อสมการ (Inequalities)

สมใจ จิตพิทักษ์
ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

Somjai Jitpitak
Department of Mathematics, Thaksin University

I. จำนวนใดมากกว่ากัน ?

1. จำนวนใดมากกว่ากัน : 31^{11} หรือ 17^{14} ?

วิธีทำ เราอาจคำนวณแต่ละจำนวนออกมาแล้วเปรียบเทียบกัน แต่วิธีนี้จะเสียเวลามากและไม่สร้างสรรค์นัก ลองอีกวิธีดังนี้

$$31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55} < 2^{56} = (2^4)^{14} = 16^{14} < 17^{14}$$

เห็นได้ชัดว่า 31^{11} น้อยกว่า 17^{14} เทคนิคที่นำมาใช้ได้จากการสังเกตว่า 31 และ 17 ใกล้เคียงกับ 2 ยกกำลัง ซึ่งนำมาเปรียบเทียบกันได้ □

2. จำนวนใดมากกว่ากัน

 2.1 2^{300} หรือ 3^{200} ?

 2.2 5^{44} หรือ 4^{53} ?

วิธีทำ 2.1 เพราะว่า $2^3 = 8 < 9 = 3^2$ ดังนั้น

$$2^{300} = (2^3)^{100} < (3^2)^{100} = 3^{200}$$

 2.2 เพราะว่า $5^3 = 125 < 128 = 2^7$ เพราะฉะนั้น

$$5^{42} = (5^3)^{14} < (2^7)^{14} = 4^{49}$$

$$5^{44} = 5^2 \cdot 5^{42} < 4^4 \cdot 4^{49} = 4^{53}$$

□

3. จงแสดงว่า $2^{100} + 3^{100} < 4^{100}$

วิธีทำ เพราะว่า

$$2^{100} + 3^{100} < 3^{100} + 3^{100} = 2 \cdot 3^{100}$$

ในการแสดงว่า $2 \cdot 3^{100} < 4^{100}$ เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า $(4/3)^{100} > 2$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า $(4/3)^3 = 64/27 > 2$ ดังนั้น

$$2^{100} + 3^{100} < 2 \cdot 3^{100} < 4^{100}$$

□

ในตัวอย่างต่อไปนี้เราใช้อสมการแบร์นูลลี (Bernoulli's inequality) :

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

เมื่อ x เป็นจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ -1 และ n เป็นจำนวนธรรมชาติหรือจำนวนนับ

4. จำนวนใดมากกว่ากัน : 7^{92} หรือ 8^{91} ?

วิธีทำ จากอสมการแบร์นูลลีจะได้

$$\left(\frac{8}{7}\right)^{91} = \left(1 + \frac{1}{7}\right)^{91} \geq 1 + 91 \cdot \frac{1}{7} = 14$$

ดังนั้น

$$8^{91} \geq 2 \cdot 7^{92} > 7^{92}$$ □

5. จงพิสูจน์ $4^{79} < 2^{100} + 3^{100} < 4^{80}$

6. จำนวนใดมากกว่ากัน : $1234567 \cdot 1234569$ หรือ 1234568^2 ?

วิธีทำ แทนจำนวน 1234568 ด้วย x เราได้

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1 < x^2$$

ทุกจำนวนจริง x ดังนั้นจำนวนหลังมากกว่า □

7. จำนวนใดมากกว่ากัน : $\frac{1234567}{7654321}$ หรือ $\frac{1234568}{7654322}$

วิธีทำ พิจารณากรณีทั่วไปเมื่อใดที่ x/y มากกว่า (น้อยกว่า) $(x+1)/(y+1)$

ถ้า x และ y เป็นจำนวนบวกแล้ว

$$\frac{x}{y} - \frac{x+1}{y+1} = \frac{x-y}{y(y+1)}$$

นิพจน์หลังเป็นบวก (ลบ) เมื่อ x มาก (น้อย) กว่า y ในกรณีที่ให้มา x น้อยกว่า y ดังนั้น จำนวนแรกน้อยกว่าจำนวนหลัง □

8. จำนวนใดมากกว่ากัน : 100^{100} หรือ $50^{50} \cdot 150^{50}$?

วิธีทำ เนื่องจาก

$$100^2 = 10000 > 7500 = 50 \cdot 150$$

ดังนั้น

$$100^{100} > 50^{50} \cdot 150^{50}$$ □

Thaksin. J., Vol.6 (1) January - June 2003

9. จำนวนใดมากกว่ากัน : $(1.01)^{1000}$ หรือ 1000 ?

วิธีทำ โดยอสมการแบร์นูลลี จะได้

$$(1.01)^8 = (1+.01)^8 \geq 1.08$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}(1.01)^{1000} &\geq (1.08)^{125} \\ &= \left((1.08)^5\right)^{25} \\ &\geq (1.4)^{25} > (1.4)^{24} \\ &> (2.7)^8 \\ &> 7^4 = 2401 > 1000\end{aligned}$$

□

10. จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{99} + \frac{1}{100} > \frac{1}{5}$$

วิธีทำ จัดพจน์ทางซ้ายเป็นคู่ๆ จะได้

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \frac{1}{100}$$

นั่นคือ จะได้

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \frac{1}{42} + \ldots + \frac{1}{100}$$

แต่ $\frac{1}{6} + \frac{1}{20} > \frac{1}{5}$ เราจึงได้ตามที่ต้องการพิสูจน์ □

11. จงแสดงว่า $5^{73} > 7^{53}$

12. จำนวนใดมากกว่ากัน : $\frac{1998}{1999}$ หรือ $\frac{1999}{2000}$?

13. จำนวนใดมากกว่ากัน

13.1 $(1.000001)^{1,000,000}$ หรือ 2 ?

13.2 1000^{1000} หรือ 1001^{999} ?

13.3 $\frac{10^{1999} + 1}{10^{2000} + 1}$ หรือ $\frac{10^{1998} + 1}{10^{1999} + 1}$?

II. อสมการหลัก

อสมการหลักในระบบจำนวนจริง คือ อสมการ $x^2 \geq 0$ ทุกจำนวนจริง x อสมการอื่นๆ ที่เป็นที่รู้จักกันดีและมีประโยชน์ได้จากอสมการนี้ อสมการแรกที่จะกล่าวถึงคือ **อสมการมัชฌิมเลขคณิต-เรขาคณิต** (A.M. - G.M. Inequality) : ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$ แล้ว

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad (*)$$

จำนวน $(a+b)/2$ คือ มัชฌิมเลขคณิต (arithmetic mean) และ $\sqrt{ab}$ คือ มัชฌิมเรขาคณิต (geometric mean) ของ a และ b

อสมการมัชฌิมเลขคณิต - เรขาคณิต สามารถพิสูจน์ได้โดยง่ายดังนี้

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

โจทย์ปัญหาแต่ละข้อต่อไปนี้สามารถพิสูจน์โดยอาศัยอสมการมัชฌิมเลขคณิต - เรขาคณิต หรือแปลงให้อยู่ในรูป $x^2 \geq 0$ ตามความเหมาะสม

14. จงพิสูจน์ $1 + x \geq 2\sqrt{x}, \quad x \geq 0$

15. จงพิสูจน์ $x + 1/x \geq 2, \ x > 0$

16. จงพิสูจน์ $(x^2 + y^2)/2 \geq xy$ ทุกจำนวนจริง x, y

17. จงพิสูจน์ $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$ ทุกจำนวนจริง x, y

18. จงพิสูจน์ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}, \ x > 0, y > 0$

ในที่นี้จะพิสูจน์ ข้อ 18

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{4}{x+y} &= \frac{y+x}{xy} - \frac{4}{x+y} \\ &= \frac{(x+y)^2 - 4xy}{xy(x+y)} \\ &= \frac{(x-y)^2}{xy(x+y)} \geq 0 \qquad \square\end{aligned}$$

อสมการที่ซับซ้อนอาจพิสูจน์โดยใช้อสมการเลขคณิต-เรขาคณิต หลายครั้ง หรือใช้หลายแนวคิดประกอบกัน

19. **จงพิสูจน์** $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ ทุกจำนวนจริง x, y, z
การพิสูจน์ เราใช้ผลจากข้อ 16 ได้สามอสมการต่อไปนี้

$$x^2 + y^2 \geq 2xy,\ y^2 + z^2 \geq 2yz,\ z^2 + x^2 \geq 2xz$$

บวกอสมการเหล่านี้เข้าด้วยกัน และตัดตัวร่วม 2 ออก จะได้ตามที่ต้องการพิสูจน์ □

20. ถ้า a, b, c ≥ 0 **จงพิสูจน์** $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

21. ถ้า a, b, c ≥ 0 **จงพิสูจน์** $ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}$

22. **จงพิสูจน์** $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$
[แนะ $x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y = \frac{1}{2}\left[(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2\right]$

23. **จงพิสูจน์** สำหรับทุกจำนวนจริง a, b, c จะได้ $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc\ (a + b + c)$
[แนะ ใช้อสมการจากข้อ 19 สองครั้ง]

อสมการมัชฌิมเลขคณิต-เรขาคณิต มีความสำคัญที่น่าสนใจสองประการ ประการแรก ช่วยให้เราประมาณค่าผลบวกของสองจำนวนในพจน์ของผลคูณ ประการที่สอง สามารถที่จะวางนัยทั่วไปไปยังจำนวนมากกว่าสองจำนวน อย่างเช่น สำหรับจำนวนบวกสี่จำนวน เราได้

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd} \qquad (**)$$

โดยที่ a, b, c, d $\geq$ 0 นิพจน์ทางซ้ายยังคงเรียกว่า มัชฌิมเลขคณิต (A.M.) และ นิพจน์ทางขวา เรียกว่า มัชฌิมเรขาคณิต (G.M.) ของ a, b, c, d

อสมการ (**) สามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}\right) \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$

□

24. **จงพิสูจน์** $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$ ทุกจำนวนจริง x, y

25. ถ้า a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geq 16$$

การพิสูจน์อสมการมัชฌิมเลขคณิต - เรขาคณิต สำหรับจำนวนสามจำนวน

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \qquad (***)$$

โดยที่ a, b, c $\geq$ 0 ให้ $m = \sqrt[3]{abc}$ ดังนั้น

$$\frac{a+b+c+m}{4} \geq \sqrt[4]{abcm} = \sqrt[4]{m^3 \cdot m} = m$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{a+b+c}{4} \geq \frac{3}{4}m$$

นั่นคือ

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \qquad \square$$

อสมการมัชฌิมเลขคณิต-เรขาคณิต สำหรับกรณีทั่วไปคือ สำหรับจำนวนจริงบวก $a_1, a_2, \ldots, a_n$ จะได้

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

การพิสูจน์จะไม่นำเสนอในที่นี้

จากข้อ 15 ได้ว่า สำหรับจำนวนจริงบวก a และ b

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

และสำหรับจำนวนจริงบวก a, b, c

26. $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$

27. จงพิสูจน์ ถ้า $x \geq 0$ แล้ว $3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$
[แนะ แสดงให้ได้ว่า $3x^3 + 4 = 2x^3 + x^3 + 4 \geq 6x^2$]

28. จงพิสูจน์ ถ้า a, b, c $>$ 0 แล้ว $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}}$

29. จงพิสูจน์ ถ้า a, b, c $>$ 0 แล้ว $\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geq a + b + c$
[แนะ ใช้ผลจากข้อ 19]

30. จงพิสูจน์ ถ้า a, b, c $>$ 0 แล้ว $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geq \frac{1}{3}(ab+bc+ca)$

31. จงพิสูจน์ ถ้า a, b, c $>$ 0 แล้ว $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$

32. ถ้า $a+b=1, a>0, b>0$ จงพิสูจน์ $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

33. ถ้า $x \geq 0$ จงพิสูจน์ $2x+\frac{5}{8} \geq 2\sqrt{x}$

34. จงพิสูจน์ ถ้า a, b, c, d, e $\geq$ 0 แล้ว

$$\frac{a+b+c+d+e}{5} \geq \sqrt[5]{abcde}$$

III. การแปลง

บางครั้งเราอาจใช้การแปลง (transformation) ช่วยในการแก้ปัญหาหรือพิสูจน์อสมการ เช่น อสมการ

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$$

ในข้อ 19 ข้างต้น เราอาจพิสูจน์ได้อีกทางหนึ่งดังนี้

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx = \frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right] \geq 0$$

เทคนิคที่ใช้ คือ การทำให้เป็น "กำลังสองสมบูรณ์" ซึ่งใช้บ่อยในการแก้สมการกำลังสอง

35. ถ้า $a+b=1$ จงหาค่ามากสุดของผลคูณ ab
วิธีทำ จาก $a+b=1$ จะได้ $b=1-a$ ดังนั้น

$$ab = a(1-a) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}-a\right)^2$$

นั่นคือ ab มีค่ามากสุด เท่ากับ $\frac{1}{4}$ (เมื่อ $a=\frac{1}{2}$) □

36. จงพิสูจน์ทุก a, b, c จะได้ $\frac{a^2}{4}+b^2+c^2 \geq ab-ac+2bc$

37. ถ้า $a+b+c=0$ จงพิสูจน์ $ab+bc+ca < 0$
[แนะ $ab+bc+ca = \frac{1}{2}\left[(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2\right]$]

แนวคิดในข้อ 38 ต่อไปนี้มีประโยชน์ในการพิสูจน์อสมการที่เกี่ยวเนื่องกับการสมมาตรและการแยกตัวประกอบ

38. ถ้า $a \geq b$ และ $x \geq y$ แล้ว

$$ax + by \geq ay + bx$$

การพิสูจน์

$$ax + by - ay - bx = (a - b)(x - y) \geq 0$$

□

39. จงพิสูจน์ $x^6/y^2 + y^6/x^2 \geq x^4 + y^4,\ x \neq 0,\ y \neq 0$

การพิสูจน์ แทน x^2 ด้วย a และ y^2 ด้วย b จะได้

$$\frac{x^6}{y^2} + \frac{y^6}{x^2} - x^4 - y^4 = \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} - a^2 - b^2$$

$$= \frac{(a - b)(a^3 - b^3)}{ab} \geq 0$$

เพราะ $a - b$ และ $a^3 - b^3$ มีเครื่องหมายเหมือนกัน □

40. ถ้า $x, y > 0$ จงพิสูจน์ $\sqrt{x^2/y} + \sqrt{y^2/x} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

41. ถ้า $a, b, c \geq 0$ จงพิสูจน์

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2$$

42. จงพิสูจน์สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) \geq -1$

43. จงพิสูจน์สำหรับจำนวนจริง x, y และ z ใดๆ

$$x^4 + y^4 + z^2 + 1 \geq 2x(xy^2 - x + z + 1)$$

44. จงแสดงว่า

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}} > \frac{9}{2}$$

45. จงพิสูจน์ ถ้า $x, y \geq 0$ แล้ว $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^8 \geq 64\, xy(x + y)^2$

IV. การอุปนัยและอสมการ

บ่อยครั้งที่อสมการประกอบด้วยตัวแปรที่เป็นจำนวนเต็มบวกหรือจำนวนนับ ในกรณีนี้เราพิสูจน์โดยการอุปนัย (induction)

46. จงพิสูจน์ ถ้า $n \geq 3$ แล้ว

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

การพิสูจน์ เมื่อ $n = 3$ เราได้

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60} > \frac{3}{5}$$

อสมการเป็นจริง สมมติอสมการเป็นจริงเมื่อ $n = k, k \geq 3$ เราพิจารณาเมื่อ $n = k + 1$

$$\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k+2}$$

$$= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}$$

$$> \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k} > \frac{3}{5}$$

ได้อสมการเป็นจริง โดยการอุปนัยจะได้อสมการเป็นจริงทุก $n \geq 3$ □

วิธีการมาตรฐานวิธีหนึ่งในการพิสูจน์โดยการอุปนัยสำหรับอสมการ สามารถอธิบายได้ดังนี้ สมมติกำหนดจำนวนให้มาสองชุด คือ

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \text{ และ } b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$$

ถ้า

(i) $a_1 > b_1$

(ขั้นฐาน - Base) และ

(ii) $a_k - a_{k-1} \geq b_k - b_{k-1}$ ทุก $k \leq n$

(ขั้นอุปนัย - Inductive Step) แล้ว

$$a_n \geq b_n$$

ทุกจำนวนนับ n

47. ถ้า $n \geq 2$ จงพิสูจน์ $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1$

การพิสูจน์ ให้ $a_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$, $b_n = 1 - \frac{1}{n}$

(ขั้นฐาน) เมื่อ n = 2 เราได้

$$a_2 = \frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2} = b_2$$

(ขั้นอุปนัย) เราได้

$$a_k - a_{k-1} = \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = b_k - b_{k-1}$$

ดังนั้น สำหรับ $n \geq 2$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} = a_n < b_n = 1 - \frac{1}{n} < 1$$ □

48. ถ้า $n \geq 1$ จงพิสูจน์ $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$

49. ถ้า $n \geq 1$ จงพิสูจน์ $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$

ยังมีวิธีการทั่วไปที่คล้ายคลึงกับวิธีการข้างต้นอีกวิธีหนึ่งในการพิสูจน์โดยการอุปนัยสำหรับอสมการ กล่าวคือ ถ้า

(i) $a_1 \geq b_1$

(ขั้นฐาน - Base) และ

(ii) $a_k/a_{k-1} \geq b_k/b_{k-1}$ ทุก $k \leq n$

(ขั้นอุปนัย - Inductive Step) แล้ว

$$a_n \geq b_n$$

ทุก n ที่เป็นจำนวนนับ

50. ถ้า $n \geq 1$ จงพิสูจน์ $n^n \geq (n+1)^{n-1}$

การพิสูจน์ ให้

$$a_n = n^n \text{ และ } b_n = (n+1)^{n-1}$$

เมื่อ n = 1 และ n = 2 เห็นชัดว่าอสมการเป็นจริง ในขั้นอุปนัยพิจารณา

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \geq \frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{(k+1)^{k-1}}{k^{k-2}}$$

หรือ $k^{2k-2} \geq (k^2-1)^{k-1}$ ซึ่งเป็นจริง โดยการอุปนัย จะได้ตามที่ต้องการพิสูจน์ □

51. จงพิสูจน์สำหรับ $n \geq 1$, $3^n > n \cdot 2^n$

52. ถ้าผลคูณของจำนวนจริงบวก $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เท่ากับ 1 แล้ว

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) \geq 2^n$$

V. อสมการสำหรับผู้สนใจ

โจทย์ปัญหาชุดนี้ไม่ได้จัดหมวดหมู่ตามวิธีแก้ปัญหา การแสดงวิธีทำหรือการพิสูจน์อาจใช้หลายวิธีประกอบกัน

53. ถ้า $n \geq 1$ จงพิสูจน์ $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} > 1/\sqrt{n}$

54. ถ้า $0 < y < x < 1$ จงพิสูจน์ $\dfrac{x - y}{1 - xy} < 1$

55. ถ้า a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก และ $a < b + c$ จงพิสูจน์

$$\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$

56. ถ้า $a, b, c, d \geq 0$ และ $c + d \leq a$, $c + d \leq b$ จงพิสูจน์ $ad + bc \leq ab$

57. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงในช่วง [0, 1] จงพิสูจน์ $\dfrac{x}{1+y} + \dfrac{y}{1+x} \leq 1$

58. ถ้า x, y, z เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x} \leq 2$$

59. จงพิสูจน์ $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) > \dfrac{1}{2}$

60. ถ้า a, b, c, d เป็นจำนวนจริงในช่วง [0, 1] จงพิสูจน์

$$(a + b + c + d + 1)^2 \geq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

61. สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ จงแสดงว่าอสมการ $x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2 \geq 0$ เป็นจริง

62. จงพิสูจน์ ถ้า $x + y + z \geq xyz$ แล้ว $x^2 + y^2 + z^2 \geq xyz$

63. จงพิสูจน์ ทุก $n \geq 1$, $2 < \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 3$

64. จงพิสูจน์ ทุก $n \geq 1$, $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ โดยที่ $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

อ้างอิง

1. Fomin, D., Genkin, S., and Itenberg, **I. Mathematical Circles : Russian Experience.** Providence, RI. : American Mathematical Society, 1996.
2. Shklarsky, D.O., Chentzov, N.N. and Yaglom, I.M. **The USSR Olympiad Problem Book.** (translated by J.Maykovich). New York: Dover, 1994.