รากของผลบวกบางชุดของพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด

ZEROS OF CERTAIN SUMS OF RECURSIVELY DEFINED POLYNOMIALS

โดย

อลงกรณ์ แซ่ตั้ง

สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์

โครงการนี้ได้รับการสนับสนุนการวิจัย

จากงบประมาณเงินรายได้ ประจำปี พ.ศ. 2552

มหาวิทยาลัยทักษิณ

คำรับรองคุณภาพ

ข้าพเจ้า **ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กรวิกา ก้องกุล** ได้ประเมินคุณภาพงานวิจัย

เรื่อง **รากของผลบวกบวกบางชุดของพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด**

โดย **อลงกรณ์ แซ่ตั้ง**

มีความเห็นว่า ผลงานวิจัยฉบับนี้มีคุณภาพอยู่ในเกณฑ์

- ☐ ดีมาก
- ☑ ดี
- ☐ ปานกลาง
- ☐ ต่ำ

ซึ่งสมควรเผยแพร่ในแวดวงวิชาการได้

ลงชื่อ.. ผู้ประเมิน

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กรวิกา ก้องกุล)

วันที่...29... เดือน...กรกฎาคม........ พ.ศ. 2553

บทคัดย่อ

ให้ $P_n(x)$ เป็นพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด $P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) - P_n(x)$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 0$ โดยที่ $P_0(x) = 1$ และ $P_1(x) = x + 1$ การวิจัยนี้พิสูจน์ว่า สำหรับทุก $n \in \mathbb{Z}^+$ รากของ $\sum_{k=0}^{n} P_k(x)$ คือ $2\cos\frac{2k\pi}{n+1}$ เมื่อ $k \in \left\{1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right\}$

Abstract

Let $P_n(x)$ be a polynomial defined by the recurrence relation $P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) - P_n(x)$ for integer $n \geq 0$ with $P_0(x) = 1$ and $P_1(x) = x + 1$. This research will prove that for every $n \in \mathbb{Z}^+$, zeros of $\sum_{k=0}^{n} P_k(x)$ are $2\cos\frac{2k\pi}{n+1}$ for $k \in \left\{1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right\}$.

ประกาศคุณูปการ

ผู้วิจัยขอขอบคุณรองศาสตราจารย์เกษม อัศวตรีรัตนกุล ผู้อำนวยการสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยทักษิณ ที่ได้สนับสนุนทุนวิจัยสำหรับโครงการวิจัยนี้จนสำเร็จลุล่วงด้วยดี และขอขอบคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กรวิกา ก้องกุล สำหรับคำแนะนำในการปรับปรุงแก้ไขงานวิจัยนี้ให้มีความถูกต้องและความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

ใน [2] กำหนดให้พหุนาม $P_n(x)$ นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) - P_n(x) \quad \text{สำหรับ } n \geq 0$$

โดยที่ $P_0(x) = 1$ และ $P_1(x) = x + 1$ ดังนั้น

$$P_2(x) = x^2 + x - 1$$

$$P_3(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1$$

$$P_4(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 1$$

$$P_5(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

สังเกตได้ว่า $P_n(x)$ เป็นพหุนามระดับขั้น n ดังนั้น $P_n(x)$ มีรากจริงได้ไม่เกิน n ราก ให้ $\theta = \cos^{-1}\frac{x}{2}$ ดังนั้น $x = 2\cos\theta$ ต่อไปจะนิยามพหุนาม $R_n(x)$ ดังนี้

$$R_n(x) = \frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

เมื่อ $x \in [-2, 2)$ ถ้า $n = 0$ จะได้ว่า

$$R_0(x) = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = 1$$

ถ้า $n = 1$ จะได้ว่า

$$R_1(x) = \frac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\frac{\theta}{2}(2\cos\theta + 1)}{\sin\frac{\theta}{2}} = 2\cos\theta + 1 = x + 1$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
R_{n+2}(x) + R_n(x) &= \frac{\sin\frac{(2n+5)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{2\sin\left[\frac{(2n+5)\theta+(2n+1)\theta}{4}\right]\cos\left[\frac{(2n+5)\theta-(2n+1)\theta}{4}\right]}{\sin\frac{\theta}{2}} \\
&= 2\cos\theta\left[\frac{\sin\frac{(2n+3)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right] \\
&= xR_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $R_{n+2}(x) = xR_{n+1}(x) - R_n(x)$ เพราะฉะนั้น $P_n(x) = R_n(x)$ สำหรับทุก $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ และทุก $x \in [-2, 2)$ ต่อไปจะหารากของ $R_n(x)$ เนื่องจาก $\sin\frac{(2n+1)\theta}{2} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{(2n+1)\theta}{2} = k\pi$ สำหรับทุก $k \in \mathbb{Z}$ แต่ $\theta \in (0, \pi]$ (เพราะ $\theta = \cos^{-1}\frac{x}{2}$ และ $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$) ดังนั้น

$$\theta = \frac{2k\pi}{2n+1} \quad \text{สำหรับ } k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

เพราะฉะนั้น

$$x = 2\cos\frac{2k\pi}{2n+1} \quad \text{สำหรับ } k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

เนื่องจาก $P_n(x) = R_n(x)$ สำหรับทุก $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ และทุก $x \in [-2, 2)$ และ $R_n(x)$ มีรากจริงที่แตกต่างกันทั้งหมด n ราก ดังนั้นรากทั้งหมดของ $R_n(x)$ ก็คือรากทั้งหมดของ $P_n(x)$ นั่นเอง พิจารณา $P_7(x) = x^7 + x^6 - 6x^5 - 5x^4 + 10x^3 + 6x^2 - 4x - 1$ จะได้ว่ารากของ $P_7(x)$ คือ

$$2\cos\frac{2\pi}{15}, 2\cos\frac{4\pi}{15}, 2\cos\frac{6\pi}{15}, 2\cos\frac{8\pi}{15}, 2\cos\frac{10\pi}{15}, 2\cos\frac{12\pi}{15}, 2\cos\frac{14\pi}{15}$$

สำหรับการวิจัยนี้จะหารากของ $\sum_{k=0}^{n} P_k(x)$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{Z}^+$

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

มีผู้ทำวิจัยเกี่ยวกับการหารากของผลบวกของพหุนามดังนี้

ใน [4] ชวน ฮอง คิม (Seon-Hong Kim) ได้ทำวิจัยเกี่ยวกับการมีจริงของรากของผลบวกของพหุนามโมนิก (monic polynomial) 2 พหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

ใน [3] พินเตอร์ (A. Pinter) ได้หาขอบเขตล่างของจำนวนรากที่ต่างกันของผลบวกของพหุนามเฉพาะสัมพัทธ์ (relatively prime polynomial) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ใน [1] อลงกรณ์ได้หารากจริงของผลบวกบางชุดของพหุนามเชบีเชฟ

บทที่ 3
ผลลัพธ์หลัก

ก่อนจะหารากของ $\sum_{k=0}^{n} P_k(x)$ จะกล่าวถึงสมบัติบางประการของพหุนาม $P_n(x)$ ดังบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 3.1 $P_{n+1}(x) > P_n(x)$ สำหรับทุก $x > 2$ และทุก $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

การพิสูจน์ ให้ $x > 2$ และ $Q(n)$ แทนข้อความ $P_{n+1}(x) > P_n(x)$ เห็นได้ชัดว่า

$$P_1(x) = x + 1 > 3 > 1 = P_0(x)$$

ดังนั้น $Q(0)$ เป็นจริง ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ใน $\{0, 1, 2, \ldots\}$ สมมติว่า $Q(k)$ เป็นจริง เนื่องจาก

$$\begin{aligned} P_{k+2}(x) &= xP_{k+1}(x) - P_k(x) \\ &> 2P_{k+1}(x) - P_k(x) \\ &= P_{k+1}(x) + P_{k+1}(x) - P_k(x) \\ &> P_{k+1}(x) \end{aligned}$$

ดังนั้น $Q(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงสรุปได้ว่า $Q(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก $n \in \mathbb{Z}^+$

□

บทตั้ง 3.2 $P_n(x) > 0$ สำหรับทุก $x > 2$ และทุก $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

การพิสูจน์ ให้ $x > 2$ และ $Q(n)$ แทนข้อความ $P_n(x) > 0$ เห็นได้ชัดว่า $P_0(x) = 1 > 0$ ดังนั้น $Q(0)$ เป็นจริง ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ใน $\{0, 1, 2, \ldots\}$ สมมติว่า $Q(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $P_k(x) > 0$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} P_{k+1}(x) &= xP_k(x) - P_{k-1}(x) \\ &> 2P_k(x) - P_{k-1}(x) \\ &= P_k(x) + P_k(x) - P_{k-1}(x) \end{aligned}$$

จากบทตั้ง 3.1 จะได้ว่า $P_k(x) > P_{k-1}(x)$ ดังนั้น $P_k(x) - P_{k-1}(x) > 0$ และจากสมมติฐานของอุปนัยจะได้ว่า $P_{k+1}(x) > 0$ ดังนั้น $Q(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงสรุปได้ว่า $Q(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

□

จากบทตั้ง 3.2 พบว่า $P_n(x) > 0$ สำหรับทุก $x > 2$ และทุก $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ ดังนั้น

$$P_0(x) + P_1(x) + \ldots + P_n(x) > 0$$

จึงได้บทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 3.3 $\sum_{k=0}^{n} P_n(x) > 0$ สำหรับทุก $x > 2$

□

จากบทตั้ง 3.3 สรุปได้ว่า $\sum_{k=0}^{n} P_k(x)$ ไม่มีรากในช่วง $(2, \infty)$

บทตั้ง 3.4 ถ้า $x < -2$ แล้ว $|P_{n+1}(x)| > |P_n(x)|$ สำหรับทุก $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

การพิสูจน์ ให้ $x < -2$ และ $Q(n)$ แทนข้อความ $|P_{n+1}(x)| > |P_n(x)|$ เห็นได้ชัดว่า

$$|P_1(x)| = |x+1| > 1 = |P_0(x)|$$

ดังนั้น $Q(0)$ เป็นจริง ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ใน $\{0, 1, 2, \ldots\}$ สมมติว่า $Q(k)$ เป็นจริง เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
|P_{k+2}(x)| &= |xP_{k+1}(x) - P_k(x)| \\
&\geq |xP_{k+1}(x)| - |P_k(x)| \\
&= |x||P_{k+1}(x)| - |P_k(x)| \\
&> 2\,|P_{k+1}(x)| - |P_k(x)| \\
&> |P_{k+1}(x)|
\end{aligned}$$

ดังนั้น $Q(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงสรุปได้ว่า $Q(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

$\square$

บทตั้ง 3.5 ถ้า $x < -2$ แล้ว $P_{2n}(x) > 0$ และ $P_{2n+1}(x) < 0$ สำหรับทุก $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

การพิสูจน์ ให้ $x < -2$ และ $Q(n)$ แทนข้อความ $P_{2n}(x) > 0$ และ $P_{2n+1}(x) < 0$ เห็นได้ชัดว่า

$$P_0(x) = 1 > 0 \text{ และ } P_1(x) = x + 1 < -2 + 1 = -1 < 0$$

ดังนั้น $Q(0)$ เป็นจริง ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ใน $\{0, 1, 2, \ldots\}$ สมมติว่า $Q(k)$ เป็นจริง เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
P_{2k+2}(x) &= xP_{2k+1}(x) - P_{2k}(x) \\
&= x[xP_{2k}(x) - P_{2k-1}(x)] - P_{2k}(x) \\
&= (x^2 - 1)P_{2k}(x) - xP_{2k-1}(x) \\
&> |x||P_{2k}(x)| - |x||P_{2k-1}(x)| \\
&= |x|(|P_{2k}(x)| - |P_{2k-1}(x)|)
\end{aligned}$$

จากบทตั้ง 3.4 จะได้ว่า $|P_{2k}(x)| - |P_{2k-1}(x)| > 0$ ดังนั้น $P_{2k+2}(x) > 0$ และในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned}
P_{2k+3}(x) &= xP_{2k+2}(x) - P_{2k+1}(x) \\
&= -|x||P_{2k+2}(x)| + |P_{2k+1}(x)| \\
&< |P_{2k+1}(x)| - |P_{2k+2}(x)|
\end{aligned}$$

จากบทตั้ง 3.4 จะได้ว่า $|P_{2k+1}(x)| - |P_{2k+2}(x)| < 0$ ดังนั้น $P_{2k+3}(x) < 0$ เพราะฉะนั้น $Q(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงสรุปได้ว่า $Q(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

$\square$

บทตั้ง 3.6 $\sum_{i=0}^{n} P_i(x)$ ไม่มีรากในช่วง $(-\infty, -2)$

การพิสูจน์ ให้ $x < -2$ และ $Q(n)$ แทนข้อความ $\sum_{i=0}^{2n} P_i(x) > 0$ และ $\sum_{i=0}^{2n+1} P_i(x) < 0$ เห็นได้ชัดว่า $Q(0)$ เป็นจริง ให้ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ใน $\{0, 1, 2, \ldots\}$ สมมติว่า $Q(k)$ เป็นจริง เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2k+2} P_i(x) &= P_{2k+2}(x) + P_{2k+1}(x) + \sum_{i=0}^{2k} P_i(x) \\ &= |P_{2k+2}(x)| - |P_{2k+1}(x)| + \sum_{i=0}^{2k} P_i(x) \\ &> \sum_{i=0}^{2k} P_i(x) > 0\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2k+3} P_i(x) &= P_{2k+3}(x) + P_{2k+2}(x) + \sum_{i=0}^{2k+1} P_i(x) \\ &= -|P_{2k+2}(x)| + |P_{2k+1}(x)| + \sum_{i=0}^{2k+1} P_i(x) \\ &< \sum_{i=0}^{2k+1} P_i(x) < 0\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $Q(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จึงสรุปได้ว่า $Q(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ จึงส่งผลให้ $\sum_{i=0}^{n} P_i(x)$ ไม่มีรากในช่วง $(-\infty, -2)$

□

จากบทตั้ง 3.3 และ 3.6 ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.7 ถ้า $\sum_{k=0}^{n} P_k(x)$ มีรากจริง แล้วรากจริงทั้งหมดของ $\sum_{k=0}^{n} P_k(x)$ อยู่ในช่วง $[-2, 2]$

□

ดังนั้นโดยไม่เสียนัยสำคัญเราสามารถกำหนดให้ $x = 2\cos\theta$ จึงได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.8 ให้ $n \in \mathbb{Z}^+$ รากของ $\sum_{k=0}^{n} P_k(x)$ คือ

$$x = 2\cos\frac{2k\pi}{n+1} \quad \text{สำหรับ } k \in \left\{1, 2, \ldots, \left\lfloor \tfrac{n+1}{2} \right\rfloor\right\}$$

การพิสูจน์ เนื่องจาก $P_n(x) = R_n(x)$ สำหรับทุก $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ และทุก $x \in [-2, 2)$ ดังนั้นพิจารณา

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} R_k(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin \frac{(2k+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \\
&= \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \sum_{k=0}^{n} \sin \frac{(2k+1)\theta}{2} \\
&= \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \operatorname{Im}\left[\sum_{k=0}^{n} e^{\frac{i(2k+1)\theta}{2}}\right] \\
&= \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \operatorname{Im}\left[\frac{e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{i(n+1)\theta}-1)}{e^{i\theta}-1}\right] \\
&= \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \operatorname{Im}\left[\frac{e^{\frac{i\theta}{2}} e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}(e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}} - e^{-\frac{i(n+1)\theta}{2}})}{e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}})}\right] \\
&= \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \operatorname{Im}\left[\frac{e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}(2i \sin \frac{(n+1)\theta}{2})}{(2i \sin \frac{\theta}{2})}\right] \\
&= \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{(\sin \frac{\theta}{2})^2} \operatorname{Im}[e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}] \\
&= \left[\frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}\right]^2
\end{aligned}$$

ต่อไปจะหารากของ $\sum_{k=0}^{n} R_k(x)$ เนื่องจาก $\sin \frac{(n+1)\theta}{2} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{(n+1)\theta}{2} = k\pi$ สำหรับทุก $k \in \mathbb{Z}$ แต่ $\theta \in (0, \pi]$ (เพราะ $\theta = \cos^{-1} \frac{x}{2}$ และ $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$) ดังนั้น

$$\theta = \frac{2k\pi}{n+1} \quad \text{สำหรับ } k \in \left\{1, 2, \dots, \lfloor \tfrac{n+1}{2} \rfloor\right\}$$

เพราะฉะนั้น

$$x = 2\cos\frac{2k\pi}{n+1} \quad \text{สำหรับ } k \in \left\{1, 2, \dots, \lfloor \tfrac{n+1}{2} \rfloor\right\}$$

$\square$

บทที่ 4
สรุปและข้อเสนอแนะ

สรุป

ในโครงการวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ค้นพบความจริงเกี่ยวกับพหุนาม $P_n(x)$ ดังนี้

1. $P_{n+1}(x) > P_n(x)$ สำหรับทุก $x > 2$ และทุก $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$
2. $P_n(x) > 0$ สำหรับทุก $x > 2$ และทุก $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$
3. $\sum_{k=0}^{n} P_n(x) > 0$ สำหรับทุก $x > 2$
4. ถ้า $x < -2$ แล้ว $|P_{n+1}(x)| > |P_n(x)|$ สำหรับทุก $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$
5. ถ้า $x < -2$ แล้ว $P_{2n}(x) > 0$ และ $P_{2n+1}(x) < 0$ สำหรับทุก $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$
6. $\sum_{i=0}^{n} P_i(x)$ ไม่มีรากในช่วง $(-\infty, -2)$
7. ถ้า $\sum_{k=0}^{n} P_k(x)$ มีรากจริง แล้วรากจริงทั้งหมดของ $\sum_{k=0}^{n} P_k(x)$ อยู่ในช่วง $[-2, 2]$
8. ให้ $n \in \mathbb{Z}^+$ รากของ $\sum_{k=0}^{n} P_k(x)$ คือ $x = 2\cos\dfrac{2k\pi}{n+1}$ สำหรับ $k \in \left\{1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right\}$

ข้อเสนอแนะ

ผู้สนใจสามารถต่อยอดโครงการวิจัยนี้ได้โดยหารากของผลบวกของพหุนามที่นิยามโดยความสัมพันธ์เวียนเกิดแบบอื่น หรือ วางนัยทั่วไปทฤษฎีบท 3.8

บรรณานุกรม

[1] **อลงกรณ์ แซ่ตั้ง**. (2550). **"รากจริงของผลบวกบางชุดของพหุนามเชบีเชฟ"**, วารสารมหาวิทยาลัยทักษิณ (10) no.1 : 1 – 8.

[2] Dionne Bailey, Elsie Campbell, Charlse Diminnie, and Karl Havlak. (2006). **"Roots of recursively defined polynomials"**, The College Mathematics Journal (37) : 60 – 62.

[3] Pinter, A. (2002). **"Zeros of the sum of polynomials"**, Journal of Mathematical Analysis and Applications, (270) no.1 : 303 – 305.

[4] Seon–Hong Kim. (2001). **"Zeros of Certain Sums of Two Polynomials"**, Journal of Mathematical Analysis and Applications (260) no.1 : 239 – 250.