาร ตำแหน่งและโมเมนตัมของอนุภาคจึงไม่อาจทำนายได้แน่นอน แต่จะสอดคล้องหลักความไม่แน่นอนของไฮเซนเบอร์ก ดังนั้นเราจึงไม่กล่าวถึงเส้นทางเดินของอนุภาคเลย ปริมาณต่างๆ ที่สังสรรค์อยู่กับอนุภาคสามารถสืบสาวได้จากฟังก์ชันคลื่น (wave function) สมนัยกับอนุภาคนั้น โดยฟังก์ชันคลื่นที่กล่าวถึงนี้จะต้องสอดคล้องกับสมการชเรอดิงเงอร์ที่มีตัวแปรเป็นตำแหน่งและเวลา x, y, z และ t ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x,y,z,t)\right)\psi(x,y,z,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,y,z,t) \qquad (1.1)$$

เมื่อ ∇^2 และ $V(x,y,z,t)$ เป็นตัวดำเนินการลาปลาเซียน และพลังงานศักย์ของอนุภาคตามลำดับ ข้อจำกัดของสมการชเรอดิงเงอร์ก็คือ หากพลังงานศักย์ของระบบมีรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ซับซ้อนและขึ้นต่อเวลาอย่างชัดแจ้งแล้วละก็ โอกาสที่จะแก้สมการหาคำตอบของฟังก์ชันคลื่นออกมาโดยวิธีวิเคราะห์(Analytical Method)นั้นแทบจะเป็นไปไม่ได้เลย

ในกรณีพิเศษ เมื่อพลังงานศักย์ของระบบไม่ขึ้นต่อเวลาอย่างชัดแจ้ง กล่าวคือ $V = V(x, y, z)$ สมการชเรอดิงเงอร์ (1.1) จะลดรูปไปสู่

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x, y, z)\right)\psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z) \tag{1.2}$$

และเรียกสมการ (1.2) นี้ว่า สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นต่อเวลา จากสมการ (1.2) จะเห็นว่าแม้ตัวแปร t จะถูกกำจัดออกไปหนึ่งตัวแปรแล้ว หากพลังงานศักย์มีรูปแบบที่ซับซ้อนก็ใช่ว่าจะสามารถแก้สมการหาคำตอบฟังก์ชันคลื่นได้โดยง่าย

ต่อมาได้มีนักวิทยาศาสตร์ชาวอเมริกัน ชื่อเดวิสัน (Davison) กับ เจอเมอร์ (Germer) ได้ทำการทดลองแล้วพิสูจน์ว่าอิเล็กตรอนสามารถประพฤติตัวเป็นคลื่นได้จริง(Krane;1998)ด้วยเหตุนี้ กลศาสตร์แบบใหม่นี้จึงเรียกว่า กลศาสตร์เชิงคลื่น

กลศาสตร์ควอนตัมทั้งสองแบบที่กล่าวมาแล้วคือ กลศาสตร์ของไฮเซนเบอร์กซึ่งอาศัยหลักการคล้องจอง และกลศาสตร์เชิงคลื่นของชเรอดิงเงอร์ ซึ่งอาศัยความคิดของเดอบรอยล์เกี่ยวกับธรรมชาติของอนุภาค เมื่อพิจารณาอย่างผิวเผินจะพบว่าทฤษฎีควอนตัมทั้งสองแบบมีความแตกต่างกันมาก อย่างไรก็ตามถึงแม้ว่าทฤษฎีทั้งสองจะมีความแตกต่างกันอย่างมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งเกี่ยวกับการให้ความหมายแก่ปริมาณต่าง ๆ แต่เมื่อนำทฤษฎีทั้งสองมาคำนวณหาค่าของปริมาณต่าง ๆ ทางฟิสิกส์ ปรากฏว่าให้ผลตรงกันเกือบทุกกรณี การที่ทฤษฎีทั้งสองให้ผลตรงกันเสมอนั้นเป็นการพิสูจน์ว่าทฤษฎีทั้งสองเป็นทฤษฎีเดียวกัน และการที่เราเห็นว่ามันแตกต่างกันนั้นเป็นเพราะคณิตศาสตร์ที่ใช้มีความแตกต่างกันเท่านั้น

กลศาสตร์ทั้งสองแบบที่กล่าวมาแล้วข้างต้นแม้จะให้ผลตรงกับการทดลองเป็นอย่างดีแต่คณิตศาสตร์ที่ใช้ในการคำนวณหาปริมาณต่าง ๆ ในทางฟิสิกส์นั้นมีลักษณะที่แตกต่างจากคณิตศาสตร์ที่ใช้ในกลศาสตร์แบบฉบับอย่างสิ้นเชิง เช่น ปริมาณต่าง ๆ ในทางฟิสิกส์แบบฉบับถูกแทนด้วยตัวดำเนินการ (operator) แทนที่จะเป็นปริมาณที่มีค่าเป็นตัวเลขธรรมดา ดังนั้น จึงไม่สามารถนำเอาความรู้จากทฤษฎีแบบฉบับมาใช้คำนวณหาปริมาณควอนตัมแบบใหม่ได้เนื่องจากทฤษฎีแบบฉบับได้รับการพัฒนาการมาเป็นระยะเวลานาน และปริมาณต่าง ๆ มีความหมายที่แน่นอน จึงน่าจะนำเอาสิ่งเหล่านี้มาใช้ให้เป็นประโยชน์ ดังนั้นมีนักฟิสิกส์จำนวนไม่น้อยที่ได้พยายามจะคิดค้นกลศาสตร์ควอนตัมแบบใหม่โดยอาศัยคณิตศาสตร์ที่มีพร้อมอยู่แล้วในกลศาสตร์แบบฉบับ วิธีการเช่นนี้อาจถือได้ว่าเป็นความพยายามที่จะละทิ้งการใช้ตัวดำเนินการแล้วหัน

กลับมาใช้ความคิดที่ใช้ในกลศาสตร์แบบฉบับแทน ผู้ที่ประสบความสำเร็จในการสร้างกลศาสตร์ควอนตัมในแนวนี้คือ ฟายน์แมน (Feynman)

ในปี ค.ศ.1948 ฟายน์แมนได้เสนอกลศาสตร์ควอนตัมแนวใหม่คือ ได้เสนอทฤษฎีอินทิกรัลตามเส้นทาง (Feynman and Hibbs;1965) โดยเขาได้นำเสนอตัวแผ่กระจาย (propagator) ของอนุภาคซึ่งอยู่ในรูปของอินทิกรัลตามเส้นทางที่เป็นไปได้ทั้งหมดของอนุภาค นับตั้งแต่นั้นเป็นต้นมา กลศาสตร์ควอนตัมตามแบบฉบับของฟายน์แมนได้รับความสนใจจากนักฟิสิกส์เป็นจำนวนมาก ทั้งนี้เนื่องจากได้รับการพิสูจน์ว่าอินทิกรัลตามเส้นทางดังกล่าวมีประโยชน์ต่อวงการฟิสิกส์หลายสาขา อย่างไรก็ตามมีข้อเท็จจริงที่น่าประหลาดใจเป็นอย่างยิ่งว่าทฤษฎีอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมนขาดประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาบางปัญหา อาทิเช่น ปัญหาอิเล็กตรอนในศักย์คูลอมบ์ ปัญหากำแพงศักย์อนันต์ และปัญหาอนุภาคในกล่องหรือบ่อจัตุรัสลึกอนันต์ เป็นต้น กล่าวในเชิงประวัติศาสตร์ สำหรับปัญหาศักย์คูลอมบ์นั้น Ho และ Inomata ประสบความสำเร็จในการสร้างรูปแบบอินทิกรัลตามเส้นทางของอะตอมไฮโดรเจน (Ho and Inomata;1982)โดยเขาทั้งสองสามารถคำนวณฟังก์ชันกรีน (Green's function) ของอิเล็กตรอนในรูปแบบที่กระชับ จากฟังก์ชันกรีนดังกล่าว Choosiri และ Sayakanit สามารถคำนวณระดับพลังงานที่เป็นไปได้และฟังก์ชันคลื่นของอะตอมไฮโดรเจนในสามมิติได้ (Choosiri and Sayakanit;1981)ในปี ค.ศ.1981 Goodman ได้นำเสนอวิธีจุดภาพกระจกเงา (Image point method) (Goodman;1981)หลังจากที่ Goodman ได้นำวิธีจุดภาพกระจกเงาไปประยุกต์ใช้กับอินทิกรัลตามเส้นทางของปัญหากำแพงศักย์อนันต์ เขาสามารถคำนวณตัวแผ่กระจายของอนุภาคภายใต้กำแพงศักย์ดังกล่าวได้ สำหรับวิทยานิพนธ์นี้จะศึกษาวิธีการให้ได้มาซึ่งฟังก์ชันคลื่นหรือฟังก์ชันไอเกนและระดับพลังงานที่เป็นไปได้ของอนุภาคฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่จากตัวแผ่กระจายดังกล่าว

ความแตกต่างโดยสิ้นเชิงระหว่างวิธีการของชเรอดิงเงอร์และวิธีการของฟายน์แมนก็คือ วิธีการของชเรอดิงเงอร์ ใช้วิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์คำนวณหาฟังก์ชันคลื่นออกมา ในขณะที่วิธีการของฟายน์แมนใช้วิธีการอินทิเกรตตามเส้นทางคำนวณหาตัวแผ่กระจาย วิธีการทั้งสองมีความยากง่ายแตกต่างกันขึ้นอยู่กับรูปแบบของปัญหาเช่น ระบบของอิเล็กตรอนในอะตอมไฮโดรเจนสามารถคำนวณได้โดยง่ายด้วยวิธีการของชเรอดิงเงอร์ แต่ในการหาตัวแผ่กระจายของอิเล็กตรอนด้วยวิธีการของฟายน์แมนกลับกลายเป็นเรื่องยาก จนแทบเป็นไปไม่ได้ ในทางกลับกัน การหาฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคอิเล็กตรอนที่อยู่ภายใต้แรงฮาร์มอนิกสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าที่ขึ้นต่อเวลาโดยวิธีการของชเรอดิงเงอร์กลับกลายเป็นเรื่องยากและไม่น่าเป็นไปได้ ดังนั้นเราน่าจะใช้ทางเลือกใหม่ในการเข้าถึงองค์ความรู้ของปัญหาดังกล่าว โดยใช้วิธีการอินทิเกรตตามเส้นทาง

คำนวณหาตัวแผ่กระจายออกมา หลังจากคำนวณตัวแผ่กระจายสำเร็จแล้ว ปริมาณทางกายภาพอื่นๆ เช่น พลังงานหรือความหนาแน่นสถานะก็น่าจะสามารถหาได้โดยไม่ยาก

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.2 เพื่อศึกษาวิธีการอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมน

1.2.3 เพื่อคำนวณหาตัวแผ่กระจายสำหรับฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่

1.2.4 เพื่อคำนวณหาฟังก์ชันคลื่นและระดับพลังงานที่เป็นไปได้สำหรับฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.3.1 ทำให้เข้าใจวิธีการอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมนซึ่งนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาระบบอนุภาคในรูปแบบอื่นๆ ได้

1.3.2 ทำให้ทราบรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ของตัวแผ่กระจาย ฟังก์ชันคลื่นและระดับพลังงานที่เป็นไปได้สำหรับฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

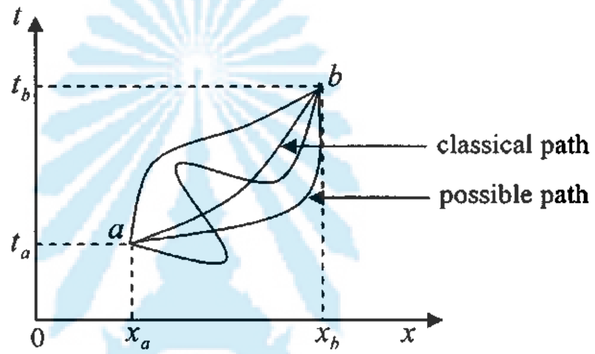
การวิจัยนี้มุ่งเน้นศึกษาการอินทิกรัลตามเส้นทางสำหรับฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่ปริมาณหลักที่ต้องการคำนวณคือ ตัวแผ่กระจาย ฟังก์ชันคลื่นและระดับพลังงานที่เป็นไปได้

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ทฤษฎีอินทิกรัลตามเส้นทางเบื้องต้น

เมื่อพิจารณากลศาสตร์ควอนตัมซึ่งได้นำเสนอโดยใช้แนวความคิดของไฮเซนเบอร์กหรือแนวความคิดของชเรอดิงเงอร์ ความคิดทั้งสองแบบนี้แม้ว่าการเริ่มต้นจะแตกต่างกันมาก แต่ผลสุดท้ายก็ให้ผลลัพธ์เหมือนกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการอธิบายทฤษฎีควอนตัมทั้งสองรูปแบบนี้สามารถพิสูจน์ได้ว่าเท่ากันทุกประการ ปริมาณต่าง ๆ ในกลศาสตร์แบบฉบับถูกแทนด้วยตัวดำเนินการ (operator) แทนที่จะเป็นปริมาณที่มีค่าเป็นเลขธรรมดา ดังนั้นจึงไม่สามารถนำเอาความรู้จากกลศาสตร์แบบฉบับมาใช้คำนวณหาปริมาณควอนตัมแบบใหม่ได้ เนื่องจากกลศาสตร์แบบฉบับได้รับการพัฒนามาเป็นระยะเวลานาน และปริมาณต่างๆ มีความหมายที่แน่นอน จึงควรจะนำเอาสิ่งเหล่านี้มาใช้ให้เป็นประโยชน์ ดังนั้นจึงได้มีนักฟิสิกส์เป็นจำนวนไม่น้อยที่พยายามจะคิดค้นกลศาสตร์ควอนตัมแบบใหม่ โดยอาศัยคณิตศาสตร์ที่มีความพร้อมอยู่แล้วในกลศาสตร์แบบฉบับ วิธีการเช่นนี้อาจถือได้ว่าเป็นความพยายามที่จะละทิ้งการใช้ตัวดำเนินการแล้วกลับมาใช้ความคิดที่ใช้ในกลศาสตร์แบบฉบับแทน ผู้ที่ประสบความสำเร็จในการสร้างกลศาสตร์ควอนตัมแนวใหม่นี้คือ ฟายน์แมน ในปี ค.ศ.1948 ฟายน์แมนสังเกตว่า ถ้าต้องการศึกษาพฤติกรรมของอิเล็กตรอน อาจจะใช้วิธีการของชเรอดิงเงอร์เพื่อหาแอมปลิจูดของความน่าจะเป็น (probability amplitude) ของอิเล็กตรอนที่ประพฤติตัวเป็นคลื่น แต่จากการวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับธรรมชาติของการเป็นไปได้ทั้งคลื่นและอนุภาค แสดงว่าแอมปลิจูดของคลื่นของอิเล็กตรอนนั้นอาจคำนวณได้โดยถือว่าอิเล็กตรอนเป็นอนุภาค และแอมปลิจูดของคลื่นของอิเล็กตรอนที่จุดหนึ่งจุดใดสามารถคำนวณได้โดยการรวมเส้นทางเดินที่เป็นไปได้ทั้งหมด วิธีการรวมเส้นทางเดินของอนุภาคนี้สามารถคำนวณได้เช่นเดียวกับวิธีการในกลศาสตร์แบบฉบับ กล่าวคือเมื่อยอมรับว่าความคิดของเดอบรอยล์ (de Broglie) เป็นจริงด้วยการแทนที่อนุภาคโฟตอนด้วยอนุภาคอิเล็กตรอนก็จะทำให้สามารถคำนวณหาแอมปลิจูดของความน่าจะเป็นได้ นอกจากนี้ยังพบว่าแอมปลิจูดของความน่าจะเป็นนี้ที่แท้ก็คือ ฟังก์ชันคลื่นนั่นเอง และแอมปลิจูดของความน่าจะเป็นทั้งหมดของคลื่นที่สังสรรค์อยู่กับอนุภาคมีค่าเท่ากับแอมปลิจูดของความน่าจะเป็นย่อยๆ รวมกัน โดยที่แต่ละแอมปลิจูดของความน่าจะเป็นย่อยนั้นต้องคล้องจองกับทางเดินใดทางเดินหนึ่งของอนุภาค เพื่อความสะดวกในการคำนวณจะพิจารณาเฉพาะในกรณีการเคลื่อนที่ที่เป็นหนึ่งมิติเท่านั้น อย่างไรก็ตามวิธีการนี้สามารถจะขยายไปสู่กรณีสามมิติหรือมิติที่มากกว่าได้โดยไม่ยากนัก

พิจารณาอนุภาคตัวหนึ่งเคลื่อนที่จากจุด a ณ เวลา t_a ไปยังจุด b ณ เวลา t_b ในกลศาสตร์แบบฉบับ (classical mechanics) เราสามารถบอกตำแหน่งของอนุภาคที่เวลาใดๆได้ นั่นคือ เราทราบเส้นทางที่แน่นอนของอนุภาคซึ่งมีเพียงเส้นทางเดียว แต่ในทางควอนตัมเราไม่สามารถบอกตำแหน่งของอนุภาคได้แน่นอน เราบอกได้เพียงโอกาสของความน่าจะเป็นเท่านั้น ฟายน์แมนพบว่าเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคมีได้หลายเส้นทางนอกจากเส้นทางแบบฉบับ (classical path) ดังแสดงใน ภาพที่ 2.1



ภาพที่ 2.1 แสดงเส้นทางที่เป็นไปได้กับเส้นทางแบบฉบับ

ฟายน์แมนพบว่าขนาดของแอมปลิจูดของความน่าจะเป็นที่คล้องจองกับแต่ละทางเดินของอนุภาคนั้นจะมีค่าเท่ากันเสมอ ยกเว้นเฟสของคลื่นเท่านั้นที่ต่างกัน และมีรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ดังนี้

$$\phi[x(t)] = [const.]e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]} \tag{2.1}$$

เมื่อ $\phi[x(t)]$ คือ แอมปลิจูดของความน่าจะเป็น และ $S[x(t)]$ คือ กิริยาหรือแอกชัน (action) โดยที่

$$S[x(t)] = \int_{t_a}^{t_b} L(x,\dot{x},t)dt \tag{2.2}$$

และ $L(x,\dot{x},t)$ คือลากรางเกียน (Lagrangian) ของระบบที่กำลังพิจารณา ในกรณีที่อนุภาคมีมวล m และเคลื่อนที่ภายใต้ศักย์ $V(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับโคออร์ดิเนต x เพียงอย่างเดียว

$$L(x,\dot{x},t)=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V(x) \tag{2.3}$$

ฟายน์แมนได้ให้นิยามแอมปลิจูดของความน่าจะเป็นที่อนุภาคจะเคลื่อนที่จากจุด a ณ เวลา t_a ไปยังจุด b ณ เวลา t_b ไว้ดังนี้

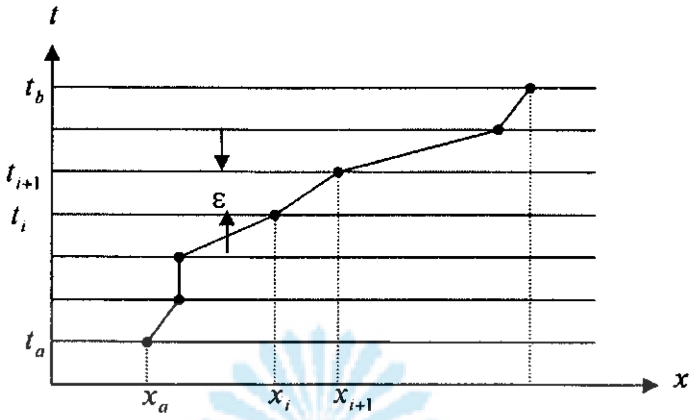
$$K(b,a)=\sum_{\substack{\text{ทุกเส้นทาง}\\ \text{จาก a ไปยัง b}}}\phi[x(t)]=\sum_{\substack{\text{ทุกเส้นทาง}\\ \text{จาก a ไปยัง b}}}[const.]e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]} \tag{2.4}$$

และเรียกแอมปลิจูดของความน่าจะเป็นนี้ว่า ตัวแผ่กระจาย เนื่องจากจำนวนเส้นทางทั้งหมดระหว่างจุด a กับจุด b มีจำนวนมหาศาลจนนับไม่ถ้วนเป็นอนันต์ ในการรวมแอมปลิจูดตามสมการ (2.4) จึงเป็นเรื่องยุ่งยากจนแทบเป็นไปไม่ได้ อย่างไรก็ตามโดยอาศัยวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่ชาญฉลาดในแก้ปัญหาดังกล่าว ฟายน์แมนก็สามารถคำนวณเส้นทางทั้งหมดได้ โดยเปลี่ยนการบวกหรือผลบวก (summation) ในสมการ (2.4) เป็นการอินทิกรัลแทนด้วยวิธีการดังนี้

สมมติว่าเส้นทางเดินของอนุภาคมีลักษณะดังแสดงในภาพที่ 2.2โดยแบ่งช่วงเวลาซึ่งถือว่าเป็นตัวแปรอิสระจาก t_a ถึง t_b ออกเป็นช่วงย่อยๆ กว้างเท่ากันเป็นจำนวน n ช่วงโดยที่ $t_n-t_{n-1}=t_{n-1}-t_{n-2}=...=t_i-t_{i-1}=...=t_2-t_1=t_1-t_0=\varepsilon$ และกำหนดให้ $t_0=t_a$, $t_n=t_b$, $x(t_0)=x_a$ และ $x(t_n)=x_b$ โดยการแบ่งเช่นนี้ทำให้ได้เวลาเป็นชุดๆ ซึ่งมีระยะห่างเท่ากับ ε แต่ละ t_i และเลือก x_i คล้องจองกับ t_i หนึ่งจุด โดยการเชื่อมโยงจุดเหล่านั้นเข้าด้วยกันด้วยเส้นตรง ก็จะได้เส้นทางของอนุภาคหนึ่งเส้นทางดังแสดงในภาพที่ 2.2 ในการเดินทางของอนุภาคจากจุด x_i ไปยังจุด x_{i+1} ได้แอมปลิจูดของความน่าจะเป็นมีค่าประมาณดังนี้

$$K(x_{i+1},x_i)\approx\frac{1}{A}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x_{i+1},x_i]\right)$$

$$\approx\frac{1}{A}\exp\left(\frac{i}{\hbar}L(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon},\frac{x_{i+1}+x_i}{2},\frac{t_{i+1}+t_i}{2})\right)\varepsilon \tag{2.5}$$



ภาพที่ 2.2 แสดงเส้นทางเดินของอนุภาคจากจุด x_a ไปยังจุด x_b โดยแบ่งออกเป็นเส้นทางย่อยๆ

แอมปลิจูดของความน่าจะเป็นในการเดินทางของอนุภาคจากจุด a ไปยังจุด b โดยใช้เส้นทางดังแสดงในภาพที่ 2.2 คือ

$$\phi[x(t)] \approx K(x_n,x_{n-1})K(x_{n-1},x_{n-2})..K(x_i,x_{i-1})..K(x_1,x_0) = \prod_{i-1}^{n-1} K(x_i,x_{i-1}) \tag{2.6}$$

จากสมการ (2.5) และสมการ (2.6) จะได้ผลรวมของการมีส่วนร่วม (contribution) ของแต่ละเส้นทางสามารถหาได้โดยการอินทิเกรตสมการ (2.6) ดังนี้

$$K(b,a) = \sum_{a\to b}\phi[x(t)] = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint..\int\prod_{i=1}^{n} K(x_i,x_{i-1})dx_1dx_2...dx_{n-1}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\iint...\int\exp\left(\frac{i}{\hbar}\varepsilon\sum_i L(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon},\frac{x_{i+1}+x_i}{2},\frac{t_{i+1}+t_i}{2})\right)\frac{dx_1}{A}\frac{dx_2}{A}...\frac{dx_i}{A}...\frac{dx_{n-2}}{A}\frac{dx_{n-1}}{A} \tag{2.7}$$

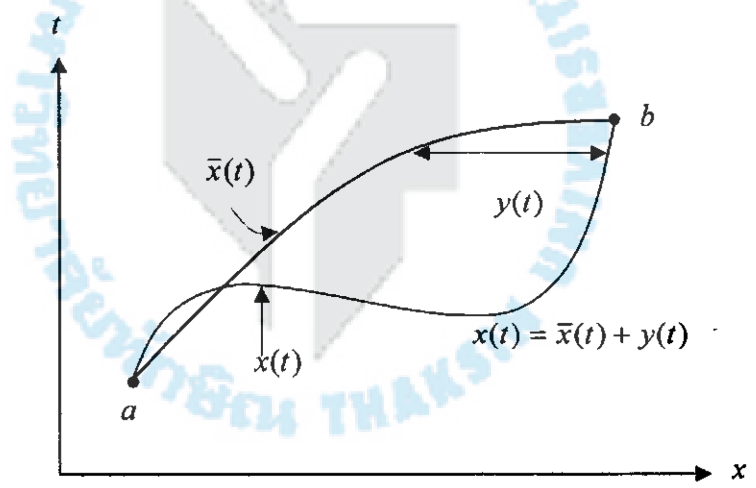
ขอให้สังเกตว่ากำหนดให้ $\varepsilon \to 0$ ในสมการ (2.7) โดยตรงนั้นยังไม่ได้เพราะจะทำให้สมการดังกล่าวไม่มีขีดจำกัด เพื่อให้ได้ค่าซึ่งเป็นที่ยอมรับได้จะต้องหาตัวประกอบแบบอย่าง (normalizing factor) (A) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ ε ที่จะทำให้สมการ (2.7) มีค่าเป็นที่ยอมรับได้เมื่อ

$\varepsilon \to 0$ นั่นคือ A เป็นค่าคงที่ พบว่ามีค่าเป็น $\left(\frac{2\pi i\hbar\varepsilon}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$ สมการ (2.7) จึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูปที่กะทัดรัดเพื่อความสะดวกนิยมเขียนสมการ (2.7) ดังนี้

$$K(b,a) = \int_a^b e^{\frac{i}{\hbar}S[b,a]} D[x(t)] \tag{2.8}$$

$$S[b,a] = \int_{t_a}^{t_b} L(x,\dot{x},t)\,dt \tag{2.9}$$

สมการ (2.8) นี้จะรู้จักกันดีในนามของอินทิกรัลตามเส้นทางหรืออินทิเกรตตามเส้นทาง (path integration) พิจารณาสมการ (2.7) จะเห็นว่าการคำนวณตัวแผ่กระจายนั้น ความยากง่ายในการคำนวณขึ้นอยู่กับรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ของลากรางเกียนของระบบ ถ้าหากทำการอินทิเกรตที่ละตัวแปรโดยตรงจำนวนครั้งของการอินทิกรัลมากมายมหาศาลจนแทบเป็นไปไม่ได้ในทางปฏิบัติ อย่างไรก็ตามสามารถเลี่ยงปัญหานี้ได้โดยการแทนเส้นทางใดๆ ที่เป็นไปได้ด้วยเส้นทางแบบฉบับดังแสดงในภาพที่ 2.3



ภาพที่ 2.3 แสดงเส้นทางแบบฉบับ $\bar{x}(t)$ และส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากเส้นทางแบบฉบับ $y(t)$

ตัวอย่างเช่น ระบบของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกเชิงเส้น ซึ่งมีลากรางเกียนดังนี้

$$L(x,\dot{x}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) \tag{2.10}$$

โดยการแทนเส้นทางใดๆ ที่เป็นไปได้ด้วยเส้นทางแบบฉบับกับส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากเส้นทางแบบฉบับ กล่าวคือ

$$x(t) = \bar{x}(t) + y(t) \tag{2.11}$$

เมื่อ $\bar{x}(t)$ และ $y(t)$ คือเส้นทางแบบฉบับและส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากเส้นทางแบบฉบับ เมื่อแทนสมการ (2.11) ลงในสมการ (2.8) จะได้

$$K(b,a) = e^{\frac{i}{\hbar}S_{cl}(x_b,x_a)}\int_0^0 D[y(t)]e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b}\frac{m}{2}(\dot{y}^2-\omega^2y^2)dt}$$

$$= F(t_b,t_a)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_{cl}(x_b,x_a)\right\} \tag{2.12}$$

โดยที่ $F(t_b,t_a)$ คือพรีแฟกเตอร์ (prefactor) ซึ่งเป็นปริมาณที่ไม่ขึ้นอยู่กับจุดเริ่มต้นและจุดปลายของการเคลื่อนที่ของอนุภาค ส่วน $S_{cl}(x_b,x_a)$ คือแอคชันแบบฉบับ (classical action) สามารถคำนวณได้โดยใช้หลักแห่งกิริยาน้อยสุด (the principle of least action) อย่างไรก็ตาม แวนเว็ล็ค(van Vleck;1978) และ เพาลี (Pauli;1952) พบว่าในกรณีที่ลากรางเกียนของระบบมีรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นกำลังสอง (quadratic) พรีแฟกเตอร์ของระบบสามารถหาได้โดยใช้สูตร

$$F(t_b,t_a) = \left(\frac{i}{2\pi\hbar}\frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_b}S_{cl}(x_b,x_a)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.13}$$

โดยอาศัยสมการ (2.12) และสมการ (2.13) จะได้ว่าในการคำนวณหาตัวแผ่กระจายของอนุภาคในทางควอนตัมกลับกลายเป็นการคำนวณหาเส้นทางแบบฉบับแทน

2.2 ฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของอนุภาค

เมื่อทราบตัวแผ่กระจายของอนุภาคที่เคลื่อนที่จากจุดหนึ่งจุดใดในอวกาศไปยังอีกจุดหนึ่งในอวกาศ ก็จะทำให้ทราบปริมาณทางฟิสิกส์อื่นๆ ของระบบควอนตัมได้ โดยการติดตามเส้นทางเดินของอนุภาค และเนื่องจากฟังก์ชันคลื่นแสดงถึงแอมปลิจูดของความน่าจะเป็น จึงต้องพิจารณาสมการ(2.8)ใหม่ ดังนี้

$$K(b,a)=\int_a^b e^{\frac{i}{\hbar}S[b,a]}D[x(t)] \tag{2.14}$$

เนื่องจาก $S[b,a]=\int_{t_a}^{t_b} L(x,\dot{x},t)\,dt$ และจากคุณสมบัติของการอินทิกรัล จะสามารถแบ่งช่วงของการอินทิกรัลออกเป็นสองส่วนได้ กล่าวคือ

$$S[b,a]=\int_a^b L\,dt=\int_a^c L\,dt+\int_c^b L\,dt$$

$$S[b,a]=S[b,c]+S[c,a] \tag{2.15}$$

จากสมการ (2.14) และสมการ (2.15) จะได้

$$K(b,a)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_a^c \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[b,a]\right)D[x(t)]\int_c^b \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[c,a]\right)D[x(t)]dx_c$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} K(b,a)\,K(c,a)dx_c \tag{2.16}$$

สมการ (2.16) นี้อาจตีความได้ว่าอนุภาคเคลื่อนที่จากจุด a ถึงจุด b จะเท่ากับ (หรือให้ผลเหมือนกับ) อนุภาคเคลื่อนที่จาก a ถึง c แล้วจาก c ถึง b แอมปลิจูดของอนุภาคที่เคลื่อนที่จาก a ถึง b จะเท่ากับผลคูณของแอมปลิจูดของแต่ละช่วงของการเดินทาง แอมปลิจูดรวมทั้งหมดของอนุภาคที่เคลื่อนที่จาก a ถึง b จึงได้จากการอินทิกรัลตัวแปร x_c กล่าวคือ

$$K(a \to c \to b) = K(b,a)K(c,a)$$

$$K(a \to b) = \int_{-\infty}^{\infty} K(b,a)K(c,a)\,dx_c \qquad (2.17)$$

ในกรณีที่ไม่สนใจว่าอนุภาคเริ่มต้นมาจากตำแหน่งใด (x_a อาจมาจากตำแหน่งใดๆ ก็ได้) $K(b,a)$ ก็จะกลายเป็นแอมปลิจูดของความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคที่ตำแหน่ง x_b ณ เวลา t_b แอมปลิจูดดังกล่าวนี้ก็คือฟังก์ชันคลื่นนั่นเอง กล่าวคือ

$$K(b,a) = K(x_b,t_b;x_a,t_a) \xrightarrow{\text{ไม่สนใจต้นกำเนิด } (x_a,t_a)} \psi(x_b,t_b)$$

ดังนั้น จากสมการ (2.16) หรือสมการ (2.17) ถ้าไม่สนใจตำแหน่งเริ่มต้น (x_a,t_a) จะได้

$$\psi(x_b,t_b) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_b,t_b;x_c,t_c,t_c)\psi(x_c,t_c)dx_c \qquad (2.18)$$

สรุปได้ว่า ถ้าทราบฟังก์ชันคลื่น ณ เวลา t_c และทราบรูปแบบของตัวแผ่กระจายแล้วจะสามารถหาฟังก์ชันคลื่น ณ เวลา t ใดๆ ได้ โดยที่ $t > t_c$

พิจารณาระบบยืนยง (stationary system) แฮมิลโทเนียนของระบบไม่ขึ้นต่อเวลาอย่างชัดแจ้ง คำตอบหรือผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์

$$H\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) \tag{2.19}$$

จะอยู่ในรูป(Messiah;1961)

$$\psi(x,t) = \sum_n C_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\psi_n(x) \tag{2.20}$$

โดยที่

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)\psi_n^*(x)e^{\frac{i}{\hbar}E_n t}dx \tag{2.21}$$

เมื่อแทน C_n ลงในสมการ (2.20) จะได้

$$\psi(x,t) = \sum_n \int_{-\infty}^{\infty}\psi(x',t')\psi_n^*(x')e^{\frac{i}{\hbar}E_n t'}dx'\psi_n(x)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\sum_n \psi_n(x)\psi_n^*(x')e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t')}\psi(x',t')dx' \tag{2.22}$$

เปรียบเทียบสมการ (2.18) กับสมการ (2.22) จะได้

$$K(x,t,x',t') = \sum_n \psi_n(x)\psi_n^*(x')e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t')} \tag{2.23}$$

และต่อกรณีที่สเปกตรัมพลังงานของอนุภาคมีค่าต่อเนื่องสมการ (2.23) จะกลายเป็น

$$K(x,t,x',t') = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(x)\psi_k^*(x') e^{-\frac{i}{\hbar}E(k)(t-t')} dk \qquad (2.24)$$

โดยที่ k เป็นเลขคลื่น ซึ่งสัมพันธ์กับโมเมนตัมตามสมการ $p = \hbar k$ เมื่อพิจารณาสมการ (2.23) และ(2.24) จะเห็นว่า ตัวแผ่กระจายสามารถให้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันคลื่น และพลังงานพร้อมกัน

2.3 ฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้น

ฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้นหรือตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกหนึ่งมิติ มีลากรางเกียนในรูปแบบดังนี้

$$L(x,\dot{x},t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) \qquad (2.25)$$

ดังนั้นตัวแผ่กระจายสามารถเขียนได้เป็น

$$K(b,a) = \int_a^b \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_a^b \left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\omega^2 x^2\right) dt\right) D[x(t)] \qquad (2.26)$$

เมื่อพิจารณาการอินทิเกรตข้างต้นโดยตรงเช่นเดียวกับกรณีของอนุภาคอิสระในทางทฤษฎีแล้วอาจคำนวณค่าอินทิกรัลเหล่านี้ได้ เนื่องจากรูปแบบของการอินทิเกรตยังคงเป็นแบบเกาส์เซียน แต่ในทางปฏิบัติแล้วการคำนวณดังกล่าวค่อนข้างยุ่งยาก จึงขอเสนอวิธีใหม่ดังได้แสดงไว้ในหัวข้อ 2.1 กล่าวคือแยกเส้นทางเดินแบบฉบับออกจากเส้นทางเดินที่เป็นไปได้ทั้งหมด วิธีการนี้จะเป็น

ประโยชน์ไม่เฉพาะแต่ปัญหาของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เท่านั้น แต่จะมีประโยชน์ต่อปัญหาอื่นๆ ที่มีลากรางเกียนยุ่งยากกว่านี้

จากวิชากลศาสตร์แบบฉบับเส้นทางเดินของอนุภาคจะต้องสอดคล้องสมการลากราง (Lagrange equation) หรือสอดคล้องหลักแห่งกิริยาน้อยสุด กล่าวในเชิงคณิตศาสตร์คือ

$$\delta S = \delta \int L(x,\dot{x},t)dt = 0 \tag{2.27}$$

ขั้นตอนในการคำนวณหาเส้นทางแบบฉบับ $\bar{x}$ อาจกระทำได้ดังนี้ สมมติว่าให้เส้นทางเดินเปลี่ยนไปจากเส้นทางเดินแบบฉบับเป็นจำนวน δx เนื่องจาก $\delta x(t_a) = \delta x(t_b) = 0$ ดังนั้น

$$\delta S = S(\bar{x}+\delta x) - S(\bar{x}) = 0 \tag{2.28}$$

และกระจาย δx ออกเป็นอนุกรมกำลัง โดยคิดเฉพาะกำลังที่หนึ่งของ δx สามารถเขียนได้ดังนี้

$$S(\bar{x}+\delta x) = \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{\bar{x}}+\delta\dot{x}, \bar{x}+\delta x, t)\,dt$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} \left(L(\dot{\bar{x}},\bar{x},t) + \delta\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}} + \delta x \frac{\partial L}{\partial \bar{x}} \right) dt$$

$$= S(\bar{x}) + \int_{t_a}^{t_b} \left(\delta\dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{x}}} + \delta x \frac{\partial L}{\partial \bar{x}} \right) dt \tag{2.29}$$

โดยการอินทิเกรตบางส่วนจะได้

$$\delta S = \delta x \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\bigg|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \delta x \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right) dt \tag{2.30}$$

เนื่องจาก δx ที่จุดปลายทั้งสองมีค่าเป็นศูนย์ เทอมแรกทางขวาของสมการ (2.30) จึงมีค่าเป็นศูนย์ ระหว่างจุดปลายทั้งสอง δx มีค่าเท่าใดก็ได้ เงื่อนไข $\delta S = 0$ จึงสอดคล้องกับ

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0 \tag{2.31}$$

เราเรียกสมการ (2.31) ว่า สมการลากรางหรือสมการการเคลื่อนที่ (equation of motion) สำหรับกรณีของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ สมการ (2.31) กลับกลายเป็น

$$\ddot{\bar{x}} + \omega^2 \bar{x} = 0 \tag{2.32}$$

ผลเฉลยหรือคำตอบทั่วไปของสมการ (2.32) คือ

$$\bar{x} = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{2.33}$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงที่ไม่เจาะจง อาศัยเงื่อนไข $\bar{x}(t_a) = x_a$ และ $\bar{x}(t_b) = x_b$ ผลเฉลยของสมการ (2.33) จึงกลายเป็น

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{\sin\omega(t_b - t_a)}\left[x_b \sin\omega(t - t_a) + x_a \sin\omega(t_b - t)\right] \tag{2.34}$$

สมการ (2.34) นี้สามารถนำไปคำนวณหาแอคชันแบบฉบับ S_{cl} ได้ กล่าวคือ

$$S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{m}{2}\dot{\bar{x}}^2 - \frac{m}{2}\omega^2\bar{x}^2\right)dt \tag{2.35}$$

คำนวณหา S_{cl} โดยการแทนค่า $\dot{\bar{x}}^2$ และ $\bar{x}^2$ ที่ได้จากสมการ (2.34) ลงในสมการ (2.35) แล้วทำการอินทิเกรต อย่างไรก็ตามการคำนวณจะสะดวกกว่าหากทำการอินทิเกรตสมการ (2.35) บางส่วนเสียก่อน โดยที่

$$S_{cl} = \frac{m}{2}(\dot{\bar{x}}\,\bar{x})\Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b}\left(\frac{m}{2}\dot{\bar{x}}^2 - \frac{m}{2}\omega^2\bar{x}^2\right)dt \tag{2.36}$$

จะเห็นว่าเทอมที่ 2 ทางด้านขวามือของสมการ (2.36) มีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจาก $\bar{x}$ สอดคล้องสมการ (2.34) ในที่สุดจะได้

$$S_{cl} = \frac{m}{2}\left(\dot{\bar{x}}(t_b)\bar{x}(t_a) - \dot{\bar{x}}(t_a)\bar{x}(t_b)\right) \tag{2.37}$$

หาค่าอนุพันธ์ของ $\bar{x}(t)$ เทียบกับเวลา t แล้วแทนค่า t เท่ากับ t_a และ t_b จะได้

$$\dot{\bar{x}}(t_a) = \frac{\omega}{\sin\omega(t_b - t_a)}\left(x_b - x_a\cos\omega(t_b - t_a)\right) \tag{2.38}$$

$$\dot{\bar{x}}(t_b) = \frac{\omega}{\sin\omega(t_b - t_a)}\left(x_b\cos\omega(t_b - t_a) - x_a\right) \tag{2.39}$$

แทนค่า $\dot{\bar{x}}(t_a), \dot{\bar{x}}(t_b), \bar{x}(t_a)$ และ $\bar{x}(t_b)$ ลงในสมการ (2.37) จะได้

$$S_{cl} = \frac{m\omega}{2\sin\omega(t_b - t_a)}\left((x_a^2 + x_b^2)\cos\omega(t_b - t_a) - 2x_a x_b\right) \tag{2.40}$$

เมื่อได้ S_{cl} แล้วก็สามารถคำนวณหาพรีแฟกเตอร์ได้ โดยใช้สูตรของแวนเวิล์ค (van Vleck;1978) และเพาลี (Pauli;1952) จากสมการ (2.13) ได้ผลดังนี้

$$F(t_b, t_a) = \left(\frac{i}{2\pi\hbar}\frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_b} S_{cl}(x_b, x_a)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega(t_b - t_a)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.41}$$

จากสมการ (2.40), (2.41) และอาศัยสมการ (2.12) ในที่สุดจะได้ตัวแผ่กระจายของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้นดังนี้

$$K(b,a)=\left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega T}\left((x_a^2+x_b^2)\cos\omega T-2x_ax_b\right)\right) \tag{2.42}$$

โดยที่ $T=t_b-t_a$

2.4 ฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้น

ในหัวข้อนี้จะแสดงให้เห็นว่าตัวแผ่กระจายของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ ได้ให้รายละเอียดเกี่ยวกับฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของระบบไว้ครบถ้วน จากสมการ (2.42) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันคลื่นและพลังงานได้ดังนี้

$$\left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega T}\left((x_a^2+x_b^2)\cos\omega T-2x_ax_b\right)\right)=\sum_n\psi_n(x_b)\psi_n^*(x_a)e^{-\frac{i}{\hbar}E_nT} \tag{2.43}$$

เพื่อให้ได้ฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ ต้องเขียนสมการทางซ้ายมือของสมการ (2.43) เสียใหม่ โดยอาศัยความสัมพันธ์

$$\left.\begin{aligned} i\sin\omega T &= \frac{e^{i\omega T}(1-e^{-2i\omega T})}{2} \\ \cos\omega T &= \frac{e^{i\omega T}(1+e^{-2i\omega T})}{2} \end{aligned}\right\} \tag{2.44}$$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการทางด้านซ้ายของสมการ (2.43) จะได้

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\omega T}{2}} (1-e^{-2i\omega T})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}\left[(x_a^2+x_b^2)\frac{1+e^{-2i\omega T}}{1-e^{-2i\omega T}} - \frac{4x_a x_b e^{-i\omega T}}{1-e^{-2i\omega T}}\right]\right) = \sum_n \psi_n(x_b)\psi_n^*(x_a) e^{-\frac{i}{\hbar}E_n T}$$

(2.45)

ถ้าต้องการให้นิพจน์ทางซ้ายมือของสมการ (2.43) มีลักษณะคล้ายกับนิพจน์ทางขวามือ ซึ่งเป็นอนุกรม จึงจำเป็นต้องกระจายสมการ (2.45) ออกเป็นอนุกรมกำลังของ $e^{-i\omega T}$ เนื่องจากเทอมแรกของสมการ (2.45) คือ $e^{-\frac{i\omega T}{2}}$ ดังนั้นเทอมต่อๆ ไปจะต้องมีรูปแบบเป็น $e^{-\frac{i\omega T}{2}} e^{-in\omega T}$ โดยที่ $n = 0,1,2,3,\ldots$ การที่อนุกรมมีลักษณะเช่นนี้แสดงว่าพลังงานของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ คือ

$$E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega \tag{2.46}$$

ถ้าต้องการทราบฟังก์ชันคลื่นของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ จะต้องกระจายนิพจน์ของสมการ (2.45) ให้สมบูรณ์กว่านี้ ในที่นี้จะแสดงวิธีการกระจายถึงเทอม $n=2$ เท่านั้น อย่างไรก็ตาม โดยหลักการแล้วสามารถกระจายถึงเทอมที่ n ใดๆ ก็ได้ โดยการกระจายนิพจน์ของสมการ (2.45) ถึงอันดับ $n=2$ ดังนี้

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\omega T}{2}} (1+\frac{e^{-2i\omega T}}{2}+\ldots)\exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_a^2+x_b^2) - \frac{m\omega}{\hbar}(x_a^2+x_b^2)\right.$$

$$\left.(e^{-2i\omega T}+\ldots) + \frac{2}{\hbar}m\omega x_a x_b e^{-i\omega T} + \ldots\right\}$$

หรือ

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_a^2+x_b^2)} e^{-\frac{i\omega T}{2}} (1+\frac{e^{-2i\omega T}}{2})\exp\left\{1+\frac{2}{\hbar}m\omega x_a x_b e^{-i\omega T}\right.$$

$$\left. +\frac{4m^2\omega^2}{2\hbar^2}x_a^2x_b^2e^{-2i\omega T} - \frac{m\omega}{\hbar}(x_a^2+x_b^2)e^{-2i\omega T} + \ldots\right\} \tag{2.47}$$

เปรียบเทียบเทอมแรกของสมการ (2.47) กับสมการ (2.45) จะได้

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_a^2+x_b^2)} e^{-\frac{i\omega T}{2}} = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 T}\psi_0(x_b)\psi_0^*(x_a) \tag{2.48}$$

สมการ (2.48) นี้หมายความว่า $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ และฟังก์ชันคลื่นที่สมนัยกับสถานะ**พื้นคือ**

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega^2 x^2}{2\hbar}} \tag{2.49}$$

ทั้งนี้อาจคำนวณหาพลังงานและฟังก์ชันคลื่นในสถานะอื่นได้โดยพิจารณาเทอมต่อไป เช่น สถานะถัดจากสถานะพื้น โดยพิจารณา

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_a^2+x_b^2)} e^{-\frac{i\omega T}{2}} e^{-i\omega T} \frac{2m\omega}{\hbar} x_a x_b = e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 T} \psi_1(x_b)\psi_1^*(x_a) \quad (2.50)$$

สมการนี้แสดงว่า $E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$ **และฟังก์ชันคลื่นคือ**

$$\psi_1(x) = \left(\frac{2m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} x\psi_0(x) \quad (2.51)$$

ซึ่งสมการ (2.51) ที่ได้นี้ก็ตรงกับสูตรที่ได้จากวิธีการของชเรอดิงเงอร์ **ในทำนองเดียวกัน** เทอมต่อไปจะให้พลังงาน $E_2 = \frac{5\hbar\omega}{2}$ สำหรับส่วนที่ขึ้นกับ x_a และ x_b **จะมีลักษณะดังนี้**

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_a^2+x_b^2)} \left\{\frac{2m^2\omega^2}{\hbar} x_a^2 x_b^2 - \frac{m\omega}{\hbar}(x_a^2 + x_b^2 + \frac{1}{2})\right\} \quad (2.52)$$

เทอมนี้จะต้องเท่ากับ $\psi_2(x_b)\psi_2^*(x_a)$ **เนื่องจากเทอมที่อยู่ภายในวงเล็บใหญ่สามารถ** แยกตัวประกอบได้เป็น

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2m\omega}{\hbar} x_a^2 - 1\right)\left(\frac{2m\omega}{\hbar} x_b^2 - 1\right) \quad (2.53)$$

ดังนั้นจะได้

$$\psi_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2m\omega}{\hbar} x^2 - 1\right) \psi_0(x) \tag{2.54}$$

ซึ่งสมการ (2.54) ที่ได้นี้ก็ตรงกับสูตรที่ได้จากวิธีการของชเรอดิงเงอร์เช่นกัน ในที่นี้ได้พิสูจน์ให้เห็นด้วยสองตัวอย่างข้างต้นแล้วว่า ถ้าทราบตัวแผ่กระจายก็จะทำให้ทราบทั้งพลังงานและฟังก์ชันคลื่น และโดยอาศัยวิธีการดังกล่าวนี้ จะสามารถคำนวณหาพลังงานกับฟังก์ชันคลื่นใดๆ ของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ได้ทุกระดับ

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 เส้นทางแบบฉบับของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่

ฮาร์มอนิกออสซิลเตอร์ภายใต้แรงคงที่เป็นอนุภาคที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของแรงสองแรงคือ แรงฮาร์มอนิก (harmonic force) $F_h = -m\omega^2 x$ แล้ว แรงคงที่ $F_c = f$ ลากรางเกียนของอนุภาคดังกล่าวเขียนได้ดังนี้

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} + fx \tag{3.1}$$

ในการหาเส้นทางแบบฉบับ x(t) เราต้องอาศัยสมการลากราง (2.31) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ หลังจากแทนสมการ (3.1) ลงใน (2.31) เราจะได้สมการลากรางหรือสมการการเคลื่อนที่ดังนี้

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{f}{m} \tag{3.2}$$

รูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าวจัดเป็นสมการเชิงเส้นที่สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวและทางด้านขวามือมิได้เป็นศูนย์ (second-order linear equations with constant coefficients and right-hand side not zero) (Boas;2006) โดยสมการดังกล่าวมีผลเฉลยทั่วไป (general solution) $x = x_c + x_p$ เมื่อ x_c คือ complementary funcfion ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ

$$\ddot{x}_c + \omega^2 x_c = 0 \tag{3.3}$$

ส่วน x_p คือ particular solution สอดคล้องสมการ

$$\ddot{x}_p + \omega^2 x_p = \frac{f}{m} \tag{3.4}$$

จากสมการ (3.2) (3.3) และ (3.4) เราได้ผลเฉลย

$$x_c = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \tag{3.5}$$

$$x_p = \frac{f}{m\omega^2} \tag{3.6}$$

และผลเฉลยทั่วไป ซึ่งก็คือ เส้นทางแบบฉบับ

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{f}{m\omega^2} \tag{3.7}$$

พิจารณาเงื่อนไขขอบเขต (boundary condition)

กำหนดให้ $T = t_b - t_a$ $x(t_b) = x_b$ และ $x(t_a) = x_a$

$$x(t_b) = x_b = C_1 \cos \omega t_b + C_2 \sin \omega t_b + \frac{f}{m\omega^2} \tag{3.8}$$

$$x(t_a) = x_a = C_1 \cos \omega t_a + C_2 \sin \omega t_a + \frac{f}{m\omega^2} \tag{3.9}$$

เอา $\sin \omega t_a \times$ (3.8) จะได้

$$x_b \sin \omega t_a = C_1 \cos \omega t_b \sin \omega t_a + C_2 \sin \omega t_b \sin \omega t_a + \frac{f}{m\omega^2} \sin \omega t_a \tag{3.10}$$

เอา $\sin \omega t_b \times$ (3.9) จะได้

$$x_a \sin \omega t_b = C_1 \cos \omega t_a \sin \omega t_b + C_2 \sin \omega t_a \sin \omega t_b + \frac{f}{m\omega^2} \sin \omega t_b \tag{3.11}$$

จัดการนำ (3.10) ลบด้วย (3.11) จะได้

$$x_b \sin \omega t_a - x_a \sin \omega t_a = C_1 (\cos \omega t_b \sin \omega t_a - \cos \omega t_a \sin \omega t_b) + \frac{f}{m\omega^2} (\sin \omega t_a - \sin \omega t_b)$$

$$C_1 = \frac{x_b \sin \omega t_a - x_a \sin \omega t_b - \frac{f}{m\omega^2} (\sin \omega t_a - \sin \omega t_b)}{\cos \omega t_b \sin \omega t_a - \cos \omega t_a \sin \omega t_b}$$

$$C_1 = \frac{x_b \sin \omega t_a - x_a \sin \omega t_b - \frac{f}{m\omega^2} (\sin \omega t_a - \sin \omega t_b)}{\sin \omega (t_a - t_b)}$$

$$C_1 = \frac{x_b \sin \omega t_a - x_a \sin \omega t_b - \frac{f}{m\omega^2}(\sin \omega t_a - \sin \omega t_b)}{-\sin \omega T}$$

$$C_1 = \frac{1}{-\sin \omega T}\left[x_b \sin \omega t_a - x_a \sin \omega t_b - \frac{f}{m\omega^2}(\sin \omega t_a - \sin \omega t_b)\right] \tag{3.12}$$

นำ (3.12) แทนลงใน (3.8) จะได้

$$x_b = \frac{1}{-\sin \omega T}\left[x_b \sin \omega t_a - x_a \sin \omega t_b - \frac{f}{m\omega^2}(\sin \omega t_a - \sin \omega t_b)\right]\cos \omega t_b + \frac{f}{m\omega^2} + C_2 \sin \omega t_b$$

$$x_b = \frac{1}{-\sin \omega T}\left[x_b \sin \omega t_a \cos \omega t_b - x_a \sin \omega t_b \cos \omega t_b - \frac{f}{m\omega^2}(\sin \omega t_a \cos \omega t_b - \sin \omega t_b \cos \omega t_b)\right] + \frac{f}{m\omega^2} + C_2 \sin \omega t_b$$

$$C_2 = \frac{x_a \cos \omega t_b - x_b \cos \omega t_a + \frac{f}{m\omega^2}(\cos \omega t_a - \cos \omega t_b)}{-\sin \omega T}$$

$$C_2 = \frac{1}{-\sin \omega T}\left[x_a \cos \omega t_b - x_b \cos \omega t_a + \frac{f}{m\omega^2}(\cos \omega t_a - \cos \omega t_a)\right] \tag{3.13}$$

3.2 แอคชันแบบฉบับของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่

จาก
$$x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t + \frac{f}{m\omega^2} \tag{3.14}$$

$$\dot{x}(t) = -\omega C_1 \sin\omega t + \omega C_2 \cos\omega t \tag{3.15}$$

$$S_{cl} = L\int_{t_a}^{t_b} dt = \frac{m}{2}\int_{t_a}^{t_b} \dot{x}^2 dt - \frac{m\omega^2}{2}\int_{t_a}^{t_b} x^2 dt + f\int_{t_a}^{t_b} x dt \tag{3.16}$$

นำ (3.15) ยกกำลังสอง

$$\dot{x}(t)^2 = \left[-\omega C_1 \sin\omega t + \omega C_2 \cos\omega t\right]^2$$

$$\dot{x}(t)^2 = \omega^2\left[C_1 \sin\omega t - C_2 \cos\omega t\right]^2$$

$$\dot{x}(t)^2 = \omega^2\left[C_1^2 \sin^2\omega t + C_2^2 \cos^2\omega t - 2C_1C_2 \sin\omega t \cos\omega t\right] \tag{3.17}$$

พิจารณา

$$\frac{m}{2}\int_{a}^{b}\dot{x}^{2}dt = \frac{m\omega}{2}\left[C_1^2\int_a^b \sin^2\omega t + C_2^2\int_a^b \cos^2\omega t - 2C_1C_2\int_a^b \sin\omega t\cos\omega t\right]$$

$$\frac{m}{2}\int_{t_a}^{t_b}\dot{x}^{2}dt = \frac{m\omega}{2}\left[C_1^2\int_{t_a}^{t_b}\frac{(1-\cos 2\omega t)}{2}dt + C_2^2\int_{t_a}^{t_b}\frac{(1+ccs2\omega t)}{2}dt - 2C_1^2C_2^2\int_{t_a}^{t_b}\sin 2\omega t dt\right]$$

$$\frac{m}{2}\int_a^b \dot{x}^2 dt = \frac{m\omega}{2}\left[\frac{C_1^2T}{2} - \frac{C_1^2}{2}\int_a^b \cos 2\omega t dt + \frac{C_2^2T}{2} + \frac{C_2^2}{2}\int_a^b \cos 2\omega t dt - 2C_1^2C_1^2\int_a^b \sin 2\omega t dt\right]$$

$$\frac{m}{2}\int_{t_a}^{t_b}\dot{x}^2 dt = \frac{m\omega}{2}\left[\frac{\mathrm{T}}{2}(C_1^2+C_2^2) - \frac{C_1^2}{4\omega}\int_{t_a}^{t_b}\cos 2\omega t d(2\omega t) + \frac{C_2^2}{4\omega}\int_{t_a}^{t_b}\cos 2\omega t d(2\omega t) - \frac{C_1^2C_2^2}{2\omega}\int_{t_a}^{t_b}\sin 2\omega t d(2\omega t)\right]$$

$$\frac{m}{2}\int_{t_a}^{t_b}\dot{x}^2 dt = \frac{m\omega}{2}\left[\frac{\mathrm{T}}{2}(C_1^2+C_2^2) - \frac{1}{4\omega}(C_1^2-C_2^2)(\sin 2\omega t_b - \sin 2\omega t_a) - \frac{C_1^2C_2^2}{2\omega}(\cos 2\omega t_b - \cos 2\omega t_b)\right] \tag{3.18}$$

นำ (3.14) ยกกำลังสองทั้งสองด้าน

$$\frac{mx^2\omega^2}{2} = \frac{m\omega^2}{2}\left[(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) + \frac{f}{m\omega^2}\right]^2$$

$$\frac{mx^2\omega^2}{2} = \frac{m\omega^2}{2}\left[(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t)^2 + \frac{2f}{m\omega^2}(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t) + \frac{f^2}{m^2\omega^4}\right]$$

$$\frac{mx^2\omega^2}{2} = \frac{m\omega^2}{2}\left[C_1^2\cos^2\omega t + C_2^2\sin^2\omega t + 2C_1C_2\sin\omega t\cos\omega t + \frac{2f}{m\omega^2}(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t)\right]$$

$$+\frac{f}{m\omega^2}$$

พิจารณา

$$\int_a^b \frac{mx^2\omega^2}{2}dt = \frac{m\omega^2}{2}\left[C_1^2\int_a^b\cos^2\omega t dt + C_2^2\int_a^a\sin^2\omega t dt + 2C_1C_2\int_a^b\sin\omega t\cos\omega t dt\right.$$
$$\left. + \frac{2f}{m\omega^2}(C_1\int_a^b\cos\omega t dt + C_2\int_a^b\sin\omega t dt) + \frac{f^2}{m^2\omega^4}\int_a^b dt\right]$$

$$\int\frac{mx^2\omega^2}{2}dt = \frac{m\omega^2}{2}\left[\frac{C_1^2T}{2} + \frac{C_2^2}{4\omega}\int_a^b\cos 2\omega t d2\omega t + \frac{C_2^2T}{2} - \frac{C_2^2}{4\omega}\int\cos 2\omega t d2\omega t + \frac{C_1^2C_2^2}{2\omega}\int_a^b\sin 2\omega t d2\omega t\right.$$
$$\left. + \frac{2f}{m\omega^2}(\frac{C_1}{\omega}\int_a^b\cos\omega t d\omega t + \frac{C_2}{\omega}\int_a^b\sin\omega t d\omega t) + \frac{f^2T}{m^2\omega^2}\right]$$

$$\int\frac{mx^2\omega^2}{2}dt = \frac{m\omega^2}{2}\left[\frac{T}{2}(C_1^2 + C_2^2) + \frac{C_1^2}{4\omega}\sin 2\omega t\Big|_{t_a}^{t_b} - \frac{C_2^2}{4\omega}\sin 2\omega t\Big|_{t_a}^{t_b} - \frac{C_1^2C_2^2}{2\omega}\cos 2\omega t\Big|_{t_a}^{t_b}\right.$$
$$\left. + \frac{2f}{m\omega^2}(\frac{C_1}{\omega}\sin\omega t\Big|_{t_a}^{t_b} - \frac{C_2}{\omega}\cos\omega t\Big|_{t_a}^{t_b} + \frac{f^2T}{m^2\omega^2}\right]$$

$$\int\frac{mx^2\omega^2}{2}dt = \frac{m\omega^2}{2}\left[\frac{T}{2}(C_1^2 + C_2^2) + \frac{C_1^2}{4\omega}(\sin 2\omega t_b - \sin 2\omega t_a) - \frac{C_2^2}{4\omega}(\sin 2\omega t_b - \sin 2\omega t_a) - \frac{C_1^2C_2^2}{2\omega}\right.$$
$$\left.(\cos 2\omega t_b - \cos 2\omega t_a) + \frac{2f}{m\omega^2}\{\frac{C_1}{\omega}(\sin\omega t_b - \sin\omega t_a) - \frac{C_2}{\omega}(\cos\omega t_b - \cos\omega t_a)\} + \frac{f^2T}{m^2\omega^2}\right]$$

(3.19)

พิจารณา

$$\int_a^b fxdt = f\int_a^b (C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{f}{m\omega^2})dt$$

$$\int_a^b fxdt = f(C_1\int_a^b \cos\omega t dt + C_2\int_a^b \sin\omega t dt) + \frac{f}{m\omega^2}\int_a^b dt$$

$$\int_a^b fxdt = f\left[\frac{C_1}{\omega}\sin\omega t\Big|_{t_a}^{t_b} - \frac{C_2}{\omega}\cos\omega t\Big|_{t_a}^{t_b} + \frac{fT}{m\omega^2}\right]$$

$$\int_a^b fxdt = f\left[\frac{C_1}{\omega}(\sin\omega t_b - \sin\omega t_b) - \frac{C_2}{\omega}(\cos\omega t_b - \cos\omega t_a) + \frac{fT}{m\omega^2}\right]$$

(3.20)

นำ (3.18) (3.19) และ (3.20) แทนลงใน (3.16) จะได้

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \frac{m\omega^2}{2}\left[\frac{T}{2}(C_2^2 + C_1^2) - \frac{1}{4\omega}(C_2^2 - C_1^2)(\sin 2\omega t_b - \sin 2\omega t_a) + C_1^2C_2^2\frac{(\cos 2\omega t_b - \cos 2\omega t_a)}{2\omega}\right] \\ &- \frac{m\omega^2}{2}\left[\frac{T}{2}(C_2^2 - C_1^2) + \frac{1}{4\omega}(C_2^2 - C_1^2)(\sin 2\omega t_b - \sin 2\omega t_a) - \frac{C_1C_2}{2\omega}(\cos 2\omega t_b - \cos 2\omega t_a)\right. \\ &+ \frac{2f}{m\omega^2}\left(\frac{C_1}{\omega}(\sin\omega t_b - \sin\omega t_a) - \frac{C_2}{\omega}(\cos\omega t_b - \cos\omega t_a)\right) + \left.\frac{f^2T}{m^2\omega^4}\right] + f\left[\frac{C_1}{\omega}(\sin\omega t_b - \sin\omega t_a)\right. \\ &\left. - \frac{C_2}{\omega}(\cos\omega t_b - \cos\omega_a) + \frac{fT}{m\omega^2}\right] \end{aligned}$$

$$S_{cl} = \frac{m\omega^2}{2}\left[\frac{(C_2^2 - C_1^2)}{2\omega}(\sin 2\omega t_b - \sin 2\omega t_a) + \frac{C_1C_2}{\omega}(\cos 2\omega t_b - \cos 2\omega t_a)\right] + \frac{f^2T}{2m\omega^2}$$

$$S_{cl} = \frac{m\omega^2}{2}\left[\frac{(C_2^2 - C_1^2)}{2\omega}(2\cos\omega(t_b + t_a)\sin\omega T) + \frac{C_1 C_2}{\omega}(-2\sin\omega(t_a + t_b)\sin\omega T)\right] + \frac{f^2 T}{2m\omega^2}$$

$$S_{cl} = \frac{m\omega^2}{2}\left[\frac{(C_2^2 - C_1^2)}{\omega}(\cos\omega(t_b + t_a)\sin\omega T) - \frac{2C_1 C_2}{\omega}(\sin\omega(t_a + t_b)\sin\omega T)\right] + \frac{f^2 T}{2m\omega^2}$$

$$S_{cl} = \frac{m\omega\sin\omega T}{2}\left[(C_2^2 - C_1^2)\cos\omega(t_b + t_a) - 2C_1 C_2\sin\omega(t_a + t_b)\right] + \frac{f^2 T}{2m\omega^2} \qquad (3.21)$$

จาก

$$C_2 = \frac{1}{\sin\omega T}\left[x_a\cos\omega t_b - x_b\cos\omega t_a - \frac{f}{m\omega^2}(\cos\omega t_a - \cos\omega t_a)\right] \qquad (3.22)$$

$$C_1 = -\frac{1}{\sin\omega T}\left[x_b\sin\omega t_a - x_a\sin\omega t_b - \frac{f}{m\omega^2}(\sin\omega t_a - \sin\omega t_b)\right] \qquad (3.23)$$

พิจารณา (3.22)

$$C_2^2 = \frac{1}{(\sin\omega T)^2}[(x_b\cos\omega t_a - x_a\cos\omega t_b)^2 + \frac{f^2}{m^2\omega^4}(\cos\omega t_a - \cos\omega t_b)^2$$
$$- \frac{2f}{m\omega^2}(x_b\cos\omega t_a - x_a\cos\omega t_b)(\cos\omega t_a - \cos\omega t_b)]$$

$$C_2^2 = \frac{1}{(\sin\omega T)^2}[(x_b^2\cos^2\omega t_a - x_a^2\cos^2\omega t_b - 2x_a x_b\cos\omega t_a\cos\omega t_b) + \frac{f^2}{m^2\omega^4}(\cos^2\omega t_a$$
$$+\cos^2\omega t_b - 2\cos\omega t_a\cos\omega t_b) - \frac{2f}{m\omega^2}(x_b\cos^2\omega t_a + x_a\cos^2\omega t_b -$$
$$(x_a + x_b)\cos\omega t_a\cos\omega t_b)]$$

(3.24)

พิจารณา (3.23)

$$C_1^2 = -\frac{1}{(\sin\omega T)^2}[(x_b\sin\omega t_a - x_a\sin\omega t_b)^2 + \frac{f^2}{m^2\omega^4}(\sin\omega t_a - \sin\omega t_b)^2$$
$$-\frac{2f}{m\omega^2}(x_b\sin\omega t_a - x_a\sin\omega t_b)(\sin\omega t_a - \sin\omega t_b)]$$

$$C_1^2 = -\frac{1}{(\sin\omega T)^2}[(x_b^2\sin^2\omega t_a + x_a^2\sin\omega t_b - 2x_a x_b\sin\omega t_a\sin\omega t_b) + \frac{f^2}{m^2\omega^4}(\sin^2\omega t_a + \sin^2\omega t_b$$
$$-2\sin\omega t_a\sin\omega t_b) - \frac{2f}{m\omega^2}(x_b\sin^2\omega t_a + x_a\sin^2\omega t_b - (x_a + x_b)\sin\omega t_a\sin\omega t_b]$$

(3.25)

(3.24) ลบด้วย (3.25) จะได้

$$C_2^2 - C_1^2 = \frac{1}{(\sin\omega T)^2}[x_b^2(\cos^2\omega t_a - \sin^2\omega t_a) - x_a^2(\cos^2\omega t_b - \sin^2\omega t_a) - 2x_a x_b$$
$$(\cos\omega t_a\cos\omega t_b - \sin\omega t_a\sin\omega t_b) + \frac{f^2}{m^2\omega^4}\{(\cos^2\omega t_a - \sin^2\omega t_a) + (\cos^2\omega t_b - \sin^2\omega t_b)$$
$$-2(\cos\omega t_a\cos\omega t_b - \sin\omega t_a\sin\omega t_b) - \frac{2f}{m\omega^2}\{x_b(\cos^2\omega t_a - \sin^2\omega t_b)$$
$$+x_a(\cos^2\omega t_b - \sin^2\omega t_a) - (x_a + x_b)(\cos\omega t_a\cos\omega t_b - \sin\omega t_a\sin\omega t_b)\}]$$

$$C_2^2 - C_1^2 = \frac{1}{(\sin\omega T)^2}[x_b^2\cos 2\omega t_a + x_a^2\cos 2\omega t_a - 2x_a x_b\cos\omega(t_a + t_b) + \frac{f^2}{m^2\omega^4}\{\cos 2\omega t_a + \cos 2\omega t_b - 2\cos\omega(t_a + t_b)\} - \frac{2f}{m\omega^2}\{x_b\cos 2\omega t_a + x_a\cos 2\omega t_b - (x_a + x_b)\cos\omega(t_a + t_b)\}]$$

(3.26)

นำ (3.23) × (3.22) จะได้

$$C_1C_2 = -\frac{1}{(\sin\omega T)^2}[(x_b\sin\omega t_a - x_a\sin\omega t_b) - \frac{f}{m\omega^2}(\sin\omega t_a - \sin\omega t_b)] [x_b(\cos\omega t_a - x_a\cos\omega t_b) + \frac{f}{m\omega^2}(\cos\omega t_a - \cos\omega t_b)]$$

(3.27)

นำ $-2 \times$ (3.27) จะได้

$$-2C_1C_2 = -\frac{1}{(\sin\omega T)^2}[x_b^2\sin 2\omega t_a + x_a^2\sin 2\omega t_b - 2x_a x_b\sin\omega(t_b + t_a) - \frac{2f}{m\omega^2}\{x_b\sin 2\omega t_a + x_a\sin 2\omega t_b - (x_a + x_b)\sin\omega(t_a + t_b)\} + \frac{f^2}{m^2\omega 4}\{\sin 2\omega t_a + \sin 2\omega t_b - 2\sin\omega(t_a + t_b)\}]$$

(3.28)

จาก $$S_{cl} = \frac{m\omega\sin\omega T}{2}\left[(C_2^2 - C_1^2)\cos\omega(t_b + t_a) - 2C_1C_2\sin\omega(t_a + t_b)\right] + \frac{f^2T}{2m\omega^2} \qquad (3.29)$$

นำ (3.26) และ (3.28) แทนลงใน (3.29) จะได้

$$S_{cl}=\frac{m\omega\sin\omega T}{2(\sin\omega T)^2}\big[x_b^2\cos 2\omega t_a\cos\omega(t_b+t_a)+x_a^2\cos 2\omega t_b\cos\omega(t_b+t_a)-2x_ax_b\cos^2\omega(t_a+t_b)$$
$$+\frac{f^2}{m^2\omega^4}\{\cos 2\omega t_a\cos\omega(t_b+t_a)+\cos 2\omega t_b\cos\omega(t_b+t_a)-2\cos^2\omega(t_a+t_b)\}$$
$$-\frac{2f}{m\omega^2}\{x_b\cos 2\omega t_a\cos\omega(t_b+t_a)+x_a\cos 2\omega t_b\cos\omega(t_b+t_a)-(x_a+x_b)\cos^2\omega(t_a+t_b)\}$$
$$+x_b^2\sin 2\omega t_a\sin\omega(t_a+t_b)+x_a^2\sin 2\omega t_b\sin\omega(t_a+t_b)-2x_ax_b\sin^2\omega(t_b+t_a)$$
$$-\frac{2f}{m\omega^2}\{x_b\sin 2\omega t_a\sin\omega(t_a+t_b)+x_a\sin 2\omega t_b\sin\omega(t_a+t_b)-(x_a+x_b)\sin^2\omega(t_a+t_b)\}$$
$$+\frac{f^2}{m^2\omega^4}\{\sin 2\omega t_a\sin\omega(t_a+t_b)+\sin 2\omega t_b\sin\omega(t_a+t_b)-2\sin\omega^2(t_a+t_b)\}\big]+\frac{f^2T}{2m\omega^2}$$

$$S_{cl}=\frac{m\omega\sin\omega T}{2(\sin\omega T)^2}[x_b^2\{\cos 2\omega t_a\cos\omega(t_b+t_a)+\sin 2\omega t_a\sin\omega(t_a+t_b)\}+$$
$$x_a^2\{\cos 2\omega t_b\cos\omega(t_b+t_a)+\sin 2\omega t_a\sin\omega(t_a+t_b)\}-2x_ax_b\{\cos^2\omega(t_a+t_b)+\sin^2\omega(t_b+t_a)\}$$
$$+\frac{f^2}{m^2\omega^4}\{\cos 2\omega t_a\cos\omega(t_b+t_a)+\cos 2\omega t_b\cos\omega(t_b+t_a)+\sin 2\omega t_a\sin\omega(t_a+t_b)$$
$$+\sin 2\omega t_b\sin\omega(t_a+t_b)-2(\cos^2\omega(t_a+t_b)+\sin\omega^2(t_a+t_b)\}$$
$$-\frac{2f}{m\omega^2}\{x_b(\cos 2\omega t_a\cos\omega(t_b+t_a)+\sin 2\omega t_a\sin\omega(t_a+t_b))$$
$$+x_a(\cos 2\omega t_b\cos\omega(t_b+t_a)+\sin 2\omega t_b\sin\omega(t_a+t_b))$$
$$-(x_a+x_b)(\cos^2\omega(t_a+t_b)+\sin^2\omega(t_a+t_b)\}]+\frac{f^2T}{2m\omega^2}$$

$$S_{cl}=\frac{m\omega}{2\sin\omega T}[\frac{x_b^2}{2}\{\cos\omega(t_a-t_b)+\cos\omega(3t_a+t_b)+\cos\omega(t_a-t_b)-\cos\omega(3t_a+t_b)\}+$$
$$\frac{x_a^2}{2}\{\cos\omega(t_b-t_a)+\cos\omega(3t_b+t_a)+\cos\omega(t_b-t_a)-\cos\omega(3t_b+t_a)\}-2x_ax_b$$
$$+\frac{f^2}{m^2\omega^4}\{\frac{1}{2}(\cos\omega T+\cos\omega(3t_b+t_a))+\frac{1}{2}(\cos\omega T+\cos\omega(3t_a-t_b))$$
$$-\frac{1}{2}(\cos\omega T-\cos\omega(3t_a+t_b))+\frac{1}{2}(\cos\omega T-\cos\omega(3t_b+t_a))-2\}$$
$$-\frac{2f}{m\omega^2}\{\frac{x_b}{2}(\cos\omega T+\cos\omega(3t_a+t_b)-\cos\omega T+\cos\omega(3t_a+t_b))+$$
$$\frac{x_a}{2}(\cos\omega T+\cos\omega(3t_b+t_a)+\cos\omega T-\cos\omega(3t_b+t_a))-2(x_a+x_b)\}]+\frac{f^2T}{2m\omega^2}$$

$$S_{cl}=\frac{m\omega}{2\sin\omega T}[x_b^2\cos\omega T+x_a^2\cos\omega T-2x_ax_b+\frac{f^2}{m^2\omega^4}\{2\cos\omega T-2\}$$
$$-\frac{2f}{m\omega^2}\{x_b\cos\omega T+x_a\cos\omega T-(x_a+x_b)\}]+\frac{f^2T}{2m\omega^2}$$

$$S_{cl}=\frac{m\omega}{2\sin\omega T}[(x_b^2+x_a^2)\cos\omega T-2x_ax_b+\frac{2f^2}{m^2\omega^4}\{\cos\omega T-1\}$$
$$-\frac{2f}{m\omega^2}\{(x_b+x_a)\cos\omega T-(x_a+x_b)\}]+\frac{f^2T}{2m\omega^2}$$

$$S_{cl}=\frac{m\omega}{2\sin\omega T}[(x_b^2+x_a^2)\cos\omega T-2x_ax_b+\frac{2f^2}{m^2\omega^4}\{\cos\omega T-1\}-\frac{2f}{m\omega^2}(x_b+x_a)(\cos\omega T-1)]$$
$$+\frac{f^2T}{2m\omega^2}$$

$$S_{cl}=\frac{m\omega}{2\sin\omega T}[(x_b^2+x_a^2)\cos\omega T-2x_ax_b+\frac{2f}{m\omega^2}(x_b+x_a)(1-\cos\omega T)$$
$$-\frac{2f^2}{m^2\omega^4}\{1-\cos\omega T\}+\frac{f^2T\sin\omega T}{2m^2\omega^3}] \tag{3.30}$$

3.3 ตัวแผ่กระจายของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่

จากสมการ (2.13) $$F(t_b,t_a)=\left[\left(\frac{i}{2\pi\hbar}\frac{\partial^2}{\partial x_a\partial x_b}S_{cl}(x_b,x_a)\right)\right]^{1/2}$$

$$F(T)=\left[\left(\frac{i}{2\pi\hbar}\frac{\partial^2}{\partial x_a\partial x_b}S_{cl}(x_b,x_a)\right)\right]^{1/2} \tag{3.31}$$

นำ (3.30) แทนลงใน (3.31) จะได้

$$F(T)=\left[\left(\frac{i}{2\pi\hbar}\frac{m\omega}{2\sin\omega T}\frac{\partial^2}{\partial x_a\partial x_b}\{(x_b^2+x_a^2)\cos\omega T-2x_a x_b\}\right)\right]^{1/2}$$

$$F(T)=\left[\left(\frac{i}{2\pi\hbar}\frac{m\omega}{2\sin\omega T}\frac{\partial}{\partial x_a}\{2x_b\cos\omega T-2x_a\}\right)\right]^{1/2}$$

$$F(T)=\left[\left(\frac{i}{2\pi\hbar}\frac{m\omega}{2\sin\omega T}(-2)\right)\right]^{1/2}$$

$$F(T)=\left[\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}\right]^{1/2} \tag{3.32}$$

จาก
$$K(b,a)=F(t_b,t_a)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{cl}(x_b,x_a)\right) \tag{3.33}$$

นำ (3.30) (3.32) แทนลงใน (3.33) จะได้

$$K(b,a) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin\omega \mathrm{T}}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega\mathrm{T}}\Big[(x_b^2 + x_a^2)\cos\omega\mathrm{T} - 2x_a x_b$$

$$+\frac{2f}{m}(x_b + x_a)(1-\cos\omega\mathrm{T}) - \frac{2f^2}{m^2\omega^4}(1-\cos\omega\mathrm{T}) + \frac{f^2\mathrm{T}\sin\omega\mathrm{T}}{m^2\omega^3}\Big]$$

(3.34)

บทที่ 4
ผลการวิจัย

4. อินทิกรัลตามเส้นทางสำหรับฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่

4.1 ตัวแผ่กระจายสำหรับฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่

สำหรับฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ลากรางเกียนมีรูปแบบตามสมการ (2.10) แต่เมื่อเพิ่มแรงคงที่ (f) เข้ามาจะได้ลากรางเกียนของฮาร์มอนิกออสซิลเตอร์ภายใต้แรงคงที่ หลังจากอาศัยทฤษฎีอินทิกรัลตามเส้นทาง ได้ตัวแผ่กระจายสำหรับฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่ดังนี้

$$K(b,a)=\left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega\mathrm{T}}\Big[(x_b^2+x_a^2)\cos\omega\mathrm{T}-2x_ax_b$$

$$+\frac{2f}{m}(x_b+x_a)(1-\cos\omega\mathrm{T})-\frac{2f^2}{m^2\omega^4}(1-\cos\omega\mathrm{T})+\frac{f^2\mathrm{T}\sin\omega\mathrm{T}}{m^2\omega^3}\Big]$$

(4.1)

โดยที่ $T=t_b-t_a$

4.2 ระดับพลังงานที่เป็นไปได้และฟังก์ชันคลื่นของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรง-คงที่

จากสมการที่ (4.1) สามารถคำนวณรายละเอียดเกี่ยวกับฟังก์ชันคลื่นและระดับพลังงานของฮาร์นอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่ได้ โดยเขียนตัวแผ่กระจายให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันคลื่นและระดับพลังงานดังนี้

$$\left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega\mathrm{T}}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega\mathrm{T}}\Big[(x_b^2+x_a^2)\cos\omega\mathrm{T}-2x_ax_b+\frac{2f}{m}(x_b+x_a)(1-\cos\omega\mathrm{T})$$

$$\frac{2f^2}{m^2\omega^4}(1-\cos\omega\mathrm{T})+\frac{f^2\mathrm{T}\sin\omega\mathrm{T}}{m^2\omega^3}\Big]=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x_b)\psi_n^*(x_a)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n\mathrm{T}}$$

(4.2)

เพื่อให้ได้มาซึ่งฟังก์คลื่นและพลังงานของฮาร์มอนิกออสซิลเตอร์ภายใต้แรงคงที่จะต้องเขียนสมการ (4.1) ใหม่โดยอาศัยความสัมพันธ์ดังสมการ

$$i\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \text{ หรือ } e^{i\omega \mathrm{T}}(1 - e^{-2i\omega \mathrm{T}}) \tag{4.3}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ หรือ } \frac{e^{i\omega \mathrm{T}}(1 + e^{-2i\omega \mathrm{T}})}{2} \tag{4.4}$$

เมื่อ $\theta = \omega \mathrm{T}$

แทนสมการ (4.3) และ (4.4) ลงในสมการที่ (4.2) ด้านซ้ายมือได้ผลดังนี้

$$K(b,a) = F(b,a)\cdot\exp\Bigg[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_b^2 + x_a^2)(1+e^{-2i\omega \mathrm{T}})(1-e^{-2i\omega \mathrm{T}}) + \frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}e^{-i\omega \mathrm{T}}(1-e^{-2i\omega \mathrm{T}})^{-1}$$

$$+\frac{f}{\omega\hbar}(x_b + x_a)(1+e^{-2i\omega \mathrm{T}})(1-e^{-2i\omega \mathrm{T}})^{-1} - \frac{2f}{\omega\hbar}(x_b + x_a)e^{-i\omega \mathrm{T}}(1-e^{-2i\omega \mathrm{T}})^{-1}$$

$$-\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}(1+e^{-2i\omega \mathrm{T}})(1-e^{-2i\omega \mathrm{T}})^{-1} + \frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-i\omega \mathrm{T}}(1-e^{-2i\omega \mathrm{T}})^{-1} + \frac{i\mathrm{T}f^2}{m\omega^2\hbar}\Bigg] \tag{4.5}$$

ถ้าต้องการให้นิพจน์ด้านซ้ายของสมการ (4.2) มีลักษณะเดียวกับนิพจน์ด้านขวาซึ่งเป็นอนุกรม จะต้องกระจายสมการ (4.5) ออกเป็นอนุกรม ในที่นี้จะทำการกระจาย (4.2) ถึงเลขควอนตัม $n = 3$ โดยใช้สูตรดังนี้

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots;-1\langle x \le 1 \tag{4.6}$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots\ldots\ldots\ldots;-1\langle x\langle 1 \tag{4.7}$$

กระจายนิพจน์ $(1+e^{-2i\omega T})^{-1}$ โดยใช้สมการที่ (4.7) จะได้

$$(1+e^{-2i\omega T})^{-1} = 1+e^{-2i\omega T}+e^{-4i\omega T}+e^{-6i\omega T}+\ldots \tag{4.8}$$

แทนสมการ (4.8) ลงในสมการ (4.5) จะได้

$$\begin{aligned}K(b,a) = F(b,a)\exp\Big[& -\frac{m\omega}{2\hbar}(x_b^2+x_a^2)(1+e^{-2i\omega T})(1+e^{-2i\omega T}+e^{-4i\omega T}+e^{-6i\omega T}+\ldots) \\ & +\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}e^{-i\omega T}(1+e^{-2i\omega T}+e^{-4i\omega T}+e^{-6i\omega T}+\ldots) \\ & +\frac{f}{\omega\hbar}(x_a+x_b)(1+e^{-2i\omega T})(1+e^{-2i\omega T}+e^{-4i\omega T}+e^{-6i\omega T}+\ldots) \\ & -\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)e^{-i\omega T}(1+e^{-2i\omega T}e^{-4i\omega T}+e^{-6i\omega T}+\ldots) \\ & -\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}(1+e^{-2i\omega T})(1+e^{-2i\omega T}+e^{-4i\omega T}+e^{-6i\omega T}+\ldots) \\ & +\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-i\omega T}(1+e^{-2i\omega T}+e^{-4i\omega T}+e^{-6i\omega T}+\ldots)+\frac{iTf^2}{2m\omega^2\hbar}\Big]\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}K(b,a) = F(b,a)\cdot\exp\Big[& \frac{m\omega}{2\hbar}(x_b^2+x_a^2)(1+e^{-2i\omega T}+e^{-4i\omega T}+e^{-6i\omega T}+\ldots+e^{-2i\omega T}+e^{-4i\omega T}+e^{-6i\omega T}+\ldots) \\ & +\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}(e^{-i\omega T}+e^{-2i\omega T}+e^{-5i\omega T}+e^{-7i\omega T}+\ldots) \\ & +\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)(1+e^{-2i\omega T}+e^{-4i\omega T}+e^{-6i\omega T}+\ldots+e^{-2i\omega T}+e^{-4i\omega T}+e^{-6i\omega T}+e^{-8i\omega T}+\ldots) \\ & \frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)(e^{-i\omega T}+e^{-3i\omega T}+e^{-5i\omega T}+^{-7i\omega T}+\ldots)\end{aligned}$$

$$-\frac{f^2}{m\omega\hbar}(1+e^{-i\omega T}+e^{-4i\omega T}+e^{-6i\omega T}+\ldots+e^{-2i\omega T}+e^{-4i\omega T}+e^{-6i\sigma T}+e^{-i\omega T}+\ldots)$$

$$\left.+\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}(e^{-i\omega T}+e^{-3i\omega T}+e^{-5i\omega T}+e^{-7i\omega T}+\ldots)+\frac{iTf^2}{2m\omega^2\hbar}\right] \tag{4.10}$$

$$K(b,a)=F(b,a)\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_b^2+x_a^2)(1+2e^{-2i\omega T}+2e^{-4i\omega T}+2e^{-6i\omega T}+2e^{-8i\omega T}+\ldots)\right.$$

$$+\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}(e^{-i\omega T}+e^{-3i\omega T}+e^{-5i\omega T}+e^{-7i\omega T}+\ldots)$$

$$+\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)(1+2e^{-2i\omega T}+2e^{-4i\omega T}+2e^{-6i\omega T}+2e^{-8\omega T}+\ldots)$$

$$-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)(e^{-i\omega T}+e^{-3i\omega T}+e^{-5i\omega T}+e^{-7i\omega T}+\ldots)$$

$$-\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}(1+2e^{-2i\omega T}+2e^{-4i\omega T}+2e^{-6i\omega T}+2e^{-8i\omega T}+\ldots)$$

$$-\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}(1+2e^{-2i\omega T}+2e^{-4i\omega T}+2e^{-6i\omega T}+2e^{-8i\omega T}+\ldots)$$

$$\left.+\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}(e^{-i\omega T}+e^{-3i\omega T}+e^{-5i\omega T}+e^{-7i\omega T}+\ldots)+\frac{iTf^2}{2m\omega^2\hbar}\right] \tag{4.11}$$

$$K(b,a)=F(b,a)\cdot\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_b^2+x_a^2)+\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)-\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}+\frac{iTf^2}{2m\omega^2\hbar}\right]\times$$

$$\exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}(x_b^2+x_a^2)(e^{-2i\omega T}+e^{-4i\omega T}+e^{-6i\omega T}+e^{-8i\omega T}+\ldots)\right.$$

$$+\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}(e^{-i\omega T}+e^{-3i\omega T}+e^{-5i\omega T}+e^{-7i\omega T}+\ldots)$$

$$+\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b + x_a)(e^{-2i\omega T} + e^{-4i\omega T} + e^{-6i\omega T} + e^{-8i\omega T} + ...)$$

$$-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b + x_a)(e^{-i\omega T} + e^{-3i\omega T} + e^{-5i\omega T} + e^{-7i\omega T} + ...)$$

$$-\frac{2f}{m\omega^3\hbar}(e^{-2i\omega T} + e^{-4i\omega T} + e^{-6i\omega T} + e^{-8i\omega T} + ...)$$

$$+\frac{2f}{m\omega^3\hbar}(e^{-i\omega T} + e^{-3i\omega T} + e^{-5i\omega T} + e^{-7i\omega T} + ...)\Bigg] \tag{4.12}$$

จากสมการ (4.12) พบว่ามีบางส่วนของสมการอยู่ในรูปแบบฟังก์ชันชี้กำลัง ยกกำลังฟังก์ชันชี้กำลังต้องทำการกระจายถึง $n = 3$ เพื่อให้ได้ฟังก์ชันคลื่น 3 อันดับแรกที่สมบูรณ์ โดยอาศัยสูตร

$$e^{\theta} = 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + ... \tag{4.13}$$

จากสมการที่ (4.12) หลังจากการกระจายในรูปแบบสมการ (4.13) แล้วนั้นเลือกเฉพาะกำลังไม่เกินลำดับที่ $n = 3$ จะได้ โดยพิจารณาแต่ละเทอม ดังนี้

$$\exp\left[-\frac{m\omega}{\hbar}(x_b^2 + x_a^2)(e^{-2i\omega T} + e^{-4i\omega T} + e^{-6i\omega T} + e^{-8i\omega T} + ...)\right] \exp[A] \tag{4.14}$$

$$\exp[A] = \Bigg[1 - \frac{m\omega}{\hbar}(x_b^2 + x_a^2)(e^{-2i\omega T} + e^{-4i\omega T} + e^{-6i\omega T} + e^{-8i\omega T} + ...)$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 (x_b^2 + x_a^2)^2 (e^{-2i\omega T} + e^{-4i\omega T} + e^{-6i\omega T} + e^{-8i\omega T} + ...)^2$$

$$+\frac{1}{6}\left(-\frac{m\omega}{\hbar}\right)^3 (x_b^2 + x_a^2)^3 (e^{-2i\omega T} + e^{-4i\omega T} + e^{-6i\omega T} + e^{-8i\omega T} + ...)^3\Bigg] \tag{4.15}$$

$$\exp[A] = \left[1 - \frac{m\omega}{\hbar}(x_b^2 + x_a^2)(e^{-2i\omega T} + e^{-4i\omega T} + e^{-6i\omega T} + e^{-8i\omega T} + \ldots)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(-\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 (x_b^2 + x_a^2)^2 (e^{-4i\omega T} + \ldots) + \frac{1}{6}\left(-\frac{m\omega}{\hbar}\right)^3 (x_b^2 + x_a^2)^3 (e^{-6i\omega T} + \ldots)\right] \quad (4.16)$$

ในส่วน $\exp[A]$ เราเลือกสนใจเฉพาะฟังก์ชันชี้กำลัง ที่เลขชี้กำลังไม่เกิน 3 เท่านั้น จะได้ว่า

$$\exp[A] = \left[1 - \frac{m\omega}{\hbar}(x_b^2 + x_a^2)e^{-2i\omega T}\right] \quad (4.17)$$

หลังจากนั้นพิจารณาเทอมอื่น ๆ

$$\exp\left[\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}(e^{-i\omega T} + e^{-3i\omega T} + e^{-5i\omega T} + e^{-7i\omega T} + \ldots) = \exp[B]\right] \quad (4.18)$$

$$\exp[B] = \left[1 + \frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}(e^{-i\omega T} + e^{-3i\omega T} + e^{-5i\omega T} + e^{-7i\omega T} + \ldots)\right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^2 (e^{-i\omega T} + e^{-3i\omega T} + e^{-5i\omega T} + e^{-7i\omega T} + \ldots)^2$$

$$\left. + \frac{1}{6}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^3 (e^{-i\omega T} + e^{-3i\omega ZT} + e^{-5i\omega T} + e^{-7i\omega T} + \ldots)^3\right]$$

$$= \left[1 + \frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}(e^{-i\omega T} + e^{-3i\omega T}) + \frac{1}{2}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^2 (e^{-2i\omega T} + \ldots)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^3 (e^{-3i\omega T} + \ldots)\right] \quad (4.19)$$

$$\exp[B]=\left[1+\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}(e^{-i\omega T}+e^{-3i\omega T})+\frac{1}{2}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^2 e^{-2i\omega T}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^3(e^{-3i\omega T}+\ldots)\right] \tag{4.20}$$

$$\exp\left[\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)(e^{-2i\omega T}+e^{-4i\omega T}+e^{-6i\omega T}+e^{-8i\omega T}+\ldots)\right]=\exp[C] \tag{4.21}$$

$$\exp[C]=\left[1+\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)(e^{-2i\omega T}+e^{-4i\omega T}+e^{-6i\omega T}+e^{-8i\omega T}+\ldots)\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2(x_b+x_a)^2(e^{-2i\omega T}+e^{-4i\omega T}+e^{-6i\omega T}+e^{-8i\omega T}+\ldots)^2$$

$$+\frac{1}{6}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^3(x_b+x_a)^3(e^{-2i\omega T}+e^{-4i\omega T}+e^{-6i\omega T}+e^{-8i\omega T}+\ldots)^3$$

$$\exp[C]=\left[1+\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)(e^{-2i\omega T}+\ldots)\right] \tag{4.22}$$

$$\exp\left[-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_a+x_b)(e^{-i\omega T}+e^{-3i\omega T}+e^{-5i\omega T}+e^{-7i\omega T}+\ldots)=\exp[D]\right] \tag{4.23}$$

$$\exp[D]=\left[1-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_a+x_b)(e^{-i\omega T}+e^{-3i\omega T}+e^{-5i\omega T}+e^{-7i\omega T}+\ldots)\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2(x_a+x_b)^2(e^{-i\omega T}+e^{-3i\omega T}+e^{-5i\omega T}+e^{-7i\omega T}+\ldots)^2$$

$$\left.+\frac{1}{6}\left(\frac{2f^3}{\omega\hbar}\right)^3(x_a+x_b)^3(e^{-i\omega T}+e^{-3i\omega T}+e^{-5i\omega T}+e^{-7i\omega T}+\ldots)^3\right]$$

$$\exp[D]=\left[1-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_a+x_b)(e^{-2i\omega T}+e^{3i\omega T})+\frac{1}{2}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2(x_a+x_b)^2\left(e^{-2i\omega T}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{6}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^3(x_a+x_b)^3(e^{-3i\omega T})\right] \tag{4.24}$$

$$\exp\left[-\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}(e^{-2i\omega T}+e^{-4i\omega T}+e^{-6i\omega T}+e^{8i\omega T}+\ldots)=\exp[E]\right] \tag{4.25}$$

$$\exp[E]=\left[1-\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}(e^{-2i\omega\hbar}+e^{-4i\omega\hbar}+e^{-6i\omega\hbar}+e^{-8i\omega T}+\ldots)\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^2(e^{-2i\omega T}+e^{-4i\omega T}+e^{-6i\omega T}+e^{-8i\omega T}+\ldots)^2$$

$$+\frac{1}{6}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^3(e^{-2i\omega T}+e^{-4i\omega T}+e^{-6i\omega T}+e^{-8i\omega T}+\ldots)^3$$

$$\exp[E]=\left[1-\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}(e^{-2i\omega T})\right] \tag{4.26}$$

$$\exp\left[\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}(e^{-i\omega T}+e^{-3i\omega T}+e^{-5i\omega T}+e^{-7i\omega T}+\ldots)=\exp[F]\right] \tag{4.27}$$

$$\exp[F]=\left[1+\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}(e^{-i\omega T}+e^{-3i\omega T}+e^{-5i\omega T}+e^{-7i\omega T}+\ldots)\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)(e^{-i\omega T}+e^{-3i\omega T}+e^{-5i\omega T}+e^{-7i\omega T}+\ldots)^2$$

$$\left.+\frac{1}{6}\left(\frac{2f}{m\omega^3\hbar}\right)^3(e^{-i\omega T}+e^{-3i\omega T}+e^{-5i\omega T}+e^{-7i\omega T}+\ldots)^3\right]$$

$$\exp[F] = \left[1 + \frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}(e^{-i\omega T} + e^{-3i\omega T}) + \frac{1}{2}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^2 (e^{-2i\omega T}) + \frac{1}{6}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^3 (e^{-3i\omega T})\right] \tag{4.28}$$

พิจารณา $F(b,a) = \left(\dfrac{m\omega}{2\pi\hbar i \sin\omega T}\right)^{\frac{1}{2}}$ จะได้ว่า

$$= \left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar \dfrac{e^{i\omega T}\left(1 - e^{-2i\omega T}\right)}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{e^{i\omega T}\left(1 - e^{-2i\omega T}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\omega T}{2}} \left(1 - e^{-2i\omega T}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.29}$$

อาศัยสมการ(4.6)สมการที่(4.29)กลับกลายเป็น

$$F(b,a) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\omega T}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}e^{-2i\omega T} + \frac{3}{8}e^{-4i\omega T} + \frac{15}{48}e^{-6i\omega T} + \ldots\right) \tag{4.30}$$

$$F(b,a) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\omega T}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}e^{-2i\omega T} + \ldots\right) \tag{4.31}$$

เอาสมการ (4.17),(4.19),(4.22),(4.25),(4.27),(4.30) แทนในสมการ (4.12) จะได้

$$K(b,a)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{i\omega T}{2}}\times\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_b^2+x_a^2)+\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)-\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}+\frac{iTf^2}{2m\omega^2\hbar}\right]\times$$

$$\left[\left(1+\frac{1}{2}e^{-2i\omega T}\right)\left(1-\frac{m\omega}{\hbar}(x_b^2+x_a^2)e^{-2i\omega T}\right)\left(1+\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\left(e^{-i\omega T}+e^{-3i\omega T}\right)\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^2 e^{-2i\omega T}+\frac{1}{6}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^3 e^{-3i\omega T}\right]\times$$

$$\left[\left(1+\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)e^{-2i\omega T}\right)\left(1-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)(e^{-i\omega T}+e^{-3i\omega T})\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{2f^2}{\omega\hbar}\right)^2(x_b+x_a)^2 e^{-2i\omega T}-\frac{1}{6}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^3(x_b+x_a)^3 e^{-3i\omega T}\right]\times$$

$$\left[\left(1-\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-2i\omega T}\right)\left(1+\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}(e^{-i\omega T}+e^{-3i\omega T})+\frac{1}{2}\left(\frac{2f}{m\omega^3\hbar}\right)^2 e^{-2i\omega T}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^3 e^{-3i\omega T}\right] \tag{4.32}$$

$$K(b,a)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-2i\omega T}\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_b^2+x_a^2)+\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)-\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}+\frac{iTf^2}{2m\omega^2\hbar}\right]\times$$

$$\left[\left(1+\frac{1}{2}e^{-2i\omega T}\right)\left(1-\frac{m\omega}{\hbar}(x_b^2+x_a^2)e^{-2i\omega T}\right)\right]\times$$

$$\left[\left(1+\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)e^{-2i\omega T}\right)\left(1-\frac{2f}{m\omega^3\hbar}e^{-2i\omega T}\right)\right]\times$$

$$\left[1+\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}(e^{-i\omega \mathrm{T}}+e^{-3i\omega \mathrm{T}})+\frac{1}{2}\left(\frac{2f}{m\omega^3\hbar}\right)^2 e^{-2i\omega \mathrm{T}}+\frac{1}{6}\left(\frac{2f}{m\omega^3\hbar}\right)^3 e^{-3i\omega \mathrm{T}}\right]\times$$

$$\left[1-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)(e^{-i\omega \mathrm{T}}+e^{-3i\omega \mathrm{T}})+\frac{1}{2}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2 (x_b+x_a)e^{-2i\omega \mathrm{T}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{6}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^3 (x_b+x_a)^3 e^{-3i\omega \mathrm{T}}\right]\times \quad \left[1+\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)e^{-i\omega \mathrm{T}}+\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)e^{-3i\omega \mathrm{T}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^2 e^{-2i\omega \mathrm{T}}+\frac{1}{6}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^3 e^{-3i\omega \mathrm{T}}\right] \tag{4.34}$$

จากสมการ (4.34) แยกหาผลคูณของแต่ละคู่ โดยกำหนดให้ต่อไปนี้และผลลัพธ์เอาเฉพาะเลขชี้กำลังไม่เกิน 3 เท่านั้น

$$A'=\left[1+\frac{1}{2}e^{-2i\omega \mathrm{T}}\right]\left[1-\frac{m\omega}{\hbar}(x_b^2+x_b^2)e^{-i\omega \mathrm{T}}\right] \tag{4.35}$$

$$=1-\frac{m\omega}{\hbar}(x_b^2+x_b^2)e^{-2i\omega \mathrm{T}}+\frac{1}{2}e^{-2i\omega \mathrm{T}}-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_b^2+x_b^2)e^{-4i\omega \mathrm{T}}$$

$$A'=1+\frac{1}{2}e^{-2i\omega \mathrm{T}}-\frac{m\omega}{\hbar}(x_b^2+x_b^2)e^{-2i\omega \mathrm{T}} \tag{4.36}$$

$$B'=\left[1+\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)e^{-2i\omega \mathrm{T}}\right]\left[1-\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-2i\omega \mathrm{T}}\right] \tag{4.37}$$

$$=1-\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-2i\omega \mathrm{T}}+\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)e^{-2i\omega \mathrm{T}}-\frac{4f^3}{m\omega^4\hbar}(x_b+x_a)e^{-4i\omega \mathrm{T}}$$

$$B'=1-\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-2i\omega \mathrm{T}}+\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)e^{-2i\omega \mathrm{T}} \tag{4.38}$$

เมื่อได้สมการที่ (4.36) และ (4.38) แล้วนำสมการทั้งสองมาคูณกัน แล้วเลือกเลขชี้กำลังไม่เกิน 3 เท่านั้น

$$A' \times B' = \left[1 + \frac{1}{2}e^{-2i\omega T} - \frac{m\omega}{\hbar}(x_b^2 + x_b^2)e^{-2i\omega T}\right]\left[1 - \frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-2i\omega T} + \frac{2f}{\omega\hbar}(x_b + x_a)e^{-2i\omega T}\right]$$

$$= 1 - \frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-2i\omega T} + \frac{2f}{\omega\hbar}(x_b + x_a)e^{-2i\omega T} + \frac{1}{2}e^{-2i\omega T} - \frac{f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-4i\omega T}$$

$$- \frac{f}{\omega\hbar}(x_b + x_a)e^{-4i\omega T} - \frac{m\omega}{\hbar}(x_b^2 + x_b^2)e^{-2i\omega T} + \frac{2f^2}{\omega^2\hbar^2}(x_b^2 + x_b^2)e^{-4i\omega T}$$

$$- \frac{2mf}{\hbar}(x_b^2 + x_b^2)(x_b + x_a)e^{-4i\omega T} \tag{4.39}$$

$$G = 1 + \frac{1}{2}e^{-2i\omega T} - \frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-2i\omega T} + \frac{2f}{\omega\hbar}(x_b + x_a)e^{-2i\omega T} - \frac{m\omega}{\hbar}(x_b^2 + x_b^2)e^{-2i\omega T} \tag{4.40}$$

เมื่อ $G = A' \times B'$

ให้ $$H = \frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}e^{-i\omega T} + \frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}e^{-3i\omega T} + \frac{1}{2}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^2 e^{-2i\omega T}$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^3 e^{-3i\omega T} \tag{4.41}$$

นำ G และ H มาคูณกัน โดยเลือกเฉพาะเลขชี้กำลังไม่เกินอันดับ 3 เท่านั้น จะได้

$$G \times H = 1 + \frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}e^{-i\omega T} + \frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}e^{-3i\omega T} + \frac{1}{2}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)e^{-2i\omega T}$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)e^{-3i\omega T} + \frac{1}{2}e^{-2i\omega T} + \frac{m\omega x_a x_b}{\hbar}e^{-3i\omega T} - \frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-2i\omega T}$$

$$-\frac{4m\omega x_a x_b f^2}{m\omega^2\hbar^2}e^{-3i\omega T}+\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)e^{-2i\omega T}+\frac{4m\omega x_a x_b f}{\omega\hbar^2}e^{-3i\omega T}$$

$$-\frac{m\omega}{\hbar}(x_b^2+x_b^2)e^{-2i\omega T}-\frac{2m^2\omega^2 x_a x_b}{\hbar^2}(x_b^2+x_b^2)e^{-3i\omega T} \tag{4.42}$$

ให้ $I=\left[1-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)\left(e^{-i\omega T}+e^{-3i\omega T}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2(x_b+x_a)e^{-2i\omega T}\right.$

$$\left.+\frac{1}{6}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^3(x_b+x_a)^3e^{-3i\omega T}\right] \tag{4.43}$$

และ $K=\left[1+\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}(e^{-i\omega T}+e^{-3i\omega T})+\frac{1}{2}\left(\frac{2f}{m\omega^3\hbar}\right)^2e^{-2i\omega T}+\frac{1}{6}\left(\frac{2f}{m\omega^3\hbar}\right)^3e^{-3i\omega T}\right]$ (4.44)

นำ I และ K มาคูณกันแล้ว เอาเฉพาะเลขชี้กำลังไม่เกิน 3 เท่านั้นจะได้

$$I\times K=1+\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-i\omega T}+\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-3i\omega T}+\frac{1}{2}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^2e^{-2i\omega T}+\frac{1}{6}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^3e^{-3i\omega T}$$

$$-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)e^{i\omega T}-\frac{4f^3}{m\omega^4\hbar^2}(x_b+x_a)e^{-2i\omega T}-\frac{f}{\omega\hbar}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^2(x_b+x_a)e^{-3i\omega T}$$

$$-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)e^{-3i\omega T}+\frac{1}{2}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2(x_b+x_a)^2e^{-2i\omega T}+\left(\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\right)\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2(x_b+x_a)^2e^{-3i\omega T}$$

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^3(x_b+x_a)^3e^{-3i\omega T}+\ldots \tag{4.45}$$

เอาสมการ (4.42) × (4.45) จะได้ แล้วให้ Q = (4.42) × (4.45)

$$Q=\left[1+\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}e^{-i\omega T}+\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}e^{-3i\omega T}+\frac{1}{2}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^2 e^{-2i\omega T}\right.$$

$$+\frac{1}{6}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^3 e^{-3i\omega T}+\frac{1}{2}e^{-2i\omega T}+\frac{m\omega x_a x_b}{\hbar}e^{-3i\omega T}-\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-2i\omega T}$$

$$-\frac{4m\omega x_a x_b f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-3i\omega T}+\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)e^{-2i\omega T}+\frac{4mx_a x_b f}{\omega\hbar^2}e^{-3i\omega T}$$

$$\left.-\frac{m\omega}{\hbar}(x_b^2+x_b^2)e^{-2i\omega T}-\frac{2m^2\omega^2 x_a x_b}{\hbar^2}(x_b^2+x_b^2)e^{-3i\omega T}\right]\times$$

$$\left[1+\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-i\omega T}+\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-3i\omega T}+\frac{1}{2}\left(\frac{2f}{m\omega^3\hbar}\right)^2 e^{-2i\omega T}+\frac{1}{6}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^3 e^{-3i\omega T}\right.$$

$$-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)e^{i\omega T}-\frac{4f^3}{m\omega^4\hbar^2}(x_b+x_a)e^{-2i\omega T}-\frac{f}{\omega\hbar}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)(x_b+x_a)e^{-3i\omega T}$$

$$-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)e^{-3i\omega T}+\frac{1}{2}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2(x_b+x_a)^2 e^{-2i\omega T}$$

$$\left.+\left(\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\right)\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2(x_b+x_a)^2 e^{-3i\omega T}-\frac{1}{6}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^3(x_b+x_a)^3 e^{-3i\omega T}\right]$$

(4.46)

จาก
$$Q=\Bigg[1+\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-i\omega T}+\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-3i\omega T}+\frac{1}{2}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^2 e^{-2i\omega T}+\frac{1}{6}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)e^{-3i\omega T}$$

$$-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)e^{-i\omega T}-\frac{4f^3}{m\omega^4\hbar^2}(x_b+x_a)e^{-2i\omega T}$$

$$-\frac{f}{\omega\hbar}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^2(x_b+x_a)e^{-3i\omega T}-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)e^{-3i\omega T}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2(x_b+x_a)^2e^{-2i\omega T}+\left(\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\right)\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2(x_b+x_a)^2e^{-3i\omega T}$$

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^3(x_b+x_a)^3e^{-3i\omega T}+\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}e^{-i\omega T}+\frac{4m\omega x_a x_b f^2}{m\omega^3\hbar^2}e^{-2i\omega T}$$

$$+\frac{m\omega x_a x_b}{\hbar}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^2e^{-3i\omega T}-\frac{4m\omega x_a x_b}{\omega\hbar^2}(x_b+x_a)e^{-2i\omega T}$$

$$-\frac{8m\omega x_a x_b f^3}{m\omega^4\hbar^2}e^{-3i\omega T}+\frac{m\omega x_a x_b}{\hbar}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2(x_b+x_a)^2e^{-3i\omega T}$$

$$+\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}e^{-3i\omega T}+\frac{1}{2}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^2e^{-2i\omega T}$$

$$+\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^2e^{-3i\omega T}-\frac{f}{\omega\hbar}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^2(x_b+x_a)e^{-3i\omega T}$$

$$+\frac{1}{6}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^3e^{-3i\omega T}+\frac{1}{2}e^{-2i\omega T}+\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-3i\omega T}-\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)e^{-3i\omega T}$$

$$+\frac{m\omega x_a x_b}{\hbar}e^{-3i\omega T}-\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-2i\omega T}+\frac{4f^4}{m^2\omega^6\hbar^2}e^{-3i\omega T}$$

$$+\frac{4f^3}{m\omega^4\hbar}(x_b+x_a)e^{-3i\omega T}-\frac{4m\omega x_a x_b}{m\omega^3\hbar^2}e^{-3i\omega T}+\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)e^{-2i\omega T}$$

$$+\frac{4f^3}{m\omega^4\hbar^2}(x_b+x_a)e^{-3i\omega T}-\frac{4f^2}{\omega^2\hbar^2}(x_b+x_a)^2e^{-3i\omega T}+\frac{4m\omega x_a x_b}{\omega\hbar^2}e^{-3i\omega T}$$

$$-\frac{m\omega}{\hbar}(x_b^2+x_b^2)e^{-2i\omega T}-\frac{2m\omega f^2}{m\omega^3\hbar^2}(x_b^2+x_b^2)e^{-3i\omega T}$$

$$\left.+\frac{2m\omega f}{\omega\hbar^2}(x_b^2+x_b^2)(x_b+x_a)e^{-3i\omega T}-\frac{2m^2\omega^2 x_a x_b}{\hbar^2}(x_b^2+x_b^2)e^{-3i\omega T}\right] \tag{4.47}$$

จากสมการ (4.47) จัดรูปใหม่แล้วแทนลงในสมการ (4.37) จะได้

$$K(b,a)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{i\omega T}{2}}\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_b^2+x_b^2)+\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)-\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}+\frac{iTf^2}{4m\omega^2\hbar}\right]\times$$

$$\left\{1+\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-i\omega T}-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)e^{-i\omega T}+\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}e^{-i\omega T}+\frac{1}{2}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^2e^{-2i\omega T}\right.$$

$$-\frac{4f^3}{m\omega^4\hbar^2}(x_b+x_a)e^{-2i\omega T}+\frac{1}{2}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2(x_b+x_a)e^{-2i\omega T}+\frac{4m\omega x_a x_b f^2}{m\omega^3\hbar^2}e^{-2i\omega T}$$

$$-\frac{4m\omega x_a x_b f}{\omega\hbar^2}(x_b+x_a)e^{-2i\omega T}+\frac{1}{2}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^2e^{-2i\omega T}+\frac{1}{2}e^{-2i\omega T}$$

$$-\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-2i\omega T}+\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)e^{-2i\omega T}-\frac{m\omega}{\hbar}\left(x_b^2+x_a^2\right)e^{-2i\omega T}+\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-3i\omega T}$$

$$+\frac{1}{6}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^3e^{-3i\omega T}-\frac{f}{\omega\hbar}\left(\frac{2f}{m\omega^3\hbar}\right)^2(x_b+x_a)e^{-3i\omega T}-\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2(x_b+x_a)^2e^{-3i\omega T}$$

$$+\left(\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\right)\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)(x_b+x_a)^2e^{-3i\omega T}-\frac{1}{6}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^3(x_b+x_a)^3e^{-3i\omega T}$$

$$+\frac{m\omega x_a x_b}{\hbar}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)e^{-3i\omega T}-\frac{8m\omega x_a x_b f^3}{m\omega^4\hbar^2}e^{-3i\omega T}$$

$$+\frac{m\omega x_a x_b}{\hbar}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2(x_b+x_a)^2e^{-3i\omega T}+\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}e^{-3i\omega T}$$

$$+\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^2e^{-3i\omega T}-\frac{f}{\omega\hbar}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^2(x_b+x_a)e^{-3i\omega T}$$

$$+\frac{1}{6}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^3e^{-3i\omega T}+\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}e^{-3i\omega T}-\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)e^{-3i\omega T}$$

$$+\frac{m\omega x_a x_b}{\hbar}e^{-3i\omega T}+\frac{4f^4}{m^2\omega^6\hbar^2}e^{-3i\omega T}+\frac{4f^3}{m\omega^4\hbar^2}(x_b+x_a)e^{-3i\omega T}$$

$$-\frac{4m\omega x_a x_b f^2}{m\omega^3\hbar^2}e^{-3i\omega T}+\frac{4f}{m\omega^4\hbar^2}(x_b+x_a)e^{-3i\omega T}-\frac{4f^2}{\omega^2\hbar^2}(x_b+x_a)^2e^{-3i\omega T}$$

$$+\frac{4m\omega x_a x_b}{\omega\hbar^2}e^{-3i\omega T}-\frac{2m\omega f^2}{m\omega^3\hbar^2}(x_b+x_a)e^{-3i\omega T}+\frac{2m\omega f}{\omega\hbar^2}(x_b^2+x_b^2)(x_b+x_a)e^{-3i\omega T}$$

$$-\frac{2m^2\omega^2 x_a x_b}{\hbar^2}(x_b^2+x_b^2)e^{-3i\omega T}\Bigg\} \tag{4.48}$$

จากสมการ (4.48) ฟังก์ชันชี้กำลัง ที่มีเลขชี้กำลังเท่ากับ 3 มีจำนวนเทอมมากเพื่อให้ง่าย เราจะพิจารณาถึงอันดับที่ 3 ก็พอ ต่อจากนั้นก็หาสมการทั่วไปจะง่ายกว่า ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$K(b,a)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{i\omega T}{2}}\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_b^2+x_b^2)+\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)-\frac{f^2}{m\omega^2\hbar}+\frac{iTf^2}{2m\omega^2\hbar}\right]\times$$

$$\left\{1+\left[\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)+\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right]e^{-i\omega T}\right.$$

$$+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^2-\frac{4f^3}{m\omega^4\hbar^2}(x_b+x_a)+\frac{1}{2}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2(x_b+x_a)^2+\frac{4m\omega x_a x_b f^2}{m\omega^3\hbar^2}\right.$$

$$-\frac{4m\omega x_a x_b f}{\omega\hbar^2}(x_b+x_a)+\frac{1}{2}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}+\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)$$

$$\left.\left.-\frac{m\omega}{\hbar}(x_b^2+x_b^2)\right]e^{-2i\omega T}\right\} \tag{4.49}$$

จากสมการ $K(x,t;x',t')=\sum_n \psi_n(x)\psi_n^*(x')e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t-t')}$ (4.50)

เปรียบเทียบ เทียบเทอมแรกทางขวามือของสมการ (4.49) กับ ขวามือของสมการ (4.50) จะได้

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{i\omega T}{2}}e^{\frac{iTf^2}{2m\omega^2\hbar}}\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_b^2+x_b^2)+\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)-\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\right]=\psi_0(x_b)\psi_0^*(x_a)e^{-\frac{i}{\hbar}E_0(t_b-t_a)}$$

แยกพิจารณาเฉพาะส่วนของระดับพลังงาน

$$e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 T}=e^{-\frac{i\omega T}{2}+\frac{iTf^2}{2m\omega^2\hbar}}$$

$$-\frac{i}{\hbar}E_0\mathrm{T} = -\frac{i\mathrm{T}}{\hbar}\left(\frac{\omega\hbar}{2} - \frac{f^2}{2m\omega^2}\right)$$

ดังนั้น
$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{f^2}{2m\omega^2} \tag{4.51}$$

จากนั้นก็พิจารณา ฟังก์ชันคลื่น

$$\psi_0(x_a)\psi_0^*(x_a) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x_b^2 - \frac{m\omega}{2\hbar}x_b^2 + \frac{f}{\omega\hbar}x_b + \frac{f}{\omega\hbar}x_a - \frac{f^2}{2m\omega^3\hbar} - \frac{f^2}{2m\omega^3\hbar}\right] \tag{4.52}$$

จากสมการ (4.52) จะได้

$$\psi_0(x_b) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x_b^2 + \frac{f}{\omega\hbar}x_b - \frac{f^2}{2m\omega^3\hbar}\right] \tag{4.53}$$

$$\psi_0^*(x_b) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x_a^2 + \frac{f}{\omega\hbar}x_a - \frac{f^2}{2m\omega^3\hbar}\right] \tag{4.54}$$

ดังนั้น เราจะได้ ทั้งฟังก์ชันคลื่นและระดับพลังงาน $n = 0$ คือ

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} - \frac{f^2}{2m\omega^2} \quad \text{และ} \quad \psi_0(x_b) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x_b^2 + \frac{f}{\omega\hbar}x_b - \frac{f^2}{2m\omega^3\hbar}\right]$$

$$\psi_0^*(x_a) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x_a^2 + \frac{f}{\omega\hbar}x_a - \frac{f^2}{2m\omega^3\hbar}\right]$$

พิจารณา สมการ (4.49) ในเทอม

$$\psi_1(x_b)\psi_1^*(x_a)e^{-\frac{i}{\hbar}E_1\mathrm{T}} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\omega\mathrm{T}}{2}} e^{\frac{i\mathrm{T}f^2}{2m\omega^2\hbar}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_b^2+x_a^2)+\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)-\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\right]$$

$$\left[\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)+\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right]e^{i\omega\mathrm{T}}$$

พิจารณาเทอมของพลังงาน จะได้

$$e^{-\frac{i}{\hbar}E_1\mathrm{T}} = e^{-\frac{i\mathrm{T}}{\hbar}\left[\left(\hbar\omega+\frac{i\hbar\omega}{2}\right)-\frac{f^2}{2m\omega^2}\right]}$$

ฉะนั้น

$$E_1 = \left(1+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega-\frac{f^2}{2m\omega^2} \tag{4.55}$$

ในส่วนของฟังก์ชันคลื่น $\psi_1(x_b)\psi_1(x_a)$ พิจารณาจาก

$$\psi_1(x_b)\psi_1^*(x_a) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_b^2+x_b^2)+\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)-\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\right]$$

$$\left[\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)+\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right] \tag{4.56}$$

โดยพิจาณาเฉพาะเทอม $\left[\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)+\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right]$ ทำการจัดรูปแบบใหม่จะได้

$$\left[\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}-\frac{2f^2m\omega^2}{mf\omega^3\hbar}(x_b+x_a)+\frac{2m^2\omega^4 f^2 x_a x_b}{m\omega^3\hbar f^2}\right] \tag{4.57}$$

$$\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\left[1-\frac{m\omega^2}{f}(x_b+x_a)+\frac{m^2\omega^4 x_a x_b}{f^2}\right]$$

$$\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\left[1-\frac{m\omega^2}{f}x_b-\frac{m\omega^2}{f}x_a+\frac{m^2\omega^4x_ax_b}{f^2}\right]$$

$$\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\left(\frac{m\omega^2}{f}x_b-1\right)\left(\frac{m\omega^2}{f}x_a-1\right)=\left(\frac{2f}{m\omega^3\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2f}{m\omega^3\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m\omega^2}{f}x_b-1\right)\left(\frac{m\omega^2}{f}x_a-1\right)$$

(4.58)

แทนสมการ (4.58) ในสมการ (4.56)

$$\psi_1(x_b)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x_b^2+\frac{f}{\omega\hbar}x_b-\frac{f^2}{2m\omega^2\hbar}\right]\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m\omega^2}{f}x_b-1\right)$$

$$\psi_1(x_b)=\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m\omega^2}{f}x_b-1\right)\psi_0(x_b) \tag{4.59}$$

$$\psi_1^*(x_a)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x_a^2+\frac{f}{\omega\hbar}x_a-\frac{f^2}{2m^3\omega\hbar}\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m\omega^2}{f}x_a-1\right)$$

$$\psi_1^*(x_a)=\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m\omega^2}{f}x_a-1\right)\psi_1^*(x_a) \tag{4.60}$$

สำหรับ $n=2$ จะได้ $E_2=\left(2+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega-\frac{f^2}{2m\omega^2}$

จะได้สมการของระดับพลังงานที่มีรูปแบบทั่วไปคือ ส่วน $\psi_2(x_b)\psi_2^*(x_a)$ **เราจะพิจารณาเทอม**

$$\frac{1}{2}-\frac{2f^2}{m\omega^2\hbar}+\frac{1}{2}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^2+\frac{2f}{\omega\hbar}x_b+\frac{2f}{\omega\hbar}x_a-\frac{m\omega}{\hbar}x_b^2-\frac{m\omega}{\hbar}x_a^2$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{2m\omega x_ax_b}{\hbar}\right)^2-\frac{4f^3}{m\omega^4\hbar^2}x_b-\frac{4f}{m\omega^4\hbar^2}x_a+\frac{1}{2}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2x_a^2$$

$$+\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2 x_a x_b + \frac{1}{2}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2 x_a^2 + \frac{4f^2 x_a x_b}{\omega^2\hbar^2} - \frac{4m x_a x_b^2 f}{\hbar^2} - \frac{4mf x_a x_b^2}{\hbar^2}\Bigg]$$

$$=\Bigg[\frac{1}{2} - \frac{2f^2}{m\omega^3\hbar} + \frac{1}{2}\left(\frac{2f}{m\omega^3\hbar}\right)^2 + \frac{2f}{\omega\hbar}x_b - \frac{m\omega}{\hbar}x_b^2 - \frac{4f}{m\omega^4\hbar^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2$$

$$+\frac{2f}{\omega\hbar}x_a - \frac{m\omega}{\hbar}x_a^2 - \frac{4f^3}{m\omega^4\hbar^2}x_a + \frac{1}{2}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2 x_b^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^2$$

$$-\frac{4mf}{\hbar^2}x_a x_b^2 - \frac{4mf}{\hbar^2}x_a^2 x_b + 2\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2 x_a x_b\Bigg] \tag{4.62}$$

จากสมการ (4.62) จัดรูปแบบใหม่เป็น

$$\frac{1}{2}\Bigg[1 - \frac{4f^2}{m\omega^2\hbar} + \frac{4f^4}{m^2\omega^2\hbar^2} + \frac{4fx_b}{\omega\hbar} - \frac{2m\omega}{\hbar}x_b^2 - \frac{8f^3}{m\omega^4\hbar}x_b + \frac{4f^2}{\omega^2\hbar}x_b^2 + \frac{4fx_a}{\omega\hbar}$$

$$-\frac{2m\omega}{\hbar}x_a^2 - \frac{8f^2}{m\omega^4\hbar^2}x_a + \frac{4f}{\omega^2\hbar^2}x_a^2 + \frac{4m^2\omega^2 x_a^2 x_b^2}{\hbar^2} - \frac{8mf}{\hbar}x_a x_b^2$$

$$-\frac{8mf}{\hbar^2}x_a^2 + x_b + \frac{16f^2}{\omega^2\hbar^2}x_a x_b\Bigg] \tag{4.63}$$

จัดให้อยู่ 2 เทอม จะได้

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2m\omega x_b^2}{\hbar} - \frac{4f}{\omega\hbar}x_b + \frac{2f^2}{m\omega^2\hbar} - 1\right)\left(\frac{2m\omega x_a^2}{\hbar} - \frac{4fx_a}{\omega\hbar} + \frac{2f^2}{m\omega^3\hbar} - 1\right) \tag{4.64}$$

จากสมการ (4.64) จะได้ฟังก์ชันคลื่น

$$\psi_2(x_b)\psi_a^*(x_a) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_b^2 + x_b^2) + \frac{f}{\omega\hbar}(x_b + x_a) - \frac{f^2}{m\omega^2\hbar}\right] \times$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2m\omega x_b^2}{\hbar} - \frac{4fx_b}{\omega\hbar} + \frac{2f^2}{m\omega^3\hbar} - 1\right)\left(\frac{2m\omega x_b^2}{\hbar} - \frac{4fx_a}{\omega\hbar} + \frac{2f^2}{m\omega^3\hbar} - 1\right)\right] \qquad \textbf{(4.65)}$$

$$\psi_2(x_b) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x_b^2 + \frac{f}{\omega\hbar}x_b - \frac{f}{2m\omega^3\hbar}\right] \times \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left(\frac{2m\omega x_b^2}{\hbar} - \frac{4f}{\omega\hbar}x_b + \frac{2f^2}{m\omega^3\hbar} - 1\right)$$

$$\psi_2(x_b) = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x_b^2 - \frac{4f}{\omega\hbar}x_b + \frac{2f^2}{m\omega^3\hbar} - 1\right)\psi_0(x_b) \qquad \textbf{(4.66)}$$

$$\psi_2^*(x_a) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x_a^2 + \frac{f}{\omega\hbar}x_a - \frac{f}{2m\omega^3\hbar}\right] \times \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\times \left(\frac{2m\omega x_a^2}{\hbar} - \frac{4f}{\omega\hbar}x_a + \frac{2f^2}{m\omega^3\hbar} - 1\right)$$

$$\psi_2^*(x_a) = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x_a^2 - \frac{4f}{\omega\hbar}x_a + \frac{2f^2}{m\omega^3\hbar} - 1\right)\psi_0^*(x_a) \qquad \textbf{(4.67)}$$

สำหรับ $n=3$ จะได้ $E_3=\left(3+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega-\frac{f^2}{2m\omega^2}$

จะได้สมการของระดับพลังงานที่มีรูปแบบทั่วไป คือ ส่วน $\psi_3(x_b)\psi_3^*(x_a)$ โดยเราจะพิจารณาเทอม

$$\left[\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}+\frac{1}{6}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^3-\frac{f}{\omega\hbar}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^2(x_b+x_a)-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)\right.$$

$$+\left(\frac{f^2}{m\omega^2\hbar}\right)\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2(x_b+x_a)^2-\frac{1}{6}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^3(x_b+x_a)^3+\frac{m\omega x_a x_b}{\hbar}\left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^2$$

$$-\frac{8m\omega x_a x_b f^3}{m\omega^4\hbar^3}(x_b+x_a)+\frac{m\omega x_a x_b}{\hbar}\left(\frac{2f}{\omega\hbar}\right)^2(x_b+x_a)^2+\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}$$

$$+\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^2-\frac{f}{\omega\hbar}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^2(x_b+x_a)+\frac{1}{6}\left(\frac{2m\omega x_a x_b}{\hbar}\right)^3$$

$$+\frac{f^2}{m\omega^2\hbar}-\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)+\frac{m\omega x_a x_b}{\hbar}-\frac{4f^4}{m^2\omega^6\hbar^2}+\frac{4f^3}{m\omega^4\hbar^2}(x_b+x_a)$$

$$-\frac{4m\omega x_a x_b f^2}{m\omega^3\hbar}+\frac{4f^3}{m\omega^4\hbar^2}(x_b+x_a)-\frac{4f^2}{\omega^2\hbar^2}(x_b+x_a)^2$$

$$+\frac{4m\omega f x_a x_b}{\omega\hbar^2}(x_b+x_a)-\frac{2m\omega f^2}{m\omega^3\hbar^2}(x_b^2+x_b^2)-\frac{2m\omega f}{\omega\hbar^2}(x_b^2+x_b^2)(x_b+x_a)$$

$$\left.-\frac{2m^2\omega^2 x_a x_b}{\hbar^2}(x_b^2+x_b^2)\right]$$

กระจายเทอม เพื่อยุบเทอม

$$= \frac{3f^2}{m\omega^3\hbar} - \frac{4f^4}{m^2\omega^6\hbar^2} + \frac{8}{6}\frac{f^6}{m^3\omega^9\hbar^3} - \frac{4f^5}{m^2\omega^7\hbar^3}(x_b + x_a) - \frac{2f}{\omega\hbar}(x_b + x_a)$$

$$+ \frac{4f^4}{m\omega^5\hbar^3}(x_b^2 + x_b^2) + \frac{8f^4}{m\omega^5\hbar^3}x_b x_a - \frac{8}{6}\frac{f^2}{\omega^3\hbar^3}(x_b^2 + x_b^2) - \frac{8\cdot 3}{6}\left(\frac{f}{\omega\hbar}\right)^3$$

$$- \frac{8\cdot 3}{6}\left(\frac{f}{\omega\hbar}\right)^3 x_b x_a^2 + \frac{4f^4}{m\omega^5\hbar^3}x_b x_a - \frac{8f^3}{\omega^3\hbar^3}x_b^2 x_a - \frac{8f^3}{\omega^3\hbar^3}x_b x_a^2 + \frac{4mf^2}{\omega\hbar^3}x_b^3 x_a$$

$$+ \frac{4mf^2}{\omega\hbar^3}x_b x_a^3 + \frac{8mf^2}{\omega\hbar^3}x_b^2 x_a^2 + \frac{2m\omega}{\hbar}x_b x_a + \frac{4mf^2}{\omega\hbar^3}x_b^2 x_a^2 - \frac{4m^2\omega f}{\hbar^2}x_b^2 x_a^2$$

$$- \frac{4m^2\omega f}{\hbar^3}x_b^2 x_a^3 + \frac{8}{6}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^3 x_b^3 x_a^3 - \frac{f}{\omega\hbar}(x_b + x_a) + \frac{m\omega}{\hbar}x_b x_a$$

$$+ \frac{4f^3}{m\omega^4\hbar^2}(x_b + x_a) - \frac{4f^2}{\omega^2\hbar^2}x_b x_a + \frac{4f^3}{m\omega^4\hbar^2}(x_b + x_a) - \frac{4f^2}{\omega^2\hbar^2}(x_b^2 + x_b^2)$$

$$- \frac{8f^2}{\omega^2\hbar^2}x_b x_a + \frac{4mf}{\hbar^2}(x_b^2 x_a + x_b x_a^2) - \frac{2f^2}{\omega^2\hbar^2}(x_b^2 + x_b^2) + \frac{2mf}{\hbar^2}(x_b^3 + x_a^3)$$

$$+ \frac{2mf}{\hbar^2}x_b^2 x_a + \frac{2mf}{\hbar^2}x_b x_a^2 - \frac{2m^2\omega^2}{\hbar^2}x_b^2 x_a - \frac{2m^2\omega^2}{\hbar^2}x_b x_a^2$$

$$= \left[\frac{3f^2}{m\omega^3\hbar} - \frac{4f^4}{m^2\omega^6\hbar^2} + \frac{8}{6}\frac{f^4}{m^3\omega^9\hbar^2} - \frac{8}{6}\left(\frac{f}{\omega\hbar}\right)^3 (x_b^3 + x_a^3) + \frac{2mf}{\hbar^2}(x_b^3 + x_a^3)\right.$$

$$+ \frac{4mf^2}{\omega\hbar^3}(x_b^3 x_a + x_b x_a^3) - \frac{4m^2\omega f}{\hbar^3}(x_b^3 x_a^2 + x_b^2 x_a^3) + \frac{8}{6}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^3 x_b^2 x_a^2$$

$$- 2\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 (x_b^3 x_a + x_b x_a^3) + \frac{4f^4}{m\omega^5\hbar^3}(x_b^2 + x_b^2) - 4\left(\frac{f^3}{\omega^3\hbar^3}\right)(x_b^2 x_a + x_b x_a^2)$$

$$-8\left(\frac{f}{\omega\hbar}\right)^3(x_b^2x_a+x_bx_a^2)+\frac{8mf^2}{\omega\hbar^3}x_b^2x_a^2+\frac{4mf^2}{\omega\hbar^3}x_b^2x_a^2$$

$$-4\left(\frac{f}{\omega\hbar}\right)^2(x_b^2+x_a^2)-2\left(\frac{f}{\omega\hbar}\right)^2(x_b^2+x_a^2)+\frac{2mf}{\hbar}(x_b^2x_a+x_bx_a^2)$$

$$+\frac{4mf}{\hbar^2}(x_b^2x_a+x_bx_a^2)-\frac{4f^2}{m^2\omega^7\hbar^3}(x_b+x_a)-\frac{2f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)-\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)$$

$$+\frac{8f^3}{m\omega^4\hbar^2}(x_b+x_a)+\frac{8f^4}{m\omega^5\hbar^3}x_bx_a+\frac{4f^4}{m\omega^5\hbar^3}x_bx_a+\frac{2m\omega}{\hbar}x_bx_a$$

$$\left.-4\left(\frac{f}{\omega\hbar}\right)^2x_bx_a-8\left(\frac{f}{\omega\hbar}\right)^2x_bx_a\right]$$

$$=\left[\frac{3f^2}{m\omega^3\hbar}-\frac{4f^4}{m^2\omega^6\hbar^2}+\frac{8}{6}\frac{f^6}{m^3\omega^9\hbar^2}+\frac{8}{6}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^3x_b^3x_a^3-\frac{8}{6}\left(\frac{f}{\omega\hbar}\right)^3(x_b^3+x_a^3)\right.$$

$$+\frac{2mf}{\hbar^2}(x_b^3+x_a^3)-\frac{4m^2\omega f}{\hbar^3}(x_b^3x_a^2+x_b^2x_a^3)-2\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2(x_b^3x_a+x_bx_a^3)$$

$$-\frac{4mf^2}{\omega\hbar^3}(x_b^3x_a+x_bx_a^3)+\frac{12mf^2}{\omega\hbar^3}x_b^2x_a^2+\frac{4f^4}{m\omega^5\hbar^3}(x_b^2+x_a^2)$$

$$-12\left(\frac{f}{\omega\hbar}\right)^3(x_b^2x_a+x_bx_a^2)-6\left(\frac{f}{\omega\hbar}\right)^2(x_b^2+x_a^2)+\frac{6mf}{\hbar}(x_b^2x_a+x_bx_a^2)$$

$$-\frac{4f^5}{m^2\omega^7\hbar^3}(x_b+x_a)-\frac{3f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)+\frac{8f^3}{m\omega^4\hbar^2}(x_b+x_a)+\frac{12f^4}{m\omega^5\hbar^3}x_bx_a$$

$$\left.+\frac{3m\omega}{\hbar}x_bx_a-\frac{12f^2}{\omega^2\hbar^2}x_bx_a\right]$$

$$
=\frac{3f^2}{m\omega^3\hbar}\left[1-\frac{4}{3}\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}+\frac{4}{9}\frac{f^4}{m^2\omega^6\hbar^2}+\frac{4}{9}\left(\frac{m^2\omega^3}{\hbar f}\right)^2 x_b^3x_a^3-\frac{4}{9}\frac{mf}{\hbar^2}(x_b^3+x_a^3)\right.
$$

$$
+\frac{2}{3}\frac{m^2\omega^3}{\hbar f}(x_b^3+x_a^3)-\frac{4}{3}\frac{m^3\omega^4}{\hbar^2 f}(x_b^3x_a^2+x_b^2x_a^3)-\frac{2}{3}\frac{m^3\omega^5}{\hbar f^2}(x_b^3x_a+x_bx_a^3)
$$

$$
+\frac{4}{3}\left(\frac{m^8\omega}{\hbar}\right)^2(x_b^3x_a+x_bx_a^3)+4\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2 x_b^2x_a^2+\frac{4}{3}\left(\frac{f}{\omega\hbar}\right)^2(x_b^2+x_a^2)
$$

$$
+\frac{2m^2\omega^3}{\hbar f}(x_b^2x_a+x_ax_a^2)-\frac{4mf}{\hbar^2}(x_b^2x_a+x_ax_a^2)-\frac{2m\omega}{\hbar}(x_b^2+x_a^2)
$$

$$
-\frac{4}{3}\frac{f^3}{m\omega^4\hbar^2}(x_b+x_a)-\frac{m\omega^2}{f}(x_b+x_a)+\frac{8}{3}\frac{f}{\omega\hbar}(x_b+x_a)+4\left(\frac{f}{\omega\hbar}\right)^2 x_bx_a
$$

$$
\left.-\frac{4m\omega}{\hbar}x_bx_a+\left(\frac{m\omega^2}{f}\right)^2 x_bx_a\right]
$$

$$
=\frac{3f^2}{m\omega^3\hbar}\left[\left(\frac{2}{3}\frac{m^2\omega^3}{\hbar f}x_b^3-\frac{2m\omega}{\hbar}x_b^2-\frac{m\omega^2}{f}x_b+\frac{2f}{\omega\hbar}x_b-\frac{2}{3}\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}+1\right)\times\right.
$$

$$
\left.\left(\frac{2}{3}\frac{m^2\omega^3}{\hbar f}x_b^3-\frac{2m\omega}{\hbar}x_b^2-\frac{m\omega^2}{f}x_a+\frac{2f}{\omega\hbar}x_a-\frac{2}{3}\frac{f^2}{m\omega^3\hbar}+1\right)\right]
$$

$$
\psi_3(x_b)=\sqrt{\frac{3f^2}{m\omega^3\hbar}}\left(\frac{2}{3}\frac{m^2\omega^3}{\hbar f}x_b^3-\frac{2m\omega}{\hbar}x_b^2-\frac{m\omega^2}{f}x_b+\frac{2f}{\omega\hbar}x_b-\frac{2}{3}\frac{f^2}{m\omega^2\hbar}+1\right)\psi_0(x_b)
$$

$$
\psi_3^*(x_a)=\sqrt{\frac{3f^2}{m\omega^3\hbar}}\left(\frac{2}{3}\frac{m^2\omega^3}{\hbar f}x_a^3-\frac{2m\omega}{\hbar}x_a^2-\frac{m\omega^2}{f}x_a+\frac{2f}{\omega\hbar}x_a-\frac{2}{3}\frac{f^2}{m\omega^2\hbar}+1\right)\psi_0^*(x_a)
$$

กล่าวโดยสรุปเราได้ระดับพลังงานที่เป็นไปได้ทุกระดับดังนี้

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{f^2}{2m\omega^2} \qquad n = 0,1,2,3,..... \tag{4.68}$$

และฟังก์ชันคลื่นสี่สถานะแรก ดังนี้

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + \frac{f}{\omega\hbar}x - \frac{f^2}{m\omega^3\hbar}\right] \tag{4.69}$$

$$\psi_1(x) = \left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m\omega^2}{f}x - 1\right)\psi_0(x) \tag{4.70}$$

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - \frac{4f}{\omega\hbar}x + \frac{2f^2}{m\omega^3\hbar} - 1\right)\psi_0(x) \tag{4.71}$$

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{3f^2}{m\omega^3\hbar}}\left(\frac{2}{3}\frac{m^2\omega^3}{\hbar f}x^3 - \frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - \frac{m\omega^2}{f}x + \frac{2f}{\omega\hbar}x - \frac{2}{3}\frac{f^2}{m\omega^2\hbar} + 1\right)\psi_0(x) \tag{4.72}$$

ในทางปฏิบัติเราสามารถกระจายสมการ (4.5) ออกเป็นอนุกรมจนถึงเลขควอนตัม n ใด ๆ ก็ได้แต่มีความยุ่งยากในการหา $\psi_n(x)$ จะตามมา ตามจำนวน n ที่เพิ่มขึ้น

บทที่ 5

สรุปและอภิปรายผล

ผลเฉลยของปัญหาฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ภายใต้แรงคงที่ โดยใช้ทฤษฎีอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมนโดยที่ลากรางเกียนของระบบดังกล่าวเขียนอยู่ในรูป

$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} + fx$ พบว่าตัวแผ่กระจายสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ดังนี้

$$K(b,a) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega\mathrm{T}}\Big[(x_b^2 + x_a^2)\cos\omega\mathrm{T} - 2x_a x_b$$

$$+\frac{2f}{m}(x_b + x_a)(1-\cos\omega\mathrm{T}) - \frac{2f^2}{m^2\omega^4}(1-\cos\omega\mathrm{T}) + \frac{f^2\mathrm{T}\sin\omega\mathrm{T}}{m^2\omega^3}\Big]$$

โดยที่ $T = t_b - t_a$

จากตัวแผ่กระจายที่ได้สามารถนำมาคำนวณหาระดับพลังงานที่เป็นไปได้และฟังก์ชันคลื่น โดยที่ระดับพลังงานที่เป็นไปได้คือ

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{f^2}{2m\omega^2} \qquad n = 0,1,2,3,.....$$

อย่างไรก็ตาม ในที่นี้ได้แสดงให้เห็นฟังชันคลื่นเพียงสี่สถานะเท่านั้น คือ

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + \frac{f}{\omega\hbar}x - \frac{f^2}{2m\omega^3\hbar}\right]$$

$$\psi_1(x) = \left(\frac{2f^2}{m\omega^3\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m\omega^2}{f}x - 1\right)\psi_0(x)$$

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - \frac{4f}{\omega\hbar}x + \frac{2f^2}{m\omega^3\hbar} - 1\right)\psi_0(x)$$

$$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{3f^2}{m\omega^3\hbar}}\left(\frac{2}{3}\frac{m^2\omega^3}{\hbar f}x^3 - \frac{2m\omega}{\hbar}x^2 - \frac{m\omega^2}{f}x + \frac{2f}{\omega\hbar}x - \frac{2}{3}\frac{f^2}{m\omega^2\hbar} + 1\right)\psi_0(x)$$

ถ้าระดับพลังงานสูงขึ้นเท่าใด ความยุ่งยากในการคำนวณยิ่งเพิ่มมากขึ้นเท่านั้นในงานวิจัยนี้เราได้แสดงให้เห็นถึงศักยภาพของทฤษฎีอินทิเกรตตามเส้นทางในการคำนวณระดับพลังงานและฟังก์ชันคลื่นต่อกรณีที่วิธีการคำนวณของชเรอดิงเงอร์มีข้อจำกัด อย่างไรก็ตามในที่นี้เราได้แสดงให้เห็นถึงการคำนวณฟังก์ชันคลื่นสถานะพื้นถึงสถานะตื่นตัวที่ 3 เท่านั้น

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

นิคม ชูศิริ. (2539). อินทิกรัลตามเส้นทางของอนุภาคไฟฟ้าภายใต้แรงฮาร์มอนิกและสนามแม่เหล็กคงที่. รายงานการวิจัย. สงขลา : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ภาคใต้.

นิคม ชูศิริ. (2540). ตัวแผ่กระจายของอิเล็กตรอนภายใต้อิทธิพลของแรงฮาร์มอนิก สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้า.รายงานการวิจัย. สงขลา : มหาวิทยาลัยทักษิณ.

นิคม ชูศิริ. (2541). อินทิกรัลตามเส้นทางของก๊าซอิเล็กตรอนในระบบสองมิติภายใต้อิทธิพลของแรงฮาร์มอนิก สนามแม่เหล็ก สนามไฟฟ้าและศักย์ที่ไร้ระเบียบ. รายงานการวิจัย. สงขลา : มหาวิทยาลัยทักษิณ.

นิคม ชูศิริ. (2548). กลศาสตร์ควอนตัม:แนวคิดและการประยุกต์ 1. ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์. มหาวิทยาลัยทักษิณ.

นิพนธ์ ตั้งประเสริฐ. (2542). กลศาสตร์ควอนตัม 1. ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์. มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

วิรุฬห์ สายคณิต. (2525). ทฤษฎีควอนตัม. ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อภิชาติ พัฒนวิริยะพิศาล. (2547). ฟิสิกส์แผนใหม่. ภาควิชาฟิสิกส์และวิทยาศาสตร์ทั่วไป คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี.

Choosiri, N. and Sayakanit, V. (1984). Path Integrals of the Hydrogen Atom. Thai Journal of Physics., 1(1) , 1-13.

Feynman, R.P. and Hibbs, A.R. (1965). Quantum Mechanics and Path Integrals. New York : McGraw-Hill.

Goodman, M. (1981). Path Integral Solution of the Square Well. Am. J. Phys., 49(9), 843-847.

Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. (1965). Table of Integrals, Seriers and Products.4th ed. New York : Acadamic Press.

Ho, R. and Inomata, A. (1982). Phys. Rev. Lett., 48(4), 231.

Krane,K.(1996).Modern Physics John Wiley Sons, Inc.

Liboff, R.L. (1993). Introductory Quantum Mechanics. Reading : Addision-Wesley.

Messiah, A. (1961). Quantum Mechanics I. New York : Wiley.

Pauli, W. (1952). Ausgewalte Kapitel de Feldquantiserung (Lecture note). Zurich : ETH. 139.

Tipler,P.A.(1992).Elementary Modern Physics. New York: Worth Publishers,Inc.

van Vleck, J.H. (1978). Proc. Natn. Acad. Sci., 14,178.

ภาคผนวก

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ - ชื่อสกุล	นางสาวพรศิริ ทองแก้ว
วัน เดือน ปีเกิด	24 กรกฎาคม พ.ศ. 2523
สถานที่เกิด	94 ตำบลศรีสุนทร อำเภอถลาง จังหวัดภูเก็ต รหัสไปรษณีย์ 83100
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	157 หมู่ 1 ตำบลบางหมาก อำเภอเมือง จังหวัดชุมพร รหัสไปรษณีย์ 86000
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	ครู
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนศรียาภัย อำเภอเมือง จังหวัดชุมพร 86000
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2548	หลักสูตรครุศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์ สถาบันราชภัฏสุราษฎร์ธานี จังหวัดสุราษฎร์ธานี
พ.ศ. 2551	หลักสูตรวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยทักษิณ จังหวัดสงขลา

แหล่งเผยแพร่วิทยานิพนธ์

1. ร่วมเสนอผลงานประเภทโปสเตอร์ในการประชุมวิชาการ มหาวิทยาลัยทักษิณ ครั้งที่ 18 ระหว่างวันที่ 25-26 กันยายน 2551 ณ โรงแรมกรีนเวิร์ลจังหวัดสงขลา
เรื่อง Path Integral for an Harmonic Oscillator in the Presence of constant Force

2. ร่วมเสนอผลงานประเภทโปสเตอร์ในการประชุมวิชาการวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 34 (วทท.34) ระหว่างวันที่ 31 ตุลาคม 2551 – 2 พฤศจิกายน 2551 ณ ศูนย์ประชุมแห่งชาติสิริกิติ์ เรื่อง Path Integral for an Harmonic Oscillator in the Presence of constant Force