แคลคูลัสของการแปรผัน(Calculus of Variation) : การพิสูจน์กฎการสะท้อนของแสง

*รศ.ดร.นิคม ชูศิริ**

บทนำ

เส้นทางที่เชื่อมต่อระหว่างจุดตรึงคู่หนึ่งบนระนาบ เส้นทางแบบใดเป็นเส้นทางที่สั้นที่สุด บางทีผู้อ่านอาจรู้สึกขบขันเมื่อได้ยินคำถามเช่นนี้ ทั้งนี้เพราะคำตอบเป็นที่ทราบกันดีในหมู่คนทั่วไป ทว่าการพิสูจน์ความถูกต้องของคำตอบดังกล่าวมิได้เป็นเรื่องที่ง่ายนัก ในขณะเดียวกันเราอาจจะถามคำถามในรูปแบบดังกล่าวที่เกี่ยวข้องกับทรงกลม อาทิ บนผิวโลกของเรา เส้นทางระหว่างจุดคู่หนึ่งบนผิวโลก เส้นทางแบบใดเป็นเส้นทางที่สั้นที่สุดโดยวัดไปตามผิวโลก อีกครั้งหนึ่งที่หลายคนอาจทราบคำตอบว่ามันคือระยะทางตามเส้นโค้งของวงกลมใหญ่ (great circle) แต่ถ้าหากเราถูกตั้งคำถามปัญหาในทำนองเดียวกันสำหรับพื้นผิวแบบอื่น อาทิ ทรงรี(ellipsoid) หรือผิวทรงกระบอก หรือผิวของกรวย บางทีเราอาจต้องใช้เวลาพอสมควรต่อการไขปัญหาดังกล่าว เส้นโค้งที่สั้นที่สุดซึ่งเชื่อมต่อระหว่างจุดคู่หนึ่งที่ไม่ไกลกันมากนักมีชื่อเรียกว่าจีออเดซิกของพื้นผิว (geodesic of the surface) ปัญหาจีออเดซิกของพื้นผิวเป็นปัญหาที่แก้ได้โดยอาศัยแคลคูลัสของการแปรผัน (calculus of variation)

ยังมีปัญหาแบบอื่นอีกมากที่น่าสนใจ ในการทำความเข้าใจต่อปัญหาดังกล่าวเราต้องทราบว่าพื้นฐานของปัญหานั้นคืออะไร ขอได้รำลึกถึงการหาค่าต่ำสุดและสูงสุดของฟังก์ชัน $f(x)$ ในวิชาแคลคูลัสทั่วไป ซึ่งเราจะต้องหาอนุพันธ์ของ $f(x)$ ซึ่งปกติใช้สัญลักษณ์ $f'(x)$ ด้วยการจัดการให้อนุพันธ์ $f'(x)$ เป็นศูนย์ ค่าของ x ณ ตำแหน่งดังกล่าวอาจจะสอดคล้องกับจุดต่ำสุด จุดสูงสุด หรือจุดเปลี่ยนความเว้าที่มีความชันเป็นศูนย์

*รองศาสตราจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

ก็ได้เช่นกัน สมมติว่าในการแก้ปัญหาที่กำหนดมาให้อันหนึ่ง เราต้องการที่จะหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $f(x)$ สมการ $f'(x)=0$ เป็นเงื่อนไขที่จำเป็น(ทว่าอาจไม่เพียงพอ)สำหรับจุดต่ำสุดอันหนึ่ง สำหรับจุดต่ำสุดที่พึงประสงค์ เราอาจต้องหาค่าทุกค่าของ x ที่มีสมบัติ $f'(x)=0$ และต่อมาต้องอาศัยการทดสอบในเชิงคณิตศาสตร์เพื่อเสาะหาจุดต่ำสุดที่พึงประสงค์จากจุดต่ำสุด (ในย่านเล็กๆ) ทั้งมวล เราใช้คำทั่วไปว่า “จุดนิ่ง” (stationary point) สำหรับจุดใดๆ ที่มีสมบัติ $f'(x)=0$ นั่นคือจุดนิ่งเป็นจุดที่ครอบคลุมถึงจุดต่ำสุด จุดสูงสุด และจุดเปลี่ยนความเว้าที่มีความชันเป็นศูนย์ ในแคลคูลัสของการแปรผันนั้นเรามักจะตั้งคำถามขึ้นมาด้วยการกล่าวถึงปริมาณที่มีนิยามแน่นอนอันหนึ่งที่จะต้องถูกทำให้มีค่าต่ำสุด อย่างไรก็ตามสิ่งที่มักกระทำกันจริงๆ กลับกลายเป็นการกระทำที่คล้ายคลึงกับการทำให้ $f'(x)=0$ นั่นคือจัดการให้ปริมาณอันหนึ่งนิ่ง [ไม่แปรผัน(stationary)] ปัญหาที่เกิดขึ้นก็คือสิ่งที่เราได้รับนั้นเป็นค่าต่ำสุด สูงสุด หรือไม่ทั้งสองอย่างหรือเปล่า โดยทั่วไปแล้วเป็นปัญหาในเชิงคณิตศาสตร์ที่ค่อนข้างซับซ้อนทีเดียว ด้วยเหตุนี้เราจำต้องเชื่อถือหลักการในเชิงฟิสิกส์หรือเชิงเรขาคณิต อย่างไรก็ตาม ปัญหามิได้เลวร้ายจนเกินไปนัก ทั้งนี้เพราะปัญหาในเชิงประยุกต์จำนวนมากเราใช้เพียงเงื่อนไข “นิ่ง” หรือไม่แปรผันก็เป็นการเพียงพอ

ถึงตอนนี้อาจเกิดคำถามขึ้นมาว่า ปริมาณอะไรที่เราต้องการให้นิ่ง คำตอบก็คืออินทิกรัลหรือปริพันธ์อันหนึ่งที่เขียนอยู่ในรูป

$$I=\int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx \quad (\text{โดยที่ } y'=\frac{dy}{dx}) \qquad (1)$$

สัญลักษณ์ในเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการสื่อความหมายว่า ปริมาณ I นิ่งคือ $\delta I=0$ อ่านว่าการแปรผันของ I มีค่าเป็นศูนย์ หรือปริมาณ I ไม่แปรผันนั่นเอง

ปัญหาของเราก็คือ กำหนดตำแหน่ง (x_1,y_1), (x_2,y_2) และรูปแบบของฟังก์ชัน F ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x, y, y' จงหาเส้นโค้งที่ทำให้อินทิกรัล I นิ่งหรือมีค่าต่ำสุด ก่อนที่เราจะทำเช่นนี้เรามาลองพิจารณาตัวอย่างสักสองสามตัวอย่าง เราได้กล่าวถึงปัญหาของจีออ

เดซิกของพื้นผิว สมมติเราต้องการหาสมการ $y = y(x)$ ของเส้นโค้งซึ่งเชื่อมต่อจุด (x_1,y_1) และ (x_2,y_2) บนระนาบภายใต้เงื่อนไขที่ระยะทางซึ่งวัดตามเส้นโค้งมีค่าต่ำสุด ในการหาความยาวของเส้นโค้งเราหาระยะทางน้อยๆ $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ตามแนวเส้นโค้ง แต่ทว่า $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ นั่นหมายความว่าเราต้องการหาค่าต่ำสุดของปริมาณ

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\,dx \qquad (2)$$

นี่คือสมการ(1) ที่ $F(x, y, y')$ ถูกแทนด้วย $\sqrt{1 + y'^2}$.

ตัวอย่างที่สอง พิจารณาปัญหาที่มีชื่อเสียงอันหนึ่งคือปัญหาเส้นทางลงที่เร็วที่สุด (brachristochrone problem) ปัญหาคือรูปทรงแบบใดที่เราสามารถดัดเส้นลวดซึ่งเชื่อมต่อจุดคงที่คู่หนึ่งแล้วทำให้ลูกปัดที่ร้อยอยู่ในเส้นลวดดังกล่าวไถลลงจากจุดคู่ดังกล่าวโดยปราศจากแรงเสียดทานภายใต้ห้วงเวลาที่น้อยที่สุด นั่นหมายความว่าเราต้องการ $\int dt$ มีค่าต่ำสุด ถ้าหาก ds เป็นเส้นโค้งสั้นๆ (ส่วนน้อยๆ ของเส้นโค้งทั้งหมด) เราได้อัตราเร็วของอนุภาคเป็น $v = ds / dt$ ด้วยเหตุนี้เราได้

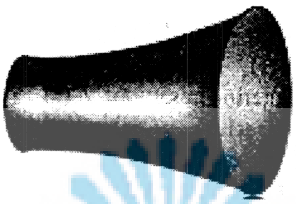
$$dt = \frac{1}{v} ds = \frac{1}{v}\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

โดยอาศัยหลักการอนุรักษ์พลังงาน เราสามารถหา v ในเทอมของ x และ y ได้ ในที่สุดอินทิกรัลที่เราต้องการให้มีค่าต่ำสุด(นิ่งหรือไม่แปรผัน) คือ

$$\int dt = \int \frac{1}{v}\sqrt{1 + y'^2}\,dx$$

ซึ่งเขียนอยู่ในรูปแบบของสมการ (1)

ตัวอย่างอีกอันหนึ่งคือปัญหาของฟิล์มสบู่ที่แขวนค้างอยู่ระหว่างห่วงวงกลมสองวงดังรูปที่ 1



รูปที่ 1

ปัญหาก็คือรูปทรงของฟิล์มสบู่เป็นรูปทรงแบบใด เป็นที่แน่ชัดว่าอาศัยหลักสมมาตร(เมื่อไม่คำนึงถึงแรงโน้มถ่วง)มันเป็นผิวอันเนื่องมาจากการหมุนของเส้นโค้ง (surface of revolution) โดยฟิล์มสบู่จะปรับตัวเองจนกระทั่งมีพื้นที่ผิวน้อยที่สุด พื้นที่ผิวสามารถเขียนอยู่ในรูปของอินทิกรัล และเช่นเดียวกัน ปัญหากลับกลายเป็นการทำให้อินทิกรัลมีค่าต่ำสุด

ยังมีปัญหาอื่นอีกเป็นจำนวนมากที่เกิดขึ้นในทางฟิสิกส์และทางคณิตศาสตร์ โซ่ที่แขวนไว้ระหว่างเสาสองเสาในสภาพที่จุดศูนย์ถ่วงของมันต่ำสุดเท่าที่เป็นไปได้(พลังงานศักย์ต่ำสุด)

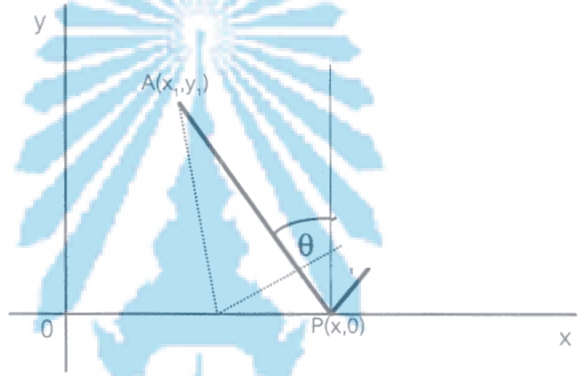
$$\int$$

โดยใช้เวลานานที่สุด) ในส่วนของปัญหาทางคณิตศาสตร์ อาทิ ภายใต้ปริมาตรของดินเหนียวซึ่งคงที่ เราจะปั้นดินเหนียวเป็นรูปทรงใดจึงทำให้พื้นที่ผิวของดินเหนียวมีค่าต่ำสุด กำหนดความยาวของเชือกเส้นหนึ่งมาให้ จัดการผูกปลายทั้งสองของเส้นเชือกเข้าด้วยกันเพื่อสร้างพื้นที่บนระนาบที่ปิดล้อมด้วยเส้นเชือกดังกล่าว พื้นที่ของรูปทรงแบบใดที่ให้ขนาดของพื้นที่มากที่สุด ปัญหาดังกล่าวมีชื่อเรียกว่า ปัญหาของเส้นรอบรูปเท่ากัน (isoperimetric problem) ปัญหาเหล่านี้สามารถแก้ได้โดยอาศัยหลักของแคลคูลัสของการแปรผัน

การพิสูจน์กฎการสะท้อนของแสง

กฎการสะท้อนของแสงกล่าวว่า เมื่อแสงเดินทางตกกระทบตัวสะท้อน อาทิ กระจกราบมันจะสะท้อนกลับด้วยมุมตกกระทบเท่ากับมุมสะท้อน หรือมักจดจำกันในรูปของสมการ $\theta = \phi$ เมื่อ θ และ ϕ คือมุมตกกระทบและมุมสะท้อนตามลำดับ วิธีการพิสูจน์ทำได้ด้วยการให้แสงเดินทางจากจุด $A(x_1,y_1)$ ไปยัง จุด $B(x_2,y_2)$ ผ่านจุด $P(x,0)$ ใดๆ บนกระจกซึ่งวางตัวในแนวราบ(แกนx) ดังแสดงในรูปที่ 2 โดยอาศัยหลักของเฟอร์แมตซึ่ง

กล่าวว่าแสงใช้เวลาในการเดินจากจุดเริ่มต้นไปยังปลายทางด้วยเวลาที่น้อยที่สุด (หรือมากที่สุดในบางกรณี) ดังนั้นเราจะต้องพิสูจน์ให้เห็นว่าแสงจะใช้เวลาในการเดินทางที่น้อยที่สุดก็ต่อเมื่อ $\theta = \phi$ เท่านั้น



รูปที่ 2

วิธีพิสูจน์

ความเร็วแสง $v = c / n = D / t$ เมื่อ c คืออัตราเร็วแสงในสูญญากาศ n คือดรรชนีหักเหของตัวกลาง D คือระยะทางที่แสงเดินทางทั้งหมด ส่วน t คือเวลาที่แสงใช้ ระยะทางที่สั้นที่สุดที่แสงใช้ในการเดินทางจากจุด A ไปยังจุด P โดยอาศัยหลักของแคลคูลัสของการแปรผันคือ

$$I_1 = \int_{x_1}^{x} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = AP$$

และเช่นเดียวกัน ระยะทางที่สั้นที่สุดที่แสงเดินทางจากจุด P ไปยังจุด B คือ

$$I_2 = \int_{x}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = PB$$

ดังนั้น $$t = \frac{D}{v} = \frac{D}{c / n} = \frac{nD}{c} = n \frac{AP + PB}{c}$$

$$t(x) = n\frac{AP + PB}{c} = \frac{n}{c}\left(\sqrt{(x - x_1)^2 + (0 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - 0)^2}\right)$$

$$= \frac{n}{c}\left(\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}\right)$$

จากกฎของเฟอร์แมต แสงจะใช้เวลาในการเดินทางที่น้อยที่สุดหรือมากที่สุด กล่าวคือ

$= 0$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\left((x - x_1)^2 + y_1^2\right)^{-1/2} 2(x - x_1)\frac{dx}{dx} + \frac{1}{2}\left((x_2 - x)^2 + y_2^2\right)^{-1/2} 2(x_2 - x)\frac{d(-x)}{dx} = 0$$

หรือ
$$\frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2}} = \frac{x_2 - x}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}$$

หรือ
$$\sin\theta = \sin\phi$$

นั่นคือ $\theta = \phi$ หรือมุมตกกระทบ = มุมสะท้อน นั่นเอง

สรุป

แคลคูลัสของการแปรผันเป็นระเบียบวิธีที่จะให้คำตอบแก่เราว่าปริมาณอันหนึ่งซึ่งเกี่ยวเนื่องกับตัวแปรจำนวนหนึ่งจะให้ค่าต่ำสุดหรือสูงสุดเมื่อใด ซึ่งอาจจะมีประโยชน์แก่เราในยุคสมัยที่ต้องการประหยัดทรัพยากรในการดำเนินกิจกรรมต่างๆ ซึ่งจะส่งผลต่อการเลือกรูปแบบของการดำเนินกิจกรรม การเลือกเส้นทาง การเลือกรูปทรงของวัสดุ เป็นต้น ที่น่าพิศวงก็คือการดำรงอยู่ของระบบต่างๆ ในธรรมชาติ อาทิระบบของดวงดาว และระบบของวัตถุในกลศาสตร์แผนเดิม(classical physics)ต่างก็อยู่ภายใต้การประหยัดปริมาณอันหนึ่งซึ่งเรียกว่า action ซึ่งเขียนอยู่ในรูปอินทิกรัล

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t)dt$$

เมื่อ $L(x,\dot{x},t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$ โดยที่ $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ และ $V(x)$ คือ พลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของวัตถุตามลำดับ ยิ่งไปกว่านั้นหากพิจารณา หยดน้ำ ดวงจันทร์ ดวงดาว หรือดวงอาทิตย์จะเห็นว่ามีรูปทรงเป็นทรงกลม การที่ธรรมชาติสร้างสรรค์รูปทรงเช่นนี้มาให้แสดงว่าระบบดังกล่าวอยู่ภายใต้การประหยัดพื้นที่ผิวหรือพื้นที่ผิวต่ำสุดนั่นเอง

มหาวิทยาลัยทักษิณ
เจ้าเกิดมาเจ้าพาอะไรมาด้วยหรือเปล่า
ใยมัวเมาละโมบลาภสร้างบาปใหญ่
เจ้าเกิดมาตัวเปล่าแล้วเจ้าจะโกงเขาเอาไปทำไม
เจ้าก็ตายไปตัวเปล่าเหมือนเจ้ามา