การเปรียบเทียบเชิงตั้งฉากในการวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบทางเดียว

สมเกียรติ เกตุเอี่ยม*

ในการวิเคราะห์ความแปรปรวน (analysis of variance) ของการทดลองปัจจัยเดียว (single factor experiment) และมีการแจกแจงทางเดียว (one way classification) นั้นเป็นการทดสอบโดยใช้ตัวสถิติ F - test (overall F - test) โดยการตั้งสมมติฐานว่า ผลอันเกิดจากทรีทเมนต์ (Treatment) ทั้งหมดมีค่าไม่แตกต่างกัน ซึ่งก็คือค่าเฉลี่ยของประชากร โดยการตั้งสมมติฐานว่า

$$H_0 : \mu_i = \mu_j \text{ ; ทุกๆ } i \neq j$$
$$H_1 : \mu_i \neq \mu_i \text{ ; ทุกๆ } i \neq j$$

สมมติฐานข้างต้นอาจจะเป็นการทดสอบผลกระทบของแต่ละทรีทเมนต์ (treatment effect) โดยการตั้งสมมติฐานว่า

$$H_0 : \beta_i = \beta_j \text{ ; ทุกๆ}$$
$$H_1 : \beta_i \neq \beta_j \text{ ; ทุกๆ}$$

โดยเรานิยาม(define) ว่า $\beta_i \quad \mu_i - \mu$ ในรูปแบบ (model) ของ $Y_{ij} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{ij}$

เมื่อ Y_{ij} คือ ค่าสังเกตที่หน่วยทดลองที่ i ทรีทเมนต์ที่ j
β_j คือ ผลกระทบของทรีทเมนต์ที่ j
ε_{ij} คือ ความคาดเคลื่อน (error) ของหน่วยทดลองที่ i ทรีทเมนต์ j

เมื่อทำการทดสอบว่าค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ทั้ง r ทรีทเมนต์ (สมมติว่ามี r ทรีทเมนต์) แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติหรือไม่ (โดยใช้ F-test) ถ้าผลการทดสอบปรากฏว่าความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ หรือ ยอมรับสมมติฐานหลัก (accept H_0) แสดงว่าค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ทั้ง r ทรีทเมนต์ไม่แตกต่างกัน หรืออิทธิพลของทรีทเมนต์เป็นศูนย์ (ทรีทเมนต์แต่ละทรีทเมนต์มีอิทธิพลต่อหน่วยทดลองไม่แตกต่างกัน)ผู้ทดลองจะยุติการทดสอบเพียงแค่นี้แล้วสรุปผล แต่ถ้าผลการทดลองปรากฏว่า ความแตกต่างของค่าเฉลี่ย

*ผู้ช่วยศาสตราจารย์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

ของ ทรีทเมนต์มีนัยสำคัญทางสถิติหรือปฏิเสธสมมติฐานหลัก (reject H_0) แสดงว่ามีทรีทเมนต์อย่างน้อย 2 ทรีทเมนต์ที่มีค่าเฉลี่ยแตกต่างกัน แต่ไม่สามารถสรุปได้ว่าเป็นความแตกต่างของทรีทเมนต์ใด จึงต้องมีการทดสอบต่อไปเพื่อสรุปว่าค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์คู่ใดบ้างที่แตกต่างกันและค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์คู่ใดบ้างที่ไม่แตกต่างกัน การเปรียบเทียบดังกล่าวโดยทั่วไปจะมี 2 เทคนิค คือ

1. การเปรียบเทียบภายหลัง (Posteriror tests หรือ post-hoc comparisons) เป็นการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์เป็นคู่ ๆ ซึ่งเทคนิคนี้จะใช้หลังจากทดสอบสมมติฐาน แล้วปฏิเสธ H_0 ซึ่งได้แก่เทคนิคของ Duncan, LSD, Tukey เป็นต้น

2. การเปรียบเทียบแบบวางแผน (Planned comparisons หรือ Prior test) เป็นการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ที่มีการกำหนดไว้ล่วงหน้าก่อนการทดลองและเทคนิคที่มีประสิทธิภาพได้แก่ เทคนิคแบบ orthogonal contrast ซึ่งในที่นี้เราจะกล่าวถึงเฉพาะ orthogonal contrast เท่านั้น

ถ้าให้ $T_{.j}$ คือ ผลรวมทั้งหมดของทรีทเมนต์ที่ j

μ_j คือ ค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ที่ j

และ n คือ ขนาดตัวอย่างในแต่ละทรีทเมนต์

สำหรับการทดสอบในการวิเคราะห์ความแปรปวนทางเดียวในกรณีที่มี 2 ประชากรเราตั้งสมมติฐานว่า

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

และสามารถจะเขียนในรูปผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ได้ดังนี้

$$L = \mu_1 - \mu_2$$

ส่วนสมการการประมาณเขียนได้เป็น

$$\hat{L} = c_1\bar{x}_{.1} + c_2\bar{x}_{.2}$$

และการทดสอบเราใช้ F - test ทดสอบสมมุติฐานโดยที่

$$\frac{(\hat{L} - L)^2}{MSE \sum_{j=1}^{r} \frac{c_j^2}{n_j}}$$

ในกรณีที่ $n_j = n$ สามารถเขียนได้ใหม่ได้เป็น

$$\frac{(\sum_{j=1}^{r} c_j T_{.j})^2}{MSE\ (n \sum_{j=1}^{r} c_j^2)}$$

เมื่อ c_j คือสัมประสิทธิของ T

MSE คือค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (mean square of error)
ถ้าให้

$$\frac{(\sum_{j=1}^{r} c_j T_{\cdot j})^2}{n\sum_{j=1}^{r} c_j^2}$$

จะเห็นว่าเซตของ D^2 จะเป็นผลรวมเชิงเส้นของผลรวมกำลังสองของทรีทเมนต์ (sum square of treatment : SSTr) ซึ่งมี d.f = $r - 1$ โดย SSTr = $D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + \ldots + D_{r-1}^2$

นั่นคือถ้า $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_{r-1}$ เป็น $r - 1$ mutually orthogonal contrasts และทุกเทอมเท่ากับ 0 ดังนั้น D^2 จะเกี่ยวข้องกับ $L_1, L_2, L_3, \ldots, L_{r-1}$ ตัวอย่างเช่น เรามีทรีทเมนต์เท่ากับ 4 ทรีทเมนต์ เราอาจทดสอบว่า

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{หรือ} \quad \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$
$$H_0' : \mu_3 = \mu_4 \quad \text{หรือ} \quad \mu_3 - \mu_4 = 0$$
$$H_1' : \mu_3 \neq \mu_4$$
$$H_0'' : \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 = 0$$
$$H_1'' : \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 \neq 0$$

ดังนั้นจะได้ $L_1 = \mu_1 - \mu_2$, $L_2 = \mu_3 - \mu_4$ และ $L_3 = \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4$ เป็น mutually orthogonal contrast ซึ่ง D^2 คือ

$$D_1^2 = \frac{(T_{\cdot 1} - T_{\cdot 2})^2}{2n}$$

$$D_2^2 = \frac{(T_{\cdot 3} - T_{\cdot 4})^2}{2n}$$

$$D_3^2 = \frac{(T_{\cdot 1} + T_{\cdot 2} - T_{\cdot 3} - T_{\cdot 4})^2}{4n}$$

จากตัวอย่างข้างต้นเราสามารถตั้งสมมติฐานได้อีกแบบดังนี้

$$
\begin{aligned}
H_0 &: T._1 = T._2 \\
H_1 &: T._1 \neq T._2 \\
H_0' &: T._3 = T._4 \\
H_1' &: T._3 \neq T._4 \\
H_0'' &: T._1 + T._2 = T._3 + T._4 \\
H_1'' &: T._1 + T._2 \neq T._3 + T._4
\end{aligned}
$$

การเปรียบเทียบระหว่างคู่ที่จะเรียกว่าเป็นการเปรียบเทียบแบบ contrast หมายความว่า **การเปรียบเทียบแต่ละชุดเป็นอิสระต่อกัน** กล่าวคือ **จะไม่มีการเปรียบเทียบชุดใดชุดหนึ่งเข้าไปรวมอยู่ในการเปรียบเทียบชุดอื่น** ตามตัวอย่างข้างต้นจะเป็นแบบ contrast 3 ชุด ซึ่งเป็นอิสระต่อกันและการเปรียบเทียบดังกล่าวมี**ลักษณะเป็นผลรวมเชิงเส้นของทรีทเมนต์และผลรวมของสัมประสิทธิเป็น 0**

นิยามที่ 1 ฟังก์ชันเชิงเส้นใด ๆ เช่น $L_i = c_{i1}\mu_1 + c_{i2}\mu_2 + c_{i3}\mu_3 + \ldots + c_{ir}\mu_r$ จะเรียกว่าเป็น contrast ระหว่างค่าเฉลี่ย (μ) ถ้า $c_{i1} + c_{i2} + c_{i3} + \ldots + c_{ir} = 0$

นิยามที่ 2 contrast L_1 และ L_2 จะเป็น orthogonal contrasts ถ้า $c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} + \ldots + c_{1r}c_{2r} = 0$

ตัวอย่างเช่น การทดลองที่มี 4 ทรีทเมนต์ ($d.f.$ = 3) เราสามารถจัด contrast ได้ 3 ชุดคือ
ชุดที่ 1 : $L_1 = \mu_1 - \mu_4$ เป็นการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ที่ 1 และ 4
ชุดที่ 2 : $L_2 = \mu_2 - \mu_3$ เป็นการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ที่ 2 และ 3
ชุดที่ 3 : $L_3 = \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 + \mu_4$ เป็นการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ที่ 1 และ 4 กับค่าเฉลี่ยของทรีทเมนต์ที่ 2 และ 3
แต่ละ contrast จะมีสัมประสิทธิ์ดังตารางต่อไปนี้

	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	ผลรวมของสัมประสิทธิ์
L_1	+1	0	0	−1	(+1)+0+0+(−1) = 0
L_2	0	+1	−1	0	0+(+1)+(−1)+0 = 0
L_3	+1	−1	−1	+1	(+1)+(−1)+(−1)+(+1) = 0

L_1 และ L_2 เป็น orthogonal กัน เพราะว่า (+1)(0)+(0)(+1)+(0)(−1)+(−1)(0) = 0
L_1 และ L_3 เป็น orthogonal กัน เพราะว่า (+1)(+1)+(0)(−1)+(0)(−1)+(−1)(+1) = 0
L_2 และ L_3 เป็น orthogonal กัน เพราะว่า (0)(+1) +(+1)(−1)+(−1)(−1)+(0)(+1) = 0
จะเห็นว่า L_1 , L_2 , L_3 ต่างก็ตั้งฉากซึ่งกันและกัน (mutually orthogonal contrasts)

นิยามที่ 3 ถ้า $L_i = c_{i1}\mu_1 + c_{i2}\mu_2 + c_{i3}\mu_3 + \ldots + c_{ir}\mu_r$ แล้วผลรวมกำลังสองของ L_i คือ

$$SSL_i = \frac{L_i^2}{n\sum_{j=1}^{r} c_{ij}^2}$$

จะเป็นส่วนประกอบหนึ่ง (a component) ของผลรวมกำลังสองของทรีทเมนต์ ($SSTr$) โดยมี $d.f.$ =

ทฤษฎีของ orthogonal contrasts

ถ้า L_1, L_2, L_3, L_{r-1} เป็น mutually orthogonal contrasts ของ Treatment total ผลรวมกำลังสองของ L_i ($i = 1,2,3,\ldots r-1$) ย่อมเท่ากับผลรวมกำลังสองของทรีทเมนต์ ($SSTr$) นั่นคือ

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{T_{.j}^2}{n} - \frac{T_{..}^2}{N} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r-1} \left| \frac{L_i^2}{\sum_{j=1}^{r} c_{ij}^2} \right|$$

การพิสูจน์

กำหนดให้ r คือจำนวนทรีทเมนต์ (จะได้จำนวน contrasts r-1 ชุด)

n คือขนาดตัวอย่างในแต่ละทรีทเมนต์

$T_{.j}$ คือผลรวมทั้งหมดของทรีทเมนต์ที่ j ; j = 1, 2, 3,...,r

$T_{..}$ คือผลรวมทั้งหมด

จากตารางคำนวณใน one - way ANOVA

$$SSTr = \sum_{j=1}^{r} \frac{T_{.j}^2}{n} - \frac{T_{..}^2}{N}$$

ให้ contrasts k คือ $L_k = \sum_{j=1}^{r} c_{kj} T_{.j}$ โดยที่ $\sum_{j=1}^{r} c_{kj} = 0$

ให้ contrasts a คือ $L_a = \sum_{j=1}^{r} c_{aj} T_{.j}$ โดยที่ $\sum_{j=1}^{r} c_{aj} = 0$

ถ้า L_k และ L_a จะเป็น mutually orthogonal contrasts หมายความว่า L_k ตั้งฉาก L_a ก็ต่อเมื่อ

$$\sum_{j=1}^{r} c_{kj} c_{aj} = 0$$

ดังนั้นถ้าให้ $L_i\,(i = 1,2,3,\ldots,r-1)$ เป็น contrasts ใด ๆ ของ r ทรีทเมนต์ เราจะพิสูจน์ให้เห็นว่า

$$\sum_{j=1}^{r}\frac{T_{.j}^2}{n}-\frac{T_{..}^2}{N}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r-1}\left[\frac{L_i^2}{\sum_{j=1}^{r}c_{ij}^2}\right]$$

หรือ $SSTr$ = ผลรวมของ SSL_i เมื่อ L_i คือ contrast

ขั้นตอนการพิสูจน์

ให้ $Z_r = \sum_{j=1}^{r}T_{.j}$ = ผลรวมของ Treatment total = $T.$ โดยการแปลง (transformation)

L_i -> W_k และ L_i --> W_a

โดยให้ $W_k = \dfrac{L_k}{\sqrt{\sum_{j=1}^{r}c_{kj}^2}} = \sum_{j=1}^{r}b_{kj}T_{.j}$ เมื่อ $b_{kj} = \dfrac{c_{kj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{r}c_{kj}^2}}$

และ $W_a = \dfrac{L_a}{\sqrt{\sum_{j=1}^{r}c_{aj}^2}} = \sum_{j=1}^{r}b_{aj}T_{.j}$ เมื่อ $b_{aj} = \dfrac{c_{aj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{r}c_{aj}^2}}$

จะได้ W_k และ W_a ต่างก็เป็น mutually orthogonal contrasts เพราะ

$$\sum_{j=1}^{r}b_{kj} = 0,\quad \sum_{j=1}^{r}b_{aj} = 0 \quad \text{และ} \quad \sum_{j=1}^{r}b_{kj}b_{aj} = 0$$

ให้ $W = \dfrac{Z_r}{\sqrt{r}} = \dfrac{T..}{\sqrt{r}}$

พิจารณาเมทริกซ์ $\underline{W} = \underline{BT}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_{r-1} \\ W_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & & \ddots & \\ b_{r-1,1} & b_{r-1,2} & & b_{r-1,r} \\ \frac{1}{\sqrt{r}} & \frac{1}{\sqrt{r}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{r}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_{.1} \\ T_{.2} \\ T_{.3} \\ \vdots \\ T_{.r-1} \\ T_{.r} \end{bmatrix}$$

จะได้ B เป็น orthogonal matrix เมื่อ $\underline{B}^{-1} = \underline{B}'$ หรือ $B\,'\underline{B} = I = \underline{B}\;B'$ จากข้างต้น

จะได้ $b_{kj} = \dfrac{c_{kj}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{r} c_{kj}^2}}$ ยกกำลังสองได้ $b_{kj}^2 = \dfrac{c_{kj}^2}{r}$

หาผลรวม

$$\sum_{j=1}^{r} b_{kj}^2 = \sum_{j=1}^{r} \frac{c_{kj}^2}{\left|\right.} \quad \frac{\sum_{j=1}^{r} c_{kj}^2}{\sum_{j=1}^{r} c_{kj}^2} = 1$$

เช่นเดียวกัน b_{aj} จะได้ว่า $b_{aj}^2 = \dfrac{c_{aj}^2}{\sum_{j=1}^{r} c_{aj}^2}$ และ $\sum_{j=1}^{r} b_{aj}^2 = 1$ และ

$$\sum_{j=1}^{r} b_{kj}\, b_{aj} = \frac{\sum_{j=1}^{r} c_{kj}\, c_{aj}}{\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{r} c_{kj}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{r} c_{aj}^2\right)}} = 0$$

ดังนั้นจะได้

$$\underline{B}\,\underline{B}' = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{r-1,1} & b_{r-1,2} & \cdots & b_{r-1,r} \\ \frac{1}{\sqrt{r}} & \frac{1}{\sqrt{r}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{r-1,1} & \frac{1}{\sqrt{r}} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{r-1,2} & \frac{1}{\sqrt{r}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b_{1,r-1} & b_{2,r-1} & \cdots & b_{r-1,r-1} & \frac{1}{\sqrt{r}} \\ b_{1,r} & b_{2,r} & \cdots & b_{r-1,r} & \frac{1}{\sqrt{r}} \end{bmatrix}$$

นั่นคือ

$$\underline{B}\,\underline{B}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$$

$\therefore\ \underline{B}\underline{B}' = \underline{B}'\underline{B} = I$ และ $\underline{B}\,\underline{B}'\,\underline{B}\,\underline{B}' = I$ จะได้ B เป็น orthogonal matrix

จาก $\underline{W} = \underline{B}\underline{T}$ จะได้ว่า $\underline{T} = \underline{B}'\underline{W}$ แสดงว่าเมื่อกำหนดค่าเฉพาะของ $T_{.j}$ เราจะได้ว่า

$$T_{.j} = \sum_{i=1}^{r-1} b_{ij} w_i + \frac{w_r}{\sqrt{r}}$$

จาก $T_{.j} = \sum_{i=1}^{r-1} b_{ij} w_i + \frac{w_r}{\sqrt{r}}$ ยกกำลังสองได้

$$T_{.j}^2 = \left[\sum_{j=1}^{r-1} b_{ij} w_i\right]^2 + \frac{2w_r}{\sqrt{r}} \sum_{j=1}^{r-1} b_{ij} w_i + \frac{w_r^2}{r}$$

$$\sum_{j=1}^{r-1} b_{ji}^2 w_i^2 + 2 \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq 1}}^{r-1} b_{ji} w_i + \frac{2w_r}{\sqrt{r}} \sum_{j=1}^{r-1} b_{ji} w_i + \frac{w_r^2}{r}$$

หาผลบวกกำลังสองได้

$$\sum_{j=1}^{r} T_{.j}^2 = \sum_{j=1}^{r} \left[\sum_{j=1}^{r-1} b_{ji}^2 w_i^2\right] + 2 \sum_{j=1}^{r} \sum_{\substack{i=1 \\ j\neq 1}}^{r-1} b_{ji} w_i + \frac{2w_r}{\sqrt{r}} \sum_{j=1}^{r} \sum_{j=1}^{r-1} b_{ji} w_i + \sum_{i=1}^{r} \frac{w_r^2}{r}$$

เนื่องจากเป็นการหาผลรวมชนิด FINITE เราสามารถเป็น $\sum_j$ และ $\sum_i$ สลับที่กันได้

$$\sum_{j=1}^{r} T_{.j}^2 = \sum_{j=1}^{r-1} w_i^2 \sum_{j=1}^{r} b_{ji}^2 + 2 \sum_{i=1}^{r-1} w_i \sum_{j=1}^{r} b_{ji} + \frac{2w_r}{\sqrt{r}} \sum_{j=1}^{r-1} w_i \sum_{j=1}^{r} b_{ji} + w_r^2$$

แต่ $\sum_{j=1}^{r} b_{ji}^2 = 1$ และ $\sum_{j=1}^{r} b_{ji} = 0$ และ $w_r = \frac{T_{..}^2}{r}$

$$\sum_{j=1}^{r} T_{.j}^2 = \sum_{j=1}^{r-1} w_i^2 + \frac{T_{..}^2}{r}$$

$$\sum_{j=1}^{r-1} \left[\frac{L_i^2}{\sum_{j=1}^{r} c_{ij}^2}\right] + \frac{T_{..}^2}{r}$$

เอา n หารตลอดจะได้ว่า

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} T_{.j}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r-1}\left|\frac{L_i^2}{\sum_{j=1}^{r} c_{ij}^2}\right| + \frac{T_{..}^2}{rn}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} T_{.j}^2 \quad \frac{T_{..}^2}{rn} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r-1}\left|\frac{L_i^2}{\;}\right|$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r} T_{.j}^2 \quad \frac{T_{..}^2}{N} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r-1}\left|\frac{L_i^2}{\;}\right|$$

นั่นคือ $SSTr$ = ผลรวมของกำลังสองของ CONTRASTS ทั้งหมดซึ่งมีจำนวน $r-1$ ชุด

บรรณานุกรม

จรัญ จันทลักขณา. สถิติ : วิธีวิเคราะห์และวางแผนวิจัย. พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพ ฯ : บริษัท สำนักพิมพ์ไทยวัฒนาพานิช จำกัด, 2527.

ปารเมศ ชุติมา. **การออกแบบการทดลอง ทางวิศวกรรม.** กรุงเทพ ฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2545.

สุพล ดุรงค์วัฒนา. การวิเคราะห์เชิงสถิติ : **การวิเคราะห์ความแปรปรวน.** กรุงเทพ ฯ : ภาควิชาสถิติ คณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2536.

Cochran, W.G., and Cox, G.M.. **Experimental Designs.** New York : John Wiley and Sons, 1976.

Federer, W.T.. **Experimental Designs.** New York : Macmilan, 1985.