ชื่อโครงการวิจัย

ระเบียบวิธีการประมาณค่าสำหรับปัญหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่เชิงเส้นและปัญหาอสมการการแปรผัน

Approximation Method for Common Fixed Point Problems of Nonlinear Mappings and Variational Inequality Problems

โดย สุวิชา อิ่มนาง และ อรจิรา สิทธิศักดิ์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

โครงการวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนการวิจัย
จากงบประมาณแผ่นดิน ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2555
มหาวิทยาลัยทักษิณ

คำรับรองคุณภาพ

รายงานวิจัยเรื่อง ระเบียบวิธีการประมาณค่าสำหรับปัญหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่เชิงเส้นและปัญหาอสมการการแปรผัน

ผู้วิจัย สุวิชา อิ่มนาง และอรจิรา สิทธิศักดิ์

สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยทักษิณ ขอรับรองว่ารายงานวิจัยฉบับนี้ได้ผ่านการประเมินจากผู้ทรงคุณวุฒิแล้ว มีความเห็นว่าผลงานวิจัยฉบับนี้มีคุณภาพอยู่ในเกณฑ์

- [ ] ดีมาก
- [x] ดี
- [ ] ปานกลาง
- [ ] ต่ำ

....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พรพันธุ์ เขมคุณาศัย)

ผู้อำนวยการสถาบันวิจัยและพัฒนา

2 เมษายน 2556

มหาวิทยาลัยทักษิณ

ชื่อโครงการวิจัย (ภาษาไทย) ระเบียบวิธีการประมาณค่าสำหรับปัญหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่เชิงเส้นและปัญหาอสมการการแปรผัน

(ภาษาอังกฤษ) Approximation Method for Common Fixed Point Problems of Nonlinear Mappings and Variational Inequality Problems

ชื่อผู้วิจัย 1. อาจารย์ ดร. สุวิชา อิ่มนาง สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ โทรศัพท์ 074-693972 ต่อ 2579

2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อรจิรา สิทธิศักดิ์ สาขาวิชาคอมพิวเตอร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ โทรศัพท์ 074-693972 ต่อ 2576

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากงบประมาณแผ่นดิน มหาวิทยาลัยทักษิณ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2555 จำนวนเงิน 120,000 บาท ระยะเวลาทำการวิจัย 1 ปี ตั้งแต่ 1 กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2555 ถึง 31 มกราคม พ.ศ. 2556

บทคัดย่อ

โครงการวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำแบบใหม่ เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของปัญหาอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต ผู้วิจัยได้พิสูจน์ว่าระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นได้ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิกร่วมของปัญหาดังกล่าว นอกจากนี้ ผู้วิจัยได้ประยุกต์ทฤษฎีบทการลู่เข้าเพื่อแก้ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของวงศ์จำกัดของฟังก์ชัน maximal monotone ในปริภูมิฮิลเบิร์ต และงานวิจัยในโครงการนี้ได้ขยาย และพัฒนาองค์ความรู้ของ Takahashi และ Toyoda [32]

ABSTRACT

In this project, we construct a new iterative method for finding a common element of the set of solutions of a general system of variational inequalities, the set of solutions of a mixed equilibrium problem and the set of common fixed points of a finite family of nonexpansive mappings in a real Hilbert space. Furthermore, we prove that the studied iterative method converges strongly to a common element of these three sets. Consequently, we apply our main result to the problem of approximating a zero of a finite family of maximal monotone mappings in Hilbert spaces. The theorems presented in this paper, improve and extend the corresponding results of Takahashi and Toyoda [32] and many others.

ประกาศคุณูปการ

โครงการวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากงบประมาณแผ่นดิน มหาวิทยาลัยทักษิณ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2555 และได้รับการสนับสนุนการวิจัยจากศูนย์ความเป็นเลิศด้านคณิตศาสตร์ สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา ประเทศไทย ทั้งนี้ผู้เขียนขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิที่อ่าน และวิพากษ์เอกสารต้นฉบับ พร้อมทั้งแนะนำข้อบกพร่องของรายงานวิจัยฉบับนี้ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

สุวิชา อิ่มนาง และ อรจิรา สิทธิศักดิ์

มกราคม 2556

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

การศึกษาทฤษฎีการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำแบบใหม่ เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของ ปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึง ในปริภูมิฮิลเบิร์ต เป็นหัวข้อที่สำคัญเป็นอย่างยิ่ง ในการนำไปประยุกต์ใช้ ในทางวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์และวิทยาศาสตร์ประยุกต์ ดังนั้น ในบทนี้ผู้วิจัยจะให้รายละเอียดที่สำคัญของที่มาและความสำคัญของปัญหาวิจัย วัตถุประสงค์ของการวิจัย คำถามวิจัย หรือ สมมุติฐาน ขอบเขตของการดำเนินการวิจัย และ ประโยชน์ของการวิจัย โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญ ดังต่อไปนี้

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหาวิจัย

ปัจจุบันความก้าวหน้า ทางวิชาการด้านคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการพัฒนาทฤษฎีบท และองค์ความรู้ใหม่ๆ นั้น นับว่ามีบทบาท และสำคัญมากต่อการพัฒนาเทคโนโลยีสมัยใหม่ ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็น และสำคัญอย่างยิ่งต่อการพัฒนาประเทศ โดยเฉพาะทฤษฎีบทที่ได้จากการศึกษาปัญหาในทางคณิตศาสตร์นั้น สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างกว้างขวาง อาทิ เช่น นักเศรษฐศาสตร์ได้นำทฤษฎีบทของปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด (optimization problem) มาประยุกต์ใช้สำหรับการหาจุดที่ทำให้ได้กำไรสูงสุดหรือเพื่อหาจุดคุ้มทุน รวมถึงการใช้ทรัพยากรให้เกิดประโยชน์สูงสุด นักบัญชีได้นำทฤษฎีบทของปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด มาคำนวณทิศทางการขนส่ง เพื่อเสียค่าใช้จ่ายในการขนส่งน้อยที่สุด ซึ่งปัญหาดังกล่าวถูกรวมอยู่ในปัญหาทางคณิตศาสตร์ ที่เรียกว่า "ระบบปัญหาอสมการการแปรผัน (system of variational inequality problem)"

จากการศึกษาพบว่า ระบบปัญหาอสมการการแปรผันยังครอบคลุมอีกหลายปัญหา อาทิเช่น ปัญหาดุลยภาพการจราจรทางเครือข่าย (traffic network equilibrium problem) ปัญหาดุลยภาพราคาเชิงพื้นที่ (spatial price equilibrium problem) ปัญหาดุลยภาพตลาดผู้ขายน้อยราย (oligopolistic market equilibrium problem) ปัญหาดุลยภาพทางการเงิน (financial equilibrium problem) ปัญหาดุลยภาพการอพยพ (migration equilibrium problem) ปัญหาเครือข่ายเกี่ยวกับสิ่งแวดล้อม (environmental network problem) และปัญหาเครือข่ายความรู้ (knowledge network problem) ทำให้ในช่วง 10 ปีที่ผ่านมา มีนักวิจัยจำนวนมาก ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อศึกษาการประมาณค่า (approximation) หาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน ทั้งในปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert space) และปริภูมิบานาค (Banach space) ปัญหาอสมการการแปรผัน คือ การหา $u \in C$ ที่ทำให้

$$\langle Au, v-u\rangle \geq 0, \quad \forall v \in C$$

เมื่อ C เป็นเซตย่อยของปริภูมิฮิลเบิร์ต H และ A เป็นฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้นที่ส่งจาก C ไปยัง H นักวิจัยได้ศึกษาการหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน โดยเริ่มจากการหาผลเฉลยในปริภูมิยุคลิด (Eulidean space) ที่มีมิติจำกัด ($H = \mathbb{R}^n$) และได้พัฒนามาสู่การศึกษาการหาผลเฉลยในปริภูมิฮิลเบิร์ตใด ๆ

ปัญหาทางคณิตศาสตร์อีกหนึ่งปัญหา ที่นักวิจัยจำนวนมากให้ความสนใจศึกษา คือ ปัญหาจุดตรึง (fixed point problem) ทฤษฎีบทจุดตรึง นับว่าเป็นอีกแขนงหนึ่งของคณิตศาสตร์ ที่สามารถประยุกต์ใช้ได้อย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะอย่างยิ่งการศึกษาเกี่ยวกับ การมีคำตอบของสมการต่าง ๆ (existence of solution) และ การมีเพียงคำตอบเดียวของสมการ (uniqueness of solution) ตลอดจนการคิดค้น หาวิธีในการประ มาณหาคำตอบของสมการต่าง ๆ ดังนั้น การศึกษาทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการมีจุดตรึงของฟังก์ชันต่าง ๆ และ การหาระเบียบวิธีต่าง ๆ ที่ใช้ในการประมาณค่าคำตอบนั้น จึงเป็นอีกหนึ่งหัวข้อ ที่นักคณิตศาสตร์จำนวนมากให้ความสนใจ ศึกษา ค้นคว้าวิจัย จากการศึกษาที่ผ่านมา พบว่า การศึกษาทฤษฎีบทจุดตรึงมีความสัมพันธ์ใกล้ชิดต่อการศึกษา สมบัติเรขาคณิตของ ปริภูมิบานาค ตัวอย่าง เช่น สมบัติ Uniform convexity ของปริภูมิบานาค X ทำให้ได้ว่า ทุก ๆ ฟังก์ชันแบบไม่ขยาย (nonexpansive mapping) ที่ส่งจาก เซตย่อย C ของ X ไปยังตัวมันเอง มีจุดตรึงเสมอ โดยที่ C เป็นเซตย่อยปิด (closed) เซตคอนเวกซ์ (convex set) และมีขอบเขต (bounded) นอกจากนี้ เรารู้ความจริงว่า ถ้า X เป็นปริภูมิบานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูป (uniformly convex Banach space) และ T เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับ (asymptotically nonepansive mapping) จากเซตย่อย C ของ X ไปยังตัวมันเอง แล้ว T จะมีจุดตรึงเสมอ โดยที่ C เป็นเซตปิด คอนเวกซ์ และมีขอบเขต จากนั้นนักคณิตศาสตร์ ก็ให้ความสนใจศึกษาสมบัติเรขาคณิต อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับ การมีจุดตรึงของฟังก์ชัน ต่าง ๆ มากขึ้น ตามลำดับ และเป็นปัญหาที่กำลังเป็นที่สนใจกัน อย่างกว้างขวาง เมื่อมีการศึกษาการมีคำตอบ ของสมการต่าง ๆ แล้ว ปัญหาที่น่าสนใจต่อไปก็คือ เราจะหาคำตอบของสมการต่าง ๆนั้น ได้อย่างไร คำถามดังกล่าวนี้ ก็ทำให้มีนักคณิตศาสตร์จำนวนหนึ่ง สนใจศึกษาคิดค้น ระเบียบวิธีต่าง ๆ ที่ใช้ในการหาคำตอบ และประมาณค่าคำตอบ เช่น ระเบียบวิธีของ Picard Iteration, Ishikawa Iterations, Mann Iteration และ Noor iteration

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ อีกหนึ่งปัญหา ที่นักวิจัยทางคณิตศาสตร์ให้ความสนใจศึกษาเป็นจำนวนมาก คือปัญหาดุลยภาพผสม (mixed equilibrium problem) ซึ่งเป็นปัญหาที่คลอบคลุม ปัญหาที่สำคัญปัญหาหนึ่งทางคณิตศาสตร์ คือ ปัญหาดุลยภาพ (equilibrium problem) โดยมีนักวิจัยกลุ่มหนึ่งได้ศึกษาถึงความสัมพันธ์ของ เซตของผลเฉลยของปัญหาดุลยภาพผสม กับ เซตของปัญหาจุดตรึง โดยจากการศึกษา พบว่า ผลเฉลยของปัญหาดุลยภาพผสม มีความสัมพันธ์ กับ ปัญหาจุดตรึง ดังนั้น นักวิจัยจำนวนมาก ได้พยายามสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาดังกล่าว ในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในปี ค.ศ. 2008 Ceng et al. [8] ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ เพื่อประมาณค่าหาสมาชิกร่วม ของผลเฉลยระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน สำหรับฟังก์ชัน α และ β-inverse strongly monotone และ เซตของจุดตรึง ของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ ดังนี้ ให้ $x_1 = v \in C$ และ $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ เป็นลำดับ ที่กำหนด โดย

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \mu B x_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda \in (0, 2\alpha), \mu \in (0, 2\beta)$ และ $\{a_n\}, \{b_n\} \subset [0, 1]$ ภายใต้การวางเงื่อนไขของลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ โดย Ceng et al. ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ได้ลู่เข้าแบบเข้ม สู่สมาชิกร่วมของเซตของจุดตรึง ของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย S และ เซตผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน

จากแนวคิดดังกล่าว ผู้วิจัยต้องการสร้างและศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำ เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และ ปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยที่การประมาณค่าหาผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน จะศึกษา ในกรณีฟังก์ชัน relaxed cocoercive และการประมาณค่าของปัญหาจุดตรึง จะศึกษาวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ในปริภูมิฮิลเบิร์ต

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

การวิจัยในโครงการนี้มีวัตถุประสงค์ที่สำคัญ 3 ประการ คือ

1) เพื่อสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วม ของปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และ ปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต

2) เพื่อหาเงื่อนไข การลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้าง โดยข้อ 1.

3) เพื่อพิสูจน์ทฤษฎีการลู่เข้า ของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้าง โดยข้อ 1.

1.3 คำถามวิจัย หรือ สมมุติฐานวิจัย

เนื้อหานี้ ผู้วิจัยได้กำหนด ทฤษฎีบท และ สมมุติฐานของโครงการวิจัย ที่จำเป็นอย่างยิ่งต่อการศึกษาในโครงการวิจัยนี้ โดยที่ทฤษฎีบทแรก เป็นทฤษฎีที่สำคัญอย่างมาก ต่อการศึกษาการหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน ในปริภูมิฮิลเบิร์ต และ ทฤษฎีบทที่สอง เป็นทฤษฎีที่ศึกษา การลู่เข้าสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพ ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยมีสาระสำคัญ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 ให้ C เป็นเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H P_C เป็นภาพฉายระยะทาง และ $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน monotone แล้วจะได้ว่า u เป็นผลเฉลยของปัญหา อสมการการแปรผัน ก็ต่อเมื่อ $u = P_C(u - \lambda Au)$ สำหรับ $\lambda > 0$

ทฤษฎีบท 2 ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ ฟังก์ชัน $A, B : C \to H$ เป็น $\alpha-$inverse strongly monotone และ $\beta-$inverse strongly monotone ตามลำดับ และให้ $S : C \to C$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ที่ทำให้ $F(S) \cap \Omega \neq \emptyset$ เมื่อ Ω แทนเซตของผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน สมมุติให้ $x_1 = v \in C$ และ $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนด โดย

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \mu Bx_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n)SP_C(y_n - \lambda Ay_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda \in (0, 2\alpha)$ $\mu \in (0, 2\beta)$ และ $\{a_n\}$ $\{b_n\} \subset [0, 1]$ ที่ทำให้

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$

2. $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$

แล้ว $\{x_n\}$ จะลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\bar{x} = P_{P(S)\cap\Omega}v$ และ $(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน เมื่อ $\bar{y} = P_C(\bar{x} - \mu B\bar{x})$

สมมุติฐานของโครงการวิจัย

1) จากทฤษฎีบท 2 เราสามารถสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายได้หรือไม่

2) สามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้า ของระเบียบที่สร้างโดยข้อ 1) ได้หรือไม่ โดยศึกษากรณีที่ A และ B เป็นฟังก์ชัน relaxed cocoercive และจะมีระเบียบวิธีทำซ้ำอื่นหรือไม่ ที่ลู่เข้าสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัด ของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต

1.4 ขอบเขตการวิจัย

การวิจัยในโครงการนี้ จะศึกษาทฤษฎีบทการลู่เข้า ของระเบียบวิธีทำซ้ำใหม่ เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วม ของปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และ ปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย โดยการประมาณค่าหาผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน นั้น จะศึกษาในกรณีที่ A และ B เป็นฟังก์ชัน relaxed cocoercive ที่ส่งจากเซตย่อย C ของปริภูมิฮิลเบิร์ต H ไปยัง H พร้อมทั้ง พิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้น สู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาดังกล่าว

1.5 ประโยชน์ที่ได้รับ

โครงการวิจัยนี้ ผู้วิจัยศึกษาทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้น เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย โดยประโยชน์ที่จะได้รับ ดังต่อไปนี้

1) ได้ระเบียบวิธีทำซ้ำใหม่ เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วม ของปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงร่วม ของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ในปริภูมิฮิลเบิร์ต
2) ได้ทฤษฎีบทและองค์ความรู้ใหม่ เกี่ยวกับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วม ของปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ในปริภูมิฮิลเบิร์ต
3) ได้ทฤษฎีบทการลู่เข้า ซึ่งสามารถนำไปใช้เป็นทฤษฎีในการอ้างอิงเพื่อให้เกิดความก้าวหน้าทางวิชาการ
4) มีบุคลากรในหน่วยงานสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ มหาวิทยาลัยทักษิณ ทำงานวิจัยด้านทฤษฎีจุดตรึงและการประยุกต์ เพิ่มขึ้น
5) ผลงานวิจัยได้ตีพิมพ์ ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติ ที่มีมาตรฐานสากล จำนวน 1 เรื่อง

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้ ผู้วิจัยได้ให้รายละเอียดที่สำคัญ ของที่มาของปัญหาวิจัย ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับปัญหาวิจัย และ งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง กับการประมาณค่าเพื่อหาผลเฉลยของปัญหาจุดตรึง ปัญหาอสมการการแปรผัน ปัญหาสมดุลผสม ตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน และกรอบแนวความคิดของปัญหาวิจัย โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญ ดังต่อไปนี้

2.1 การประมาณค่าจุดตรึง

กำหนดให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต พร้อมกับผลคูณภายใน $\langle .,. \rangle$ และ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของ H จะเรียกฟังก์ชัน $T : C \to C$ ว่า *ฟังก์ชันแบบไม่ขยาย (nonexpansive mapping)* ถ้า $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ สำหรับแต่ละ $x, y \in C$ เซตจุดตรึง (fixed point set) ของ T ถูกกำหนดโดย $F(T) = \{x \in C : Tx = x\}$

ในปี ค.ศ. 1967 Halpern [13] ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ เพื่อประมาณค่าหาจุดตรึงของฟังก์ชัน T โดยที่ T เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย บนเซต C โดยกำหนดลำดับ $\{x_n\}$ ดังนี้ ให้ $x_1 \in C$ และ

$$x_{n+1} = \alpha_n v + (1 - \alpha_n)Tx_n, \quad n \geq 1 \tag{2.1.1}$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ในช่วง $[0, 1]$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข ดังต่อไปนี้

$$C1 : \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0; \quad C2 : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

Halpern ได้ศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำ (2.1.1) ในกรณีที่ $\alpha_n = n^{-\sigma}$, $\sigma \in (0, 1)$ และ $v = 0$ และได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ได้ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงของฟังก์ชัน T

ต่อมา ในปี ค.ศ. 1977 Lions [16] ได้พัฒนาผลงานของ Halpern ที่จำกัดการศึกษากรณีที่ลำดับ $\alpha_n = n^{-\sigma}$, $\sigma \in (0, 1)$ เท่านั้น มาศึกษา ในกรณีที่ $\{\alpha_n\}$ เป็นลำดับใด ๆ ในช่วง $[0, 1]$ โดยที่ $\{\alpha_n\}$ สอดคล้องเงื่อนไข ดังต่อไปนี้

$$C1 : \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0; \quad C2 : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty; \quad C3 : \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha_{n+1} - \alpha_n|}{\alpha_{n+1}^2} = 0$$

Lions ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ที่กำหนดโดยสมการ (2.1.1) ได้ลู่เข้าแบบเข้ม สู่จุดตรึงของฟังก์ชัน T ในปริภูมิฮิลเบิร์ต H

ในปี ค.ศ. 1994 Reich [30] ได้พัฒนาผลงานของ Halpern ที่ศึกษาทฤษฎีบทการลู่เข้าในปริภูมิฮิลเบิร์ต H มาศึกษาในปริภูมิ uniformly smooth ภายใต้การวางเงื่อนไขเดียวกันของลำดับ $\{\alpha_n\}$ Reich พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ได้ลู่เข้าแบบเข้ม สู่จุดตรึงของฟังก์ชัน T นอกจากนี้ Reich ได้ให้ข้อสังเกตุที่สำคัญว่า ลำดับของจำนวนจริง $\{\alpha_n\}$ ที่ศึกษาทั้งในผลงานของ Halpern และ Lions นั้น ยังไม่ครอบคลุม กรณี $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$ ดังนั้น ปัญหาที่นักวิจัยต้องการศึกษาเพิ่มเติม คือ จะวางเงื่อนไขอย่างไรของลำดับ $\{\alpha_n\}$ ถึงจะครอบคลุมกรณี $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$ ด้วย เพื่อตอบปัญหาดังกล่าว Wittmann [35] ได้ศึกษาทฤษฎีบทการลู่เข้า ของระเบียบวิธีทำซ้ำ (2.1.1) ในปริภูมิฮิลเบิร์ต H โดย Wittmann ได้พิสูจน์ว่า ถ้า $\{\alpha_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข ดังต่อไปนี้

$$C1: \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0; \quad C2: \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty; \quad C3: \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$$

แล้ว ลำดับ $\{x_n\}$ จะลู่เข้าแบบเข้ม สู่จุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย T

2.2 ปัญหาอสมการการแปรผัน

ต่อไปจะกล่าวถึง งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการประมาณค่าหาผลเฉลย ของปัญหาอสมการการแปรผัน ปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไป และ การประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดังกล่าว กับปัญหาจุดตรึง ปัญหาอสมการการแปรผัน เริ่มศึกษาในปีค.ศ. 1964 โดย Stampacchi [29] ศึกษาปัญหาที่เรียกว่า "อสมการการแปรผันแบบดั้งเดิม (classical variational inequality)" คือ การหาสมาชิก $x^* \in C$ ที่ทำให้

$$\langle Ax^*, y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \tag{2.2.1}$$

เซตของผลเฉลยทั้งหมด ของปัญหา (2.2.1) เขียนแทนด้วย $VI(C, A)$ จากระบบปัญหา (2.2.1) เป็นที่ทราบว่า x^* เป็นผลเฉลยของระบบปัญหา (2.2.1) ก็ต่อเมื่อ $x^* = P_C(x^* - \lambda Ax^*)$ เมื่อ $\lambda > 0$ และ P_C เป็นภาพฉายระยะทาง (metric projection) นั่นแสดงให้เห็นว่า ปัญหาอสมการการแปรผัน มีความเกี่ยวข้องกับปัญหาจุดตรึง ปัญหาสำคัญที่เกี่ยวข้องกับปัญหาอสมการการแปรผันนั้น ยังมีอีกมากมาย อาทิ ปัญหาอสมการการแปรผันแบบไม่คอนเวกซ์ ปัญหาอสมการการแปรผันแบบผสม มีนักวิจัยศึกษาอยู่เป็นจำนวนมาก สามารถศึกษาความรู้เพิ่มเติมได้จากเอกสาร ดังต่อไปนี้ Ceng et al. [1−10] Chang et al. [11] Noor [19−21] Peng และ Yao [23−25] Plubtieng และ Punpaeng [27] Yao et al. [37] Zeng และ Yao [40] Zhao และ He [41] สำหรับการประมาณค่าหาผลเฉลย ของปัญหาอสมการการแปรผันนั้น ได้เริ่มศึกษาจากปริภูมิยูคลิดที่มีมิติจำกัด ($H = \mathbb{R}^n$) เป็นปริภูมิแรก โดยศึกษาภายใต้สมมุติฐาน C เป็นเซตย่อย ปิด และคอนเวกซ์ของ $\mathbb{R}^n$

ต่อมา ในปี ค.ศ. 1976 Korpelevich [15] ได้นิยามระเบียบวิธีทำซ้ำ ที่เรียกว่า วิธีเอกซตราเกรเดียนต์ (extragradient method) โดยกำหนดลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ดังนี้

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda Ax_n), \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda Ay_n), \end{cases}$$

สำหรับทุกค่า $n = 0, 1, 2, \ldots$ เมื่อ $A : C \to \mathbb{R}^n$ เป็นฟังก์ชันประเภท monotone และ k-Lipschitz continuous และ $\lambda \in (0, 1/k)$ ภายใต้สมมุติฐาน $VI(C, A) \neq \emptyset$ Korpelevich ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ได้ลู่เข้าสู่ผลเฉลยค่าเดียวกัน ของปัญหาอสมการการแปรผัน (2.2.1)

ในปี ค.ศ. 2003 Takahashi และToyoda [32] ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมสำหรับปัญหาจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย และปัญหาอสมการการแปรผัน โดยสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ $\{x_n\}$ ดังนี้

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) S P_C(x_n - \lambda_n A x_n)$$

เมื่อ $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$, $\{\lambda_n\} \subset (0, 2\alpha)$ และ $S : C \to C$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย P_C เป็นภาพฉายระยะทาง และ $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน $\alpha-$inverse strongly monotone โดยที่ Takahashi และToyoda ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่งนิยามโดย (8) ลู่เข้าแบบอ่อน สู่สมาชิกร่วมของปัญหาจุดตรึง และปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ต

ในปี ค.ศ. 2006 Nadezhkina และ Takahashi [18] ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ เพื่อประมาณค่าหาสมาชิกร่วมของปัญหาจุดตรึง ของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย และผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผันสำหรับฟังก์ชัน monotone และ k-Lipschitz continuous โดยกำหนดลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ดังนี้

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) S P_C(x_n - \lambda_n A y_n) \end{cases} \tag{2.2.2}$$

เมื่อ $\{\lambda_n\} \subset [a, b]$ และ $\{\alpha_n\} \subset [c, d]$ สำหรับบางจำนวนจริง $c, d \in (0, 1)$ นอกจากนี้ Nadezhkina และ Takahashi ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ซึ่งนิยามโดย (2.2.2) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่สมาชิก $z \in F(S) \cap VI(C, A)$ เมื่อ $z = \lim_{n\to\infty} P_{F(S)\cap VI(C,A)} x_n$

ต่อมา ในปี ค.ศ. 2007 Yao และ Yao [38] ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ เพื่อประมาณค่าหาสมาชิกร่วมของเซต $F(S) \cap VI(C, A)$ ภายใต้สมมุติฐาน $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α-inverse strongly monotone และ $S : C \to C$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย โดยที่ $F(S) \cap VI(C, A) \neq \emptyset$ โดยนิยามลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ดังนี้

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_n x_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n S P_C(y_n - \lambda_n A y_n) \end{cases} \tag{2.2.3}$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ $\{\gamma_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ในช่วงปิด $[0, 1]$ และ $\{\lambda_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ในช่วงปิด $[0, 2\alpha]$ นอกจากนี้ Yao และ Yao ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ที่กำหนดโดย (2.2.3) ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิก $z \in F(S) \cap VI(C, A)$ เมื่อ $z = P_{F(S)\cap VI(C,A)} u$

2.3 ปัญหาดุลยภาพ

ต่อไปจะให้นิยามของปัญหาดุลยภาพ (equilibrium problem) ซึ่งเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญมาก โดยเฉพาะทางเศรษฐศาสตร์ได้นำไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวาง โดยกำหนดนิยามดังนี้ ให้ $F : C \times C \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง ปัญหาดุลยภาพ คือ ปัญหาการหาสมาชิก $x \in C$ ที่ทำให้

$$. F(x,y) \geq 0, \quad \forall y \in C$$

เซตคำตอบทั้งหมดของปัญหาดุลยภาพ เขียนแทนด้วย $EP(F)$

การประมาณค่าหาผลเฉลยร่วม ของปัญหาดุลยภาพ ปัญหาจุดตรึง และปัญหาอสมการการแปรผัน นั้น ในปี ค.ศ. 2008 Plubtieng และ Punpaeng [27] ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาสมาชิกร่วมของเซต $F(S) \cap VI(C,A) \cap EP(F)$ ภายใต้สมมุติฐาน $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน $\alpha-$inverse strongly monotone และ $S : C \to C$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย โดยที่ $F(S) \cap VI(C,A) \cap EP(F) \neq \emptyset$ และนิยามลำดับ $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ และ $\{z_n\}$ ดังนี้

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C; \\ y_n = P_C(u_n - \lambda_n u_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n SP_C(y_n - \lambda_n Ay_n) \end{cases} \tag{2.3.1}$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ และ $\{\gamma_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ในช่วงปิด $[0,1]$ และ $\{\lambda_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ในช่วงปิด $[0,2\alpha]$ นอกจากนี้ ภายใต้การวางเงื่อนไขของฟังก์ชัน F ลำดับ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ และ $\{\gamma_n\}$ นั้น Plubtieng และ Punpaeng ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ที่กำหนดโดย (2.3.1) ลู่เข้าแบบเข้ม สู่สมาชิก $z \in F(S) \cap VI(C,A) \cap EP(F)$ เมื่อ $z = P_{F(S)\cap VI(C,A)\cap EP(F)}u$

ปี ค.ศ. 2009 Qin, Cho และ Kang [28] สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ เพื่อประมาณค่าหาสมาชิกร่วมของปัญหาดุลยภาพ ปัญหาจุดตรึงร่วม และปัญหาอสมการการแปรผันของ $A_i : C \to H$, $i = 1,2$ เมื่อ A_i เป็นฟังก์ชันประเภท $\alpha-$inverse strongly monotone และฟังก์ชัน $S_i : C \to C$, $i = 1,2$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย โดยกำหนดลำดับ $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ และ $\{z_n\}$ ดังนี้

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C; \\ y_n = P_C(u_n - \lambda_n u_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n SP_C(y_n - \lambda_n Ay_n) \end{cases} \tag{2.3.2}$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ และ $\{\beta_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ในช่วงปิด $[0,1]$ และ $\{\lambda_n\}$ $\{\gamma_n\}$ และ $\{\mu_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ในช่วงปิด $[0,2\alpha]$ ภายใต้การวางเงื่อนไขของลำดับ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ $\{\gamma_n\}$ $\{\lambda_n\}$ และ $\{\mu_n\}$ นั้น Qin, Cho และ Kang ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ ที่สร้างโดย (2.3.2) ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิกร่วมผลเฉลยของปัญหาดุลยภาพ ปัญหาจุดตรึงร่วม และปัญหาอสมการการแปรผัน

2.4 ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผันและปัญหาดุลยภาพผสม

หัวข้อนี้ ผู้วิจัยได้ให้รายละเอียดที่สำคัญมาก ของปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยจะแบ่งเนื้อหาออกเป็นสองส่วน คือ เนื้อหาส่วนแรก จะให้รายละเอียดของระบบปัญหาทั่วไปของปัญหาอสมการการแปรผัน และเนื้อหาส่วนที่สอง จะให้รายละเอียดเกี่ยวกับปัญหาดุลยภาพผสม
โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญ ดังต่อไปนี้

2.4.1 ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน

รายละเอียดของปัญหาอสมการการแปรผัน ผู้วิจัยได้ให้รายละเอียดไว้ในหัวข้อ 2.2 ในหัวข้อนี้ผู้วิจัย จะให้รายละเอียดของปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ครอบคลุมปัญหาอสมการการแปรผัน โดยเริ่มจากมีนักวิจัยกลุ่มหนึ่ง พยายามสร้างระบบปัญหาที่ให้คำตอบมากกว่า ระบบปัญหาที่มีอยู่เดิม และเรียกระบบนั้นว่า "ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน" (general system of variational inequalities)

ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ได้ศึกษาครั้งแรก ในปีค.ศ. 2008 โดย Ceng et al. [8] ได้ศึกษาปัญหาการหาสมาชิก $(x^*, y^*) \in C \times C$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle \lambda Ay^* + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \mu Bx^* + y^* - x^*, x - y^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \end{cases} \tag{2.4.1}$$

เมื่อ λ และ μ เป็นสองจำนวนจริงบวก และ $A, B : C \to H$ เป็นสองฟังก์ชันใดๆ กรณีเฉพาะของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน จะเห็นว่า ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน $A = B$ แล้ว ระบบปัญหา (2.4.1) จะลดรูปเป็นระบบปัญหาการหาสมาชิก $(x^*, y^*) \in C \times C$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle \lambda Ay^* + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \mu Ax^* + y^* - x^*, x - y^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C \end{cases} \tag{2.4.2}$$

ซึ่งเป็นระบบที่ศึกษาโดย Verma [33] และเรียกระบบนี้ว่า "ระบบใหม่ของอสมการการแปรผัน (new system of variational inequalities)" นอกจากนี้ ถ้าเพิ่มเงื่อนไข ให้ $x^* = y^*$ แล้ว ระบบปัญหา (2.4.1) จะลดรูปเป็น การหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน $VI(C, A)$ ในหัวข้อ 2.2
ในการประมาณค่าหาผลเฉลย ของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน Ceng et al. [8] ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ เพื่อประมาณค่าหาสมาชิกร่วม ของผลเฉลยระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน สำหรับฟังก์ α และ β-inverse strongly monotone และเซตของจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย ในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ ดังนี้
ให้ $x_1 = v \in C$ และ $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \mu Bx_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n)SP_C(y_n - \lambda Ay_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda \in (0, 2\alpha), \mu \in (0, 2\beta)$ และ $\{a_n\}, \{b_n\} \subset [0, 1]$ ภายใต้การวางเงื่อนไขของลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ Ceng et al. ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ได้ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิกร่วม ของเซตของจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย S และ ผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน (2.4.1)

ในปี ค.ศ. 2010 Yao Liou และ Kang [36] ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบปัญหา (2.4.1) และ ปัญหาจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย S ในกรณีที่ $A, B : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α และ β-inverse strongly monotone ตามลำดับ
โดย Yao Liou และ Kang ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ และ $\{z_n\}$ ดังนี้

$$\begin{cases} z_n = P_C(x_n - \mu B x_n), \\ y_n = \alpha_n Q x_n + (1-\alpha_n) P_C(z_n - \lambda A z_n), \\ x_{n+1} = \beta_n x_n + \gamma_n P_C(z_n - \lambda A z_n) + \delta_n S y_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda \in (0, 2\alpha), \mu \in (0, 2\beta)$ และ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ $\{\gamma_n\}$ $\{\delta_n\} \subset [0,1]$ ภายใต้การวางเงื่อนไขของลำดับ$\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ $\{\gamma_n\}$ และ $\{\delta_n\}$ Yao Liou และ Kang ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ได้ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิกร่วมของเซตของจุดตรึง ของการส่งแบบไม่ขยาย S และผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน (2.4.1)

2.4.2 ปัญหาดุลยภาพผสม

ในหัวข้อ 2.3 ผู้วิจัย ได้ให้รายละเอียดของปัญหาดุลยภาพ ซึ่งเป็นปัญหาที่มีประโยชน์อย่างมาก ต่อวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์และวิทยาศาสตร์ประยุกต์ และสามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้อย่างกว้างขวาง อาทิ เช่น ประยุกต์ใช้สำหรับการหาจุดที่ทำให้ได้กำไรสูงสุด หรือ เพื่อหาจุดคุ้มทุน รวมถึงการใช้ทรัพยากรให้เกิดประโยชน์สูงสุด นักบัญชี ได้นำทฤษฎีบทของปัญหาการหาค่าเหมาะที่สุด มาคำนวณทิศทางการขนส่ง เพื่อให้เสียค่าใช้จ่ายในการขนส่งน้อยที่สุด ดังนั้น จึงมีนักวิจัยจำนวนมาก สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่า หาผลเฉลยของปัญหาดุลยภาพอย่างต่อเนื่อง จากเหตุผลดังกล่าว ได้มีนักวิจัยกลุ่มหนึ่ง ได้ศึกษาปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่คลอบคลุมปัญหาดุลยภาพ และเรียกปัญหานั้นว่า "ปัญหาดุลยภาพผสม (mixed equilibrium problem)" โดยมีเนื้อหาสาระ ดังนี้

ให้ $\varphi : C \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชัน และ F เป็นฟังก์ชัน ที่ส่งจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ เมื่อ $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริง ในปี ค.ศ. 2008 Ceng และ Yao [9] ได้ศึกษาปัญหาการหาสมาชิก $x \in C$ ที่ทำให้

$$F(x, y) + \varphi(y) \geq \varphi(x), \quad \forall y \in C \qquad (2.4.3)$$

เรียก ปัญหา (2.4.3) ว่า ปัญหาดุลยภาพผสม และเซตของผลเฉลยทั้งหมด ของปัญหา (2.4.3) เขียนแทนด้วย $MEP(F, \varphi)$ จากปัญหา (2.4.3) จะเห็นว่า ถ้า x เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4.3) แล้ว $x \in \text{dom}\varphi = \{x \in C \mid \varphi(x) < +\infty\}$

จากปัญหา (2.4.3) จะเห็นว่า ถ้า $\varphi = 0$ แล้ว ปัญหาดุลยภาพผสม (2.4.3) จะกลายเป็นปัญหาการหาสมาชิก $x \in C$ ที่ทำให้

$$F(x, y) \geq 0, \quad \forall y \in C$$

ซึ่งก็คือ ปัญหาดุลยภาพ (ปัญหาการหาสมาชิก $EP(F)$) ที่ศึกษาในหัวข้อ 2.3 นอกจากนี้ จะเห็นว่าถ้า $F = 0$ แล้ว ปัญหาดุลยภาพผสม (2.4.3) จะลดรูปเป็น ปัญหา convex minimization ซึ่งเป็นปัญหา การหาสมาชิก $x \in C$ ที่ทำให้

$$\varphi(y) \geq \varphi(x), \quad \forall y \in C \qquad (2.4.4)$$

นอกจากนี้ จะเห็นว่า ถ้า $\varphi = 0$ และ $F(x,y) = \langle Ax, y - x\rangle$ สำหรับแต่ละสมาชิก $x, y \in C$ และ A เป็นฟังก์ชันที่ส่งจาก C ไปยัง H แล้วปัญหาดุลยภาพผสม (2.4.3) จะกลายเป็นปัญหาอสมการการแปรผัน และรู้มากกว่านั้นว่า $EP(F) = VI(C,A)$ การประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาสมดุลผสม จึงเป็นปัญหาที่มีความสำคัญ และจำเป็นอย่างยิ่ง ดังนั้น จึงมีนักวิจัยจำนวนมากได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาดังกล่าว อาทิ เช่น Peng และ Yao [26] ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} x = x_1 \in C, \\ F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \gamma_n A u_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n v + \beta_n x_n + (1 - \alpha_n + \beta_n) W_n P_C(u_n - \gamma_n A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

ภายใต้การวางเงื่อนไขของฟังก์ชัน F , φ, W_n และลำดับ $\{\alpha_n\}$ ลำดับ $\{\beta_n\}$ ลำดับ $\{\gamma_n\}$ และลำดับ $\{r_n\}$ Peng และ Yao ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ลำดับ $\{y_n\}$ และลำดับ $\{u_n\}$ ได้ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิกร่วมของเซตของผลเฉลยของปัญหาสมดุลผสม เซตของผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน และเซตของปัญหาจุดตรึง

2.5 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในเนื้อหานี้ จะให้รายละเอียดของ นิยาม ทฤษฎีบท บทตั้ง และองค์ความรู้อื่นๆ ที่จำเป็นอย่างยิ่งต่อการพิสูจน์ ทฤษฎีบทการลู่เข้าในบทที่ 3 โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญ ดังต่อไปนี้

กำหนดให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต พร้อมกับผลคูณภายใน $\langle .,. \rangle$ และ C เป็นเซตย่อยปิดคอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของ H ให้ $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก A ว่า *monotone* ถ้า

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in C$$

และเรียกฟังก์ชัน A ว่า α-*strongly monotone* ถ้า มีจำนวนจริงบวก $\alpha > 0$ ที่ทำให้

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq \alpha\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C$$

จากอสมการนี้ ทำให้ได้ว่า

$$\|Ax - Ay\| \geq \alpha\|x - y\|$$

นั่นคือ A เป็นฟังก์ชัน α-*expansive* นอกจากนี้ จะเห็นว่า ถ้า $\alpha = 1$ แล้ว ฟังก์ชัน A จะเป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย

จากนิยามของฟังก์ชัน monotone ฟังก์ชัน α-expansive และ ฟังก์ชันแบบไม่ขยาย สามารถตรวจสอบได้ง่าย ถึงความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน ดังนี้

$$\begin{array}{ccc} \text{strong monotonicity} & \Rightarrow & \text{monotonicity} \\ \Downarrow & & \\ \text{expansiveness} & & \end{array}$$

จะเรียกฟังก์ชัน A ว่า *L-Lipschitz continuous* (หรือ *Lipschitzian*) ถ้ามีค่าคงที่ $L \geq 0$ ที่ทำให้

$$\|Ax - Ay\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in C$$

ฟังก์ชัน A จะถูกเรียกว่า *α-inverse-strongly monotone* (หรือ *α-cocoercive*) ถ้า มีจำนวนจริงบวก $\alpha > 0$ ที่ทำให้

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq \alpha\|Ax - Ay\|^2, \quad \forall x, y \in C$$

จากนิยามดังกล่าวเห็นได้ชัดว่า ถ้า A เป็นฟังก์ชัน α-inverse-strongly monotone แล้ว A เป็นฟังก์ชัน monotone และ Lipschitz continuous ด้วย นอกจากนี้ จะเห็นว่า ถ้า A เป็นฟังก์ชัน α-strongly และ L-Lipschitz continuous แล้ว A เป็น (α/L^2)-inverse-strongly monotone แต่ฟังก์ชัน inverse-strongly monotone ไม่จำเป็นที่จะเป็น ฟังก์ชัน strongly monotone
จะเรียกฟังก์ชัน A ว่า *relaxed c-cocoercive* ถ้า มีค่าคงที่ $c > 0$ ที่ทำให้

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq (-c)\|Ax - Ay\|^2, \quad \forall x, y \in C$$

และ จะเรียกฟังก์ชัน A ว่า *relaxed (c,d)-cocoercive* ถ้า มีสองค่าคงที่ $c, d > 0$ ที่ทำให้

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq (-c)\|Ax - Ay\|^2 + d\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C$$

จะเห็นว่า ถ้า $c = 0$ แล้ว A จะเป็นฟังก์ชัน d-strongly monotone ดังนั้น จะเห็นว่าคลาสของฟังก์ชัน relaxed (c,d)-cocoercive จะใหญ่กว่า คลาสของฟังก์ชัน strongly monotone ดังนั้น จึงได้ความสัมพันธ์ที่ตามมา ดังนี้ d-strong monotonicity $\Rightarrow$ relaxed (c, d)-cocoercivity

จากนิยามของฟังก์ชันดังกล่าว จะได้ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันที่สำคัญตามมา ดังนี้ ถ้า ตัวดำเนินการ (operator) เป็น Lipschitz continuous แล้ว relaxed cocoercivity จะเป็น strongly monotone แต่ strongly monotone จะไม่เป็น cocoercivity ดังอธิบายด้วยตัวอย่าง ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1. ให้ $H = R$, $C = [1, \infty)$ และ $A : C \to H$ ซึ่ง นิยามโดย $Ax = x^2$, $x \in C$ สำหรับแต่ละ $x, y \in C$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\langle Ax - Ay, x - y\rangle &= (x^2 - y^2)(x - y) \\
&= (x + y)|x - y|^2 \\
&\geq 2|x - y|^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น A เป็น 2-strongly monotone พิจารณา สมมุติให้ A เป็น μ-cocoercive สำหรับบาง $\mu > 0$ จะได้ว่า $\langle Ax - Ay, x - y\rangle = (x + y)|x - y|^2 \geq \mu|x^2 - y^2|^2$ เป็นผลให้ $x + y \leq \frac{1}{\mu}$ สำหรับทุก $x, y \in [1, \infty)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น A จึงไม่เป็น μ-cocoercive สำหรับแต่ละ $\mu > 0$

ต่อไปจะให้ความหมายของฟังก์ชัน metric projection ซึ่งมีบทบาท และ มีความสำคัญเป็นอย่างมากกับการประมาณค่า หาผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และ ปัญหาจุดตรึง โดยมีสาระสำคัญดังนี้ในปริภูมิฮิลเบิร์ต H เป็นที่ทราบกันดีว่า แต่ละสมาชิก $x \in H$ จะมีสมาชิกใน C เพียงค่าเดียวเท่านั้น ที่ใกล้ x ที่สุด และเขียนสมาชิกนั้น ด้วย $P_C x$ จากข้อเท็จจริงดังกล่าว ทำให้ได้ว่า

$$\|x - P_C x\| \leq \|x - y\|, \quad \forall y \in C$$

และเรียกสมาชิก P_C ว่า *metric projection* ของ H ทั่วถึง C จากสมบัติดังกล่าว สามารถแสดงได้ง่ายว่า P_C เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายจาก H ทั่วถึง C และสอดคล้องกับสมบัติ

$$\langle x-y, P_Cx-P_Cy\rangle \geq \|P_Cx-P_Cy\|^2, \quad \forall x,y\in H \tag{2.5.1}$$

จากอสมการ (2.5.1) เป็นผลให้ได้ว่า

$$\|(x-y)-(P_Cx-P_Cy)\|^2 \leq \|x-y\|^2-\|P_Cx-P_Cy\|^2, \quad \forall x,y\in H \tag{2.5.2}$$

นอกจากนี้สมบัติของ metric projection ยังมีเพิ่มเติมอีก ดังต่อไปนี้: $P_Cx\in C$ และ

$$\begin{aligned}&\langle x-P_Cx, y-P_Cx\rangle \leq 0,\\ &\|x-y\|^2 \geq \|x-P_Cx\|^2+\|P_Cx-y\|^2\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

สำหรับทุกสมาชิก $x\in H$ และสมาชิก $y\in C$ ซึ่งสามารถศึกษาข้อมูล และรายละเอียดได้จากผลงานของ Goebel และ Kirk [12]

การศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาสมดุลผสม เงื่อนไข และ สมมุติฐานที่จำเป็นอย่างยิ่ง ของฟังก์กัน F,φ และเซตย่อย C โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญ ดังต่อไปนี้

(A1) $F(x,x)=0$ สำหรับทุก $x\in C$;

(A2) F เป็นฟังก์ชัน monotone กล่าวคือ $F(x,y)+F(y,x)\leq 0$ สำหรับทุก $x,y\in C$;

(A3) สำหรับแต่ละ $y\in C$ ฟังก์ชันที่กำหนดโดย $x\mapsto F(x,y)$ เป็น weakly upper semicontinuous;

(A4) สำหรับแต่ละ $x\in C$ ฟังก์ชันที่กำหนดโดย $y\mapsto F(x,y)$ เป็น convex;

(A5) สำหรับแต่ละ $x\in C$ ฟังก์ชันที่กำหนดโดย $y\mapsto F(x,y)$ เป็น lower semicontinuous;

(B1) สำหรับแต่ละ $x\in H$ และ $r>0$ จะมีเซตย่อยที่มีขอบเขต $D_x\subseteq C$ และ $y_x\in C$ ที่ทำให้สำหรับแต่ละ $z\in C\setminus D_x$,

$$F(z,y_x)+\varphi(y_x)+\frac{1}{r}\langle y_x-z, z-x\rangle < \varphi(z)$$

(B2) C เป็นเซตที่มีขอบเขต

การพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้า ของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นในบทที่ 3 บทตั้ง (Lemma) ที่จำเป็นและสำคัญอย่างมาก ต่อการศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วม ของปัญหาดุลยภาพผสม ผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึง มีดังต่อไปนี้

บทตั้ง 2.5.1. ([26]) *ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ F เป็นฟังก์ชันที่ส่ง จาก $C\times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) และให้ $\varphi: C\to\mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ เป็น proper lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ สมมุติให้สอดคล้องกับเงื่อนไข ข้อใดข้อหนึ่งระหว่าง (B1) หรือ (B2) สำหรับ $r>0$ และ $x\in H$ กำหนดฟัง ก์ชัน $T_r: H\to C$ ดังนี้*

$$T_r(x)=\left\{z\in C: F(z,y)+\varphi(y)+\frac{1}{r}\langle y-z, z-x\rangle\geq\varphi(z), \quad \forall y\in C\right\}$$

สำหรับทุก $x\in H$ แล้วจะได้แต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง:

(1) *สำหรับแต่ละ $x\in H$, $T_r(x)\neq\emptyset$;*

(2) T_r *ส่งไปที่ค่าเดียว;*
(3) T_r *เป็น firmly nonexpansive กล่าวคือ สำหรับแต่ละ* $x, y \in H$,

$$\|T_r(x) - T_r(y)\|^2 \leq \langle T_r x - T_r y, x - y \rangle;$$

(4) $F(T_r) = MEP(F, \varphi)$;
(5) $MEP(F, \varphi)$ *เป็นเซตปิด และคอนเวกซ์*

บทตั้ง 2.5.2. ([17]) ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก ซึ่งสอดคล้องสมบัติดังนี้

$$a_{n+1} \leq (1 - t_n)a_n + b_n + t_n c_n, \quad \forall n \geq 1,$$

เมื่อ $\{t_n\}$ $\{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข:

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \infty; \quad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty; \quad \text{(iii)} \limsup_{n\to\infty} c_n \leq 0$$

แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

บทตั้ง 2.5.3. ([22]) *ให้* $(H, \langle .,. \rangle)$ *เป็นปริภูมิผลคูณภายใน แล้ว สำหรับแต่ละ* $x, y, z \in H$ *และ* $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$ *พร้อมกับเงื่อนไข* $\alpha + \beta + \gamma = 1$ *จะได้ว่า*

$$\begin{aligned}\|\alpha x + \beta y + \gamma z\|^2 = \alpha\|x\|^2 + \beta\|y\|^2 + \gamma\|z\|^2 - \alpha\beta\|x - y\|^2 \\ - \alpha\gamma\|x - z\|^2 - \beta\gamma\|y - z\|^2\end{aligned}$$

บทตั้ง 2.5.4. ([31]) *ให้* $\{x_n\}$ *และ* $\{y_n\}$ *เป็นลำดับที่มีขอบเขตในปริภูมิบานาค* X *กำหนดให้* $\{b_n\}$ *เป็นลำดับใน* $[0, 1]$ *ซึ่ง* $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$ *สมมุติ* $x_{n+1} = (1 - b_n)y_n + b_n x_n$ *สำหรับจำนวนเต็ม* $n \geq 1$ *และ* $\limsup_{n\to\infty}(\|y_{n+1} - y_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \leq 0$ *แล้ว* $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0$

บทตั้ง 2.5.5. ([12]) *(Demi-closedness principle) สมมุติให้* T *เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายที่ส่งบนเซตย่อยปิด และคอนเวกซ์* C *ของปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง* H *ถ้า* T *มีจุดตรึง แล้ว* $I - T$ *เป็น demi-closed กล่าวคือ สำหรับแต่ละลำดับ* $\{x_n\}$ *ใน* C *ถ้า ลำดับ* $\{x_n\}$ *ลู่เข้าแบบอ่อนสู่บางสมาชิก* $x \in C$ *(เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์* $x_n \rightharpoonup x \in C$*) และลำดับ* $\{(I - T)x_n\}$ *ลู่เข้าแบบเข้ม สู่บางสมาชิก* y *(เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์* $(I - T)x_n \to y$*) แล้ว* $(I - T)x = y$ *เมื่อ* I *เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์บน* H

บทตั้ง 2.5.6. *ในปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง* H *จะได้อสมการนี้เป็นจริง*

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, x + y \rangle, \quad \forall x, y \in H$$

ต่อไปจะให้นิยามของฟังก์ชัน ที่สำคัญเป็นอย่างมาก ในการศึกษาการประมาณค่าหาจุดตรึงร่วมของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต H โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญ ดังนี้ ในปี ค.ศ. 2009 Kangtunyakarn และ Suantai [14] ได้นิยามฟังก์ชันแบบใหม่ และเรียกฟังก์ชันนั้นว่า S-mapping โดยนิยาม ดังนี้ ให้ $\{T_i\}_{i=1}^N$ เป็นวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย บนเซตย่อย C ของปริภูมิฮิลเบิร์ต H สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ และ $j = 1, 2, \ldots, N$, ให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ โดยที่

$\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$ และ $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$ โดย Kangtunyakarn และ Suantai ได้สร้างฟังก์ชันใหม่ $S_n : C \to C$ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
U_{n,0} &= I,\\
U_{n,1} &= \alpha_1^{n,1} T_1 U_{n,0} + \alpha_2^{n,1} U_{n,0} + \alpha_3^{n,1} I,\\
U_{n,2} &= \alpha_1^{n,2} T_2 U_{n,1} + \alpha_2^{n,2} U_{n,1} + \alpha_3^{n,2} I,\\
U_{n,3} &= \alpha_1^{n,3} T_3 U_{n,2} + \alpha_2^{n,3} U_{n,2} + \alpha_3^{n,3} I,\\
&\vdots\\
U_{n,N-1} &= \alpha_1^{n,N-1} T_{N-1} U_{n,N-2} + \alpha_2^{n,N-1} U_{n,N-2} + \alpha_3^{n,N-1} I,\\
S_n = U_{n,N} &= \alpha_1^{n,N} T_N U_{n,N-1} + \alpha_2^{n,N} U_{n,N-1} + \alpha_3^{n,N} I
\end{aligned}
$$

และ เรียกฟังก์ชัน S_n นี้ว่า S-mapping ที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ ข้อสังเกตุ จะเห็นว่า จากการที่แต่ละ T_i เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย เป็นผลให้ฟังก์ชัน S_n เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายด้วย นอกจากนี้ Kangtunyakarn และ Suantai ได้พิสูจน์ข้อเท็จจริงดังนี้

บทตั้ง 2.5.7. ([14]) *ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิ strictly convex Banach space X กำหนดให้ $\{T_i\}_{i=1}^N$ เป็นวงศ์จำกัด ของฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C สมมุติให้ $\bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq \emptyset$ และ $\alpha_j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, เมื่อ $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j \in [0,1]$, $\alpha_1^j + \alpha_2^j + \alpha_3^j = 1$, $\alpha_1^j \in (0,1)$ สำหรับทุก $j = 1, 2, \ldots, N-1$, $\alpha_1^N \in (0,1]$ และ α_2^j, $\alpha_3^j \in [0,1)$ สำหรับทุก $j = 1, 2, \ldots, N$ ให้ฟังก์ชัน S เป็น S-mapping ที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ แล้ว $F(S) = \bigcap_{i=1}^N F(T_i)$*

บทตั้ง 2.5.8. ([14]) *ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิบานาค X และ $\{T_i\}_{i=1}^N$ เป็นวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ และทุก $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ ให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ $\alpha_j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j)$ เมื่อ $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$ $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j \in [0,1]$ $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$ และ $\alpha_1^j + \alpha_2^j + \alpha_3^j = 1$ สมมุติ $\alpha_i^{n,j} \to \alpha_i^j$ เมื่อ $n \to \infty$ สำหรับ $i \in \{1,3\}$ และทุก $j = 1, 2, 3, \ldots, N$ ให้ S และ S_n เป็น S-ฟังก์ชันที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ และ $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ ตามลำดับ แล้ว $\lim_{n\to\infty} \|S_n x - Sx\| = 0$ สำหรับแต่ละ $x \in C$*

บทตั้ง 2.5.9. ([8]) *ให้ $x^*, y^* \in C$ จะได้ว่า (x^*, y^*) เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4.1) ก็ต่อเมื่อ x^* เป็นจุดตรึงของฟังก์ชัน $G : C \to C$ ที่ส่งโดย*

$$G(x) = P_C[P_C(x - \mu Bx) - \lambda A P_C(x - \mu Bx)], \quad \forall x \in C$$

เมื่อ $y^* = P_C(x^* - \mu Bx^*)$

ในโครงการวิจัยนี้ ผู้วิจัยจะเขียนแทน เซตของจุดตรึงทั้งหมดของฟังก์ชัน G ด้วยสัญลักษณ์ $GVI(C, A, B)$

บทตั้ง 2.5.10. ([34]) *ให้ $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน L_A-Lipschitzian และ relaxed (c, d)-cocoercive กำหนดให้ $B : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน L_B-Lipschitzian และ relaxed (c', d')-cocoercive ให้ $G : C \to C$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย*

$$G(x) = P_C[P_C(x - \mu Bx) - \lambda A P_C(x - \mu Bx)], \quad \forall x \in C$$

ถ้า $0 < \lambda < \frac{2(d-cL_A^2)}{L_A^2}$ *และ* $0 < \mu < \frac{2(d^{'}-c^{'}L_B^2)}{L_B^2}$ *แล้ว* G *เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย*

จากข้อเท็จจริง และ แนวคิดของการประมาณค่า เพื่อหาผลเฉลยของปัญหาดุลยภาพผสม ผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต ดังนั้น ในโครงการวิจัยนี้ ผู้วิจัยต้องการสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำใหม่ เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และ ปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยที่ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ผู้วิจัยจะศึกษาในกรณีของฟังก์ชัน relaxed cocoercive โดยที่ระเบียบวิธีทำซ้ำที่จะศึกษาในโครงการวิจัยนี้ จะแสดงไว้ในเนื้อหาของบทที่ 3

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

เนื้อหาในบทนี้ ผู้วิจัยได้นำเสนอ ระเบียบวิธีการประมาณค่าแบบใหม่เพื่อหาผลเฉลยร่วมของ ปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงร่วมสำหรับวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต พร้อมทั้งพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้มของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้น สู่ผลเฉลยร่วมของปัญหา ดังกล่าว นอกจากนี้ ได้ประยุกต์ทฤษฎีบทการลู่เข้า เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของฟังก์ชัน relaxed cocoercive และปัญหาจุดตรึงของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต และนำไปประยุกต์กับการประมาณค่า หาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพ ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของตัวแก้ปัญหาของฟังก์ชัน maximal monotone ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของฟังก์ชัน relaxed cocoercive ซึ่งเป็นทฤษฎีบทที่จำเป็นและสำคัญอย่างยิ่ง ต่อการนำทฤษฎีบทไปประยุกต์ใช้ในทางวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์ และวิทยาศาสตร์ประยุกต์

3.1 ระเบียบวิธีประมาณค่าแบบใหม่

เนื้อหานี้จะให้รายละเอียดของระเบียบวิธีทำซ้ำแบบใหม่ เพื่อใช้ในการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของปัญหาอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญ ดังนี้

ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้เวกเตอร์ v และ $x_1 \in C$ และสร้างลำดับ $\{u_n\}, \{y_n\}$ และ $\{x_n\}$ โดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

เมื่อ S_n เป็น S-ฟังก์ชัน ที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ λ และ μ เป็นสองจำนวนจริงที่มากกว่าศูนย์ $\{r_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $(0, \infty)$ และ $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $[0, 1]$ ผู้วิจัยได้ศึกษา ระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างโดยสมการ (3.1.1) เพื่อพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้ม สู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยจะกล่าวรายละเอียด ในเนื้อหาต่อไป

3.2 ทฤษฎีการลู่เข้าแบบเข้ม

เนื้อหานี้ ผู้วิจัยจะพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้ม ของระเบียบวิธีทำซ้ำ (3.1.1) สู่ผลเฉลยร่วมของ ปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และ ปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต และจากการวิจัยได้ทฤษฎีบท และองค์ความรู้ใหม่ที่สำคัญ โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญดังต่อไปนี้

บทตั้ง 3.2.1. *กำหนดให้ $B : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน L-Lipschitzian และ relaxed (c', d')-cocoercive ถ้า $0 < \mu \le \frac{2(d' - c'L^2)}{L^2}$ แล้ว $I - \mu B$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย*

พิสูจน์. สำหรับแต่ละ $x, y \in C$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\|(I-\mu B)x - (I-\mu B)y\|^2 &= \|(x-y) - \mu(Bx - By)\|^2 \\
&= \|x-y\|^2 + \mu^2\|Bx - By\|^2 \\
&\quad - 2\mu\langle x-y, Bx - By\rangle \\
&\le \|x-y\|^2 + \mu^2\|Bx - By\|^2 \\
&\quad - 2\mu[-c'\|Bx - By\|^2 + d'\|x-y\|^2] \\
&= \|x-y\|^2 + \mu^2\|Bx - By\|^2 \\
&\quad + 2\mu c'\|Bx - By\|^2 - 2\mu d'\|x-y\|^2 \\
&\le \|x-y\|^2 + \mu^2 L^2\|x-y\|^2 \\
&\quad + 2\mu c' L^2\|x-y\|^2 - 2\mu d'\|x-y\|^2 \\
&= (1 + 2\mu c' L^2 - 2\mu d' + \mu^2 L^2)\|x-y\|^2 \\
&\le \|x-y\|^2
\end{aligned}
$$

เป็นผลให้ $I - \mu B$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย □

ทฤษฎีบท 3.2.2. *ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ F เป็นฟังก์ชันจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) และ $\varphi : C \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชัน proper lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ กำหนดให้ $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน L_A-Lipschitzian และ relaxed (c, d)-cocoercive และ $B : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน L_B-Lipschitzian และ relaxed (c', d')-cocoercive สมมุติ $\{T_i\}_{i=1}^N$ เป็นวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C ที่ทำให้ $\Omega = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \bigcap GVI(C, A, B) \bigcap MEP(F, \varphi) \neq \emptyset$ สำหรับแต่ละ $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ ให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ เมื่อ $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0, 1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ ซึ่ง $0 < \eta_1 \le \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N, 1]$, $0 < \eta_N \le 1$ และ $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^N, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^N \subset [0, \theta_2]$ ซึ่ง $0 \le \theta_2 < 1$ กำหนดให้ S_n เป็น S-ฟังก์ชัน ที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ สมมุติเงื่อนไข (B1) หรือ (B2) เป็นจริง กำหนดให้ v และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน C และ $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย*

$$
\begin{cases}
F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \ge 0, \quad \forall y \in C, \\
y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\
x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \ge 1
\end{cases}
$$

เมื่อ $0 < \lambda < \frac{2(d-cL_A^2)}{L_A^2}$ *และ* $0 < \mu < \frac{2(d'-c'L_B^2)}{L_B^2}$ *ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง*

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *และ* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ *และ* $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i} - \alpha_1^{n,i}| = 0$ *สำหรับแต่ละ* $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *และ* $\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}| = 0$ *แต่ละ* $j \in \{2, 3, \ldots, N\}$

แล้ว $\{x_n\}$ *ลู่เข้าแบบเข้มสู่* $\overline{x} = P_\Omega v$ *และ* $(\overline{x}, \overline{y})$ *เป็นผลเฉลยของปัญหา* (2.4.1) *เมื่อ* $\overline{y} = P_C(\overline{x} - \mu B\overline{x})$

พิสูจน์. กำหนดให้ $x^* \in \Omega$ และ $\{T_{r_n}\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันที่นิยามในบทตั้ง 2.5.1 จากบทตั้ง 2.5.9 เป็นผลให้

$$x^* = P_C[P_C(x^* - \mu Bx^*) - \lambda AP_C(x^* - \mu Bx^*)]$$

ถ้ากำหนดให้ $y^* = P_C(x^* - \mu Bx^*)$ และ $t_n = P_C(y_n - \lambda Ay_n)$ แล้ว $x^* = P_C(y^* - \lambda Ay^*)$ และ

$$x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n t_n$$

จากบทตั้ง 3.2.1 และ P_C T_{r_n} เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\|t_n - x^*\|^2 &= \|P_C(y_n - \lambda Ay_n) - P_C(y^* - \lambda Ay^*)\|^2 \\
&\leq \|y_n - y^*\|^2 \\
&= \|P_C(u_n - \mu Bu_n) - P_C(x^* - \mu Bx^*)\|^2 \\
&\leq \|u_n - x^*\|^2 \\
&= \|T_{r_n}x_n - T_{r_n}x^*\|^2 \\
&\leq \|x_n - x^*\|^2 \qquad (3.2.1)
\end{aligned}$$

เป็นผลให้

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\| &= \|a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n t_n - x^*\| \\
&\leq a_n\|v - x^*\| + b_n\|x_n - x^*\| + (1 - a_n - b_n)\|t_n - x^*\| \\
&\leq a_n\|v - x^*\| + b_n\|x_n - x^*\| + (1 - a_n - b_n)\|x_n - x^*\| \\
&\leq \max\{\|v - x^*\|, \|x_1 - x^*\|\}
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต ซึ่งเป็นผลให้ลำดับ $\{u_n\}$ ลำดับ $\{y_n\}$ ลำดับ $\{t_n\}$ ลำดับ $\{Ay_n\}$ ลำดับ $\{Bu_n\}$ และลำดับ $\{S_n t_n\}$ มีขอบเขตด้วย เนื่องจาก P_C เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\|t_{n+1} - t_n\| &= \|P_C(y_{n+1} - \lambda Ay_{n+1}) - P_C(y_n - \lambda Ay_n)\| \\
&\leq \|y_{n+1} - y_n\| \\
&= \|P_C(u_{n+1} - \mu Bu_{n+1}) - P_C(u_n - \mu Bu_n)\| \\
&\leq \|u_{n+1} - u_n\| \qquad (3.2.2)
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $u_n = T_{r_n}x_n \in \text{dom}\varphi$ และ $u_{n+1} = T_{r_{n+1}}x_{n+1} \in \text{dom}\varphi$ เป็นผลให้

$$F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \tag{3.2.3}$$

และ

$$F(u_{n+1}, y) + \varphi(y) - \varphi(u_{n+1}) + \frac{1}{r_{n+1}}\langle y - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1}\rangle \geq 0 \quad \forall y \in C \tag{3.2.4}$$

กำหนดให้ $y = u_{n+1}$ ในสมการ (3.2.3) และ $y = u_n$ ในสมการ (3.2.4) ดังนั้น

$$F(u_n, u_{n+1}) + \varphi(u_{n+1}) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle u_{n+1} - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0$$

และ

$$F(u_{n+1}, u_n) + \varphi(u_n) - \varphi(u_{n+1}) + \frac{1}{r_{n+1}}\langle u_n - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1}\rangle \geq 0$$

เนื่องจาก F เป็นฟังก์ชันทางเดียว ดังนั้น

$$\left\langle u_{n+1} - u_n, \frac{u_n - x_n}{r_n} - \frac{u_{n+1} - x_{n+1}}{r_{n+1}}\right\rangle \geq 0$$

เพราะฉะนั้น

$$\left\langle u_{n+1} - u_n, u_n - u_{n+1} + u_{n+1} - x_n - \frac{r_n}{r_{n+1}}(u_{n+1} - x_{n+1})\right\rangle \geq 0$$

เป็นผลให้

$$\begin{aligned}\|u_{n+1} - u_n\|^2 &\leq \left\langle u_{n+1} - u_n, x_{n+1} - x_n + (1 - \frac{r_n}{r_{n+1}})(u_{n+1} - x_{n+1})\right\rangle \\ &\leq \|u_{n+1} - u_n\|\left\{\|x_{n+1} - x_n\| + |1 - \frac{r_n}{r_{n+1}}|\|u_{n+1} - x_{n+1}\|\right\}\end{aligned}$$

และ

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{r_{n+1}}|r_{n+1} - r_n|\|u_{n+1} - x_{n+1}\| \tag{3.2.5}$$

จากสมการ (3.2.2) และ (3.2.5) ทำให้ได้ว่า

$$\|t_{n+1} - t_n\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{r_{n+1}}|r_{n+1} - r_n|\|u_{n+1} - x_{n+1}\| \tag{3.2.6}$$

กำหนดให้ $x_{n+1} = b_nx_n + (1 - b_n)z_n$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}z_{n+1} - z_n &= \frac{x_{n+2} - b_{n+1}x_{n+1}}{1 - b_{n+1}} - \frac{x_{n+1} - b_nx_n}{1 - b_n} \\ &= \frac{a_{n+1}v + (1 - a_{n+1} - b_{n+1})S_{n+1}t_{n+1}}{1 - b_{n+1}} - \frac{a_nv + (1 - a_n - b_n)S_nt_n}{1 - b_n} \\ &= \frac{a_{n+1}}{1 - b_{n+1}}(v - S_{n+1}t_{n+1}) + \frac{a_n}{1 - b_n}(S_nt_n - v) + S_{n+1}t_{n+1} - S_nt_n\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

ต่อไปจะไปจะพิจารณาค่า $\|S_{n+1}t_{n+1} - S_n t_n\|$
สำหรับแต่ละ $k \in \{2,3,\dots,N\}$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
\|U_{n+1,k}t_n - U_{n,k}t_n\| &= \|\alpha_1^{n+1,k} T_k U_{n+1,k-1}t_n + \alpha_2^{n+1,k} U_{n+1,k-1}t_n + \alpha_3^{n+1,k} t_n \\
&\quad - \alpha_1^{n,k} T_k U_{n,k-1}t_n - \alpha_2^{n,k} U_{n,k-1}t_n - \alpha_3^{n,k} t_n\| \\
&= \|\alpha_1^{n+1,k}(T_k U_{n+1,k-1}t_n - T_k U_{n,k-1}t_n) \\
&\quad + (\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}) T_k U_{n,k-1}t_n + (\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}) t_n \\
&\quad + \alpha_2^{n+1,k}(U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n) + (\alpha_2^{n+1,k} - \alpha_2^{n,k}) U_{n,k-1}t_n\| \\
&\leq \alpha_1^{n+1,k}\|U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n\| + |\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}|\|T_k U_{n,k-1}t_n\| \\
&\quad + |\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}|\|t_n\| + \alpha_2^{n+1,k}\|U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n\| \\
&\quad + |\alpha_2^{n+1,k} - \alpha_2^{n,k}|\|U_{n,k-1}t_n\| \\
&= (\alpha_1^{n+1,k} + \alpha_2^{n+1,k})\|U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n\| \\
&\quad + |\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}|\|T_k U_{n,k-1}t_n\| + |\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}|\|t_n\| \\
&\quad + |\alpha_2^{n+1,k} - \alpha_2^{n,k}|\|U_{n,k-1}t_n\| \\
&\leq \|U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n\| + |\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}|\|T_k U_{n,k-1}t_n\| \\
&\quad + |\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}|\|t_n\| + |(\alpha_1^{n,k} - \alpha_1^{n+1,k}) + (\alpha_3^{n,k} - \alpha_3^{n+1,k})|\|U_{n,k-1}t_n\| \\
&\leq \|U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n\| + |\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}|\|T_k U_{n,k-1}t_n\| \\
&\quad + |\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}|\|t_n\| + |\alpha_1^{n,k} - \alpha_1^{n+1,k}|\|U_{n,k-1}t_n\| \\
&\quad + |\alpha_3^{n,k} - \alpha_3^{n+1,k}|\|U_{n,k-1}t_n\| \\
&= \|U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n\| + |\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}|(\|T_k U_{n,k-1}t_n\| + \|U_{n,k-1}t_n\|) \\
&\quad + |\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}|(\|t_n\| + \|U_{n,k-1}t_n\|) \qquad (3.2.8)
\end{aligned}$$

จากสมการ (3.2.8) เป็นผลให้

$$\begin{aligned}
&\|S_{n+1}t_n - S_n t_n\| = \|U_{n+1,N}t_n - U_{n,N}t_n\| \\
&\leq \|U_{n+1,1}t_n - U_{n,1}t_n\| + \sum_{j=2}^{N} |\alpha_1^{n+1,j} - \alpha_1^{n,j}|(\|T_j U_{n,j-1}t_n\| + \|U_{n,j-1}t_n\|) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{N} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}|(\|t_n\| + \|U_{n,j-1}t_n\|) \\
&= |\alpha_1^{n+1,1} - \alpha_1^{n,1}|\|T_1 t_n - t_n\| \\
&\quad + \sum_{j=2}^{N} |\alpha_1^{n+1,j} - \alpha_1^{n,j}|(\|T_j U_{n,j-1}t_n\| + \|U_{n,j-1}t_n\|) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{N} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}|(\|t_n\| + \|U_{n,j-1}t_n\|)
\end{aligned}$$

ดังนั้นจากเงื่อนไข $(C4)$ ทำให้ได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \|S_{n+1}t_n - S_n t_n\| = 0 \qquad (3.2.9)$$

ดังนั้นโดยสมการ (3.2.6) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\|S_{n+1}t_{n+1} - S_nt_n\| &\le \|t_{n+1} - t_n\| + \|S_{n+1}t_n - S_nt_n\| \\ &\le \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{r_{n+1}}|r_{n+1} - r_n|\|u_{n+1} - x_{n+1}\| \\ &\quad + \|S_{n+1}t_n - S_nt_n\| \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

จากสมการ (3.2.7) และ (3.2.10) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\|z_{n+1} - z_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| &\le \frac{a_{n+1}}{1-b_{n+1}}\|v - S_{n+1}t_{n+1}\| + \frac{a_n}{1-b_n}\|S_nt_n - v\| \\ &\quad + \|S_{n+1}t_{n+1} - S_nt_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\le \frac{a_{n+1}}{1-b_{n+1}}\|v - S_{n+1}t_{n+1}\| + \frac{a_n}{1-b_n}\|S_nt_n - v\| \\ &\quad + \frac{1}{r_{n+1}}|r_{n+1} - r_n|\|u_{n+1} - x_{n+1}\| \\ &\quad + \|S_{n+1}t_n - S_nt_n\| \end{aligned}$$

โดยเงื่อนไข (C1)-(C3) และสมการ (3.2.9) เป็นผลให้

$$\limsup_{n\to\infty} \|z_{n+1} - z_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \le 0$$

โดยบทตั้ง 2.5.4 จะได้ $\|x_n - z_n\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n\to\infty}(1 - b_n)\|z_n - x_n\| = 0 \tag{3.2.11}$$

เนื่องจากเงื่อนไข (C3) สมการ (3.2.2) และ (3.2.5) เป็นผลให้ $\|u_{n+1} - u_n\| \to 0$, $\|t_{n+1} - t_n\| \to 0$ และ $\|y_{n+1} - y_n\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$
แต่

$$x_{n+1} - x_n = a_n(v - x_n) + (1 - a_n - b_n)(S_nt_n - x_n)$$

เพราะฉะนั้น

$$\|S_nt_n - x_n\| \to 0 \quad \text{เมื่อ} \quad n \to \infty \tag{3.2.12}$$

ต่อไปจะพิสูจน์ว่า $\lim_{n\to\infty} \|x_n - u_n\| = 0$ จากบทตั้ง 2.5.1(3) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\|u_n - x^*\|^2 &= \|T_{r_n}x_n - T_{r_n}x^*\|^2 \le \langle T_{r_n}x_n - T_{r_n}x^*, x_n - x^*\rangle \\ &= \langle u_n - x^*, x_n - x^*\rangle = \frac{1}{2}\{\|u_n - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 - \|x_n - u_n\|^2\}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\|u_n - x^*\|^2 \le \|x_n - x^*\|^2 - \|x_n - u_n\|^2 \tag{3.2.13}$$

จากบทตั้ง 2.5.3 สมการ (3.2.1) และ (3.2.13) เป็นผลให้

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x^*\|^2 &\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|t_n - x^*\|^2 \\ &\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|u_n - x^*\|^2 \\ &\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\ &\quad + (1 - a_n - b_n)\left[\|x_n - x^*\|^2 - \|x_n - u_n\|^2\right] \\ &\leq a_n\|v - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 - (1 - a_n - b_n)\|x_n - u_n\|^2\end{aligned}$$

เป็นผลให้

$$\begin{aligned}&(1 - a_n - b_n)\|x_n - u_n\|^2 \leq a_n\|v - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - x^*\|^2 \\ &\leq a_n\|v - x^*\|^2 + (\|x_n - x^*\| + \|x_{n+1} - x^*\|)\|x_{n+1} - x_n\|\end{aligned}$$

จากเงื่อนไข (C1) (C2) และสมการ (3.2.11) ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - u_n\| = 0 \tag{3.2.14}$$

เนื่องจาก

$$\|S_n t_n - u_n\| \leq \|S_n t_n - x_n\| + \|x_n - u_n\|$$

และจากสมการ (3.2.12) (3.2.14) ทำให้ได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n t_n - u_n\| = 0 \tag{3.2.15}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\|Ay_n - Ay^*\| \to 0$ และ $\|Bu_n - Bx^*\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ จากสมการ (3.2.1) จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x^*\|^2 &\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|t_n - x^*\|^2 \\ &\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|y_n - y^*\|^2 \\ &\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\ &\quad + (1 - a_n - b_n)\|(u_n - \mu Bu_n) - (x^* - \mu Bx^*)\|^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\big[\|u_n-x^*\|^2-2\mu\langle u_n-x^*,Bu_n-Bx^*\rangle\\
&\quad+\mu^2\|Bu_n-Bx^*\|^2\big]\\
&\leq a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\big[\|u_n-x^*\|^2+2\mu c^{'}\|Bu_n-Bx^*\|^2\\
&\quad-2\mu d^{'}\|u_n-x^*\|^2+\mu^2\|Bu_n-Bx^*\|^2\big]\\
&\leq a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\big[\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(2\mu c^{'}+\mu^2-\frac{2\mu d^{'}}{L_B^2})\|Bu_n-Bx^*\|^2\big]\\
&\leq a_n\|v-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)(2\mu c^{'}+\mu^2-\frac{2\mu d^{'}}{L_B^2})\|Bu_n-Bx^*\|^2
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2&\leq a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)\|t_n-x^*\|^2\\
&=a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\|P_C(y_n-\lambda Ay_n)-P_C(y^*-\lambda Ay^*)\|^2\\
&\leq a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\|(y_n-\lambda Ay_n)-(y^*-\lambda Ay^*)\|^2\\
&\leq a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\big[\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(2\lambda c+\lambda^2-\frac{2\lambda d}{L_A^2})\|Ay_n-Ay^*\|^2\big]\\
&\leq a_n\|v-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)(2\lambda c+\lambda^2-\frac{2\lambda d}{L_A^2})\|Ay_n-Ay^*\|^2
\end{aligned}
$$

เพราะฉนั้น

$$
\begin{aligned}
&-(1-a_n-b_n)(2\mu c^{'}+\mu^2-\frac{2\mu d^{'}}{L_B^2})\|Bu_n-Bx^*\|^2\\
&\leq a_n\|v-x^*\|^2+(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_{n+1}-x_n\|
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
&-(1-a_n-b_n)(2\lambda c+\lambda^2-\frac{2\lambda d}{L_A^2})\|Ay_n-Ay^*\|^2\\
&\leq a_n\|v-x^*\|^2+(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_{n+1}-x_n\|
\end{aligned}
$$

จากสมการ (3.2.11) และเงื่อนไข (C1) (C2) ทำให้ได้ว่า

$$\|Ay_n - Ay^*\| \to 0 \quad \text{และ} \quad \|Bu_n - Bx^*\| \to 0 \quad \text{เมื่อ} \quad n \to \infty \tag{3.2.16}$$

ต่อไปจะพิสูจน์ว่า $\|S_n t_n - t_n\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ จากสมการ (2.5.1) และฟังก์ชัน $I - \mu B$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย จะได้

$$\begin{aligned}
\|y_n - y^*\|^2 &= \|P_C(u_n - \mu Bu_n) - P_C(x^* - \mu Bx^*)\|^2 \\
&\leq \langle (u_n - \mu Bu_n) - (x^* - \mu Bx^*), y_n - y^* \rangle \\
&= \frac{1}{2}[\|(u_n - \mu Bu_n) - (x^* - \mu Bx^*)\|^2 + \|y_n - y^*\|^2 \\
&\quad - \|(u_n - \mu Bu_n) - (x^* - \mu Bx^*) - (y_n - y^*)\|^2] \\
&\leq \frac{1}{2}[\|u_n - x^*\|^2 + \|y_n - y^*\|^2 - \|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\mu\langle (u_n - x^*) - (y_n - y^*), Bu_n - Bx^* \rangle - \mu^2\|Bu_n - Bx^*\|^2]
\end{aligned}$$

และจากสมการ (3.2.1) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\|y_n - y^*\|^2 &\leq \|u_n - x^*\|^2 - \|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\mu\langle (u_n - x^*) - (y_n - y^*), Bu_n - Bx^* \rangle - \mu^2\|Bu_n - Bx^*\|^2 \\
&\leq \|x_n - x^*\|^2 - \|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\mu\langle (u_n - x^*) - (y_n - y^*), Bu_n - Bx^* \rangle - \mu^2\|Bu_n - Bx^*\|^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 &\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|y_n - y^*\|^2 \\
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)[\|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad - \|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\mu\langle (u_n - x^*) - (y_n - y^*), Bu_n - Bx^* \rangle - \mu^2\|Bu_n - Bx^*\|^2] \\
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad - (1 - a_n - b_n)\|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\|^2 \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)2\mu\|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\|\|Bu_n - Bx^*\|
\end{aligned}$$

ซึ่งเป็นผลให้

$$\begin{aligned}
&(1 - a_n - b_n)\|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\|^2 \\
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)2\mu\|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\|\|Bu_n - Bx^*\| \\
&\quad + (\|x_n - x^*\| + \|x_{n+1} - x^*\|)\|x_{n+1} - x_n\|
\end{aligned}$$

โดยเงื่อนไข (C1) สมการ (3.2.11) และ (3.2.16) ทำให้ได้ว่า

$$\|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\| \to 0 \quad \text{เมื่อ} \quad n \to \infty \tag{3.2.17}$$

จากบทตั้ง 2.5.6 และสมการ (2.5.2) จะได้

$$\begin{aligned}
&\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\|^2 = \|(y_n - \lambda Ay_n) - (y^* - \lambda Ay^*) \\
&\quad - [P_C(y_n - \lambda Ay_n) - P_C(y^* - \lambda Ay^*)] + \lambda(Ay_n - Ay^*)\|^2 \\
&\le \|(y_n - \lambda Ay_n) - (y^* - \lambda Ay^*) - [P_C(y_n - \lambda Ay_n) - P_C(y^* - \lambda Ay^*)]\|^2 \\
&\quad + 2\lambda\langle Ay_n - Ay^*, (y_n - t_n) + (x^* - y^*)\rangle \\
&\le \|(y_n - \lambda Ay_n) - (y^* - \lambda Ay^*)\|^2 - \|P_C(y_n - \lambda Ay_n) - P_C(y^* - \lambda Ay^*)\|^2 \\
&\quad + 2\lambda\|Ay_n - Ay^*\|\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \\
&\le \|(y_n - \lambda Ay_n) - (y^* - \lambda Ay^*)\|^2 - \|S_nP_C(y_n - \lambda Ay_n) - S_nP_C(y^* - \lambda Ay^*)\|^2 \\
&\quad + 2\lambda\|Ay_n - Ay^*\|\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \\
&\le \|(y_n - \lambda Ay_n) - (y^* - \lambda Ay^*) \\
&\quad - (S_nt_n - x^*)\|\left[\|(y_n - \lambda Ay_n) - (y^* - \lambda Ay^*)\| + \|S_nt_n - x^*\|\right] \\
&\quad + 2\lambda\|Ay_n - Ay^*\|\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \\
&= \|u_n - S_nt_n + x^* - y^* - (u_n - y_n) \\
&\quad - \lambda(Ay_n - Ay^*)\|\left[\|(y_n - \lambda Ay_n) - (y^* - \lambda Ay^*)\| + \|S_nt_n - x^*\|\right] \\
&\quad + 2\lambda\|Ay_n - Ay^*\|\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\|
\end{aligned}$$

โดยสมการ (3.2.15) (3.2.17) และ (3.2.16) เป็นผลให้ $\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ และจากสมการ (3.2.12) (3.2.14) และ (3.2.17) เป็นผลให้

$$\begin{aligned}
\|S_nt_n - t_n\| &\le \|S_nt_n - x_n\| + \|x_n - u_n\| + \|(u_n - y_n) - (x^* - y^*)\| \\
&\quad + \|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \to 0 \quad \text{เมื่อ} \quad n \to \infty
\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

ต่อไปจะแสดงว่า

$$\limsup_{n\to\infty}\langle v - \overline{x}, x_n - \overline{x}\rangle \le 0$$

เมื่อ $\overline{x} = P_\Omega v$

เนื่องจากลำดับ $\{t_n\}$ และ $\{S_nt_n\}$ มีขอบเขตบน C สามารถเลือกลำดับย่อย $\{t_{n_i}\}$ ของ $\{t_n\}$ ที่ทำให้ $t_{n_i} \rightharpoonup z \in C$ และ

$$\limsup_{n\to\infty}\langle v - \overline{x}, S_nt_n - \overline{x}\rangle = \lim_{i\to\infty}\langle v - \overline{x}, S_{n_i}t_{n_i} - \overline{x}\rangle$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty}\|S_nt_n - t_n\| = 0$ ดังนั้น $S_{n_i}t_{n_i} \rightharpoonup z$ เมื่อ $i \to \infty$

ต่อไปจะแสดงว่า $z \in \Omega$

(a) เริ่มแรกจะแสดงว่า $z \in \bigcap_{i=1}^N F(T_i)$

สมมุติว่า $\alpha_1^{n,j} \to \alpha_1^j \in (0,1)$ และ $\alpha_1^{n,N} \to \alpha_1^N \in (0,1]$ เมื่อ $n \to \infty$ สำหรับแต่ละ $j \in \{1,2,\ldots,N-1\}$ และ $\alpha_3^{n,j} \to \alpha_3^j \in [0,1)$ เมื่อ $n \to \infty$ สำหรับ $j = 1,2,\ldots,N$ กำหนดให้ S เป็น S-ฟังก์ชัน ที่กำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ เมื่อ $\alpha_j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j)$ สำหรับ $j = 1,2,\ldots,N$ จากบทตั้ง 2.5.8 ทำให้ได้ว่า $\|S_nt_n - St_n\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ เนื่องจาก

$$\|St_n - t_n\| \le \|St_n - S_nt_n\| + \|S_nt_n - t_n\|$$

และโดยสมการ (3.2.18) จะได้ $\|St_n - t_n\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$
เนื่องจาก $t_{n_i} \rightharpoonup z$ และ $\|St_n - t_n\| \to 0$ โดยบทตั้ง 2.5.5 และบทตั้ง 2.5.7 ทำให้ได้ว่า $z \in F(S) = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i)$

(b) ต่อไปจะแสดงว่า $z \in GVI(C, A, B)$
เนื่องจาก

$$\|t_n - x_n\| \leq \|S_n t_n - t_n\| + \|S_n t_n - x_n\|$$

จากสมการ (3.2.18) และ (3.2.12) จะได้ว่า $\|t_n - x_n\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ นอกจากนี้ โดยบทตั้ง 2.5.10 เรามี $G : C \to C$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย เป็นผลให้

$$\begin{aligned}
\|t_n - G(t_n)\| &= \|P_C(y_n - \lambda A y_n) - G(t_n)\| \\
&= \|P_C[P(u_n - \mu B u_n) - \lambda A P(u_n - \mu B u_n)] - G(t_n)\| \\
&= \|G(u_n) - G(t_n)\| \leq \|u_n - t_n\| \\
&\leq \|u_n - x_n\| + \|x_n - t_n\|
\end{aligned}$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $\|t_n - G(t_n)\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ และจากบทตั้ง 2.5.5 จะได้ว่า $z \in GVI(C, A, B)$

(c) ต่อไปจะแสดงว่า $z \in MEP(F, \varphi)$ เนื่องจาก $t_{n_i} \rightharpoonup z$ และ $\|x_n - t_n\| \to 0$ เป็นผลให้ $x_{n_i} \rightharpoonup z$ จาก $\|u_n - x_n\| \to 0$ ทำให้ได้ว่า $u_{n_i} \rightharpoonup z$ โดยการใช้เทคนิคการพิสูจน์เดียวกันกับ [26, ทฤษฎีบท 3.1 หน้า 1825] จะได้ว่า $z \in MEP(F, \varphi)$ เพราะฉนั้น $z \in \Omega$

จากสมการ (2.5.3) และ $S_{n_i} t_{n_i} \rightharpoonup z$ เมื่อ $i \to \infty$ เป็นผลให้

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \langle v - \overline{x}, x_n - \overline{x} \rangle = \limsup_{n\to\infty} \langle v - \overline{x}, S_n t_n - \overline{x} \rangle &= \lim_{i\to\infty} \langle v - \overline{x}, S_{n_i} t_{n_i} - \overline{x} \rangle \\
= \langle v - \overline{x}, z - \overline{x} \rangle \leq 0 & \qquad (3.2.19)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - \overline{x}\|^2 &= \langle a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n t_n - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x} \rangle \\
&= a_n \langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x} \rangle + b_n \langle x_n - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x} \rangle \\
&\quad + (1 - a_n - b_n) \langle S_n t_n - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x} \rangle \\
&\leq a_n \langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x} \rangle + \frac{1}{2} b_n (\|x_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}(1 - a_n - b_n)(\|t_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2) \\
&\leq a_n \langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x} \rangle + \frac{1}{2} b_n (\|x_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}(1 - a_n - b_n)(\|x_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2) \\
&= a_n \langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x} \rangle + \frac{1}{2}(1 - a_n)(\|x_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2)
\end{aligned}$$

ซึ่งเป็นผลให้

$$\|x_{n+1} - \overline{x}\|^2 \leq (1 - a_n)\|x_n - \overline{x}\|^2 + 2a_n \langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x} \rangle$$

และจากบทตั้ง 2.5.2 และสมการ (3.2.19) เป็นผลให้ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\overline{x}$ $\square$

ถ้า $A = B$ ในทฤษฎีบท 3.2.2 แล้วจะได้บทแทรกที่สำคัญดังนี้

บทแทรก 3.2.3. *ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ F เป็นฟังก์ชันจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) และ $\varphi : C \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชัน proper lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ กำหนดให้ $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน L_A-Lipschitzian และ relaxed (c,d)-cocoercive สมมุติ $\{T_i\}_{i=1}^N$ เป็นวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C ที่ทำให้ $\Omega = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \bigcap \Phi \bigcap MEP(F,\varphi) \neq \emptyset$ สำหรับแต่ละ $j \in \{1,2,\ldots,N\}$ ให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ เมื่อ $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ ซึ่ง $0 < \eta_1 \leq \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N, 1]$, $0 < \eta_N \leq 1$ และ $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^N, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^N \subset [0, \theta_2]$ ซึ่ง $0 \leq \theta_2 < 1$ กำหนดให้ S_n เป็น S-ฟังก์ชัน ที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ สมมุติเงื่อนไข (B1) หรือ (B2) เป็นจริง กำหนดให้ v และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน C และ $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย*

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu A u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

เมื่อ $0 < \lambda, \mu < \frac{2(d - cL_A^2)}{L_A^2}$ ถ้า $\{r_n\}$ $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ และ $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^N$ เป็นลำดับที่มีสมบัติเหมือนในทฤษฎีบท 3.2.2 แล้ว $\{x_n\}$ จะลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\overline{x} = P_\Omega v$ และ $(\overline{x}, \overline{y})$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4.2) *เมื่อ $\overline{y} = P_C(\overline{x} - \mu A \overline{x})$*

ถ้า $N = 1$, $T_1 = S$ $\varphi = 0$ และ $\alpha_2^{n,1}$ $\alpha_3^{n,1} = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ในทฤษฎีบท 3.2.2 แล้วจะได้บทแทรกที่สำคัญดังนี้

บทแทรก 3.2.4. *ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ F เป็นฟังก์ชันจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) ให้ $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน L_A-Lipschitzian และ relaxed (c,d)-cocoercive และกำหนดให้ $B : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน L_B-Lipschitzian และ relaxed (c', d')-cocoercive สมมุติ S เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C ที่ทำให้ $\Omega = F(S) \bigcap GVI(C, A, B) \bigcap EP(F) \neq \emptyset$ กำหนดให้ v และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน C และ $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย*

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

ถ้า λ μ และ $\{r_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่มีสมบัติเหมือนในทฤษฎีบท 3.2.2 แล้ว $\{x_n\}$ จะลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\overline{x} \in P_\Omega v$ และ $(\overline{x}, \overline{y})$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4.1) *เมื่อ $\overline{y} = P_C(\overline{x} - \mu B \overline{x})$*

3.3 การประยุกต์ทฤษฎีบทการลู่เข้า

เนื้อหานี้เป็นการประยุกต์ทฤษฎีบท 3.2.2 ซึ่งได้ทฤษฎีบทที่สำคัญดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3.1. *ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ F เป็นฟังก์ชันจาก $H\times H$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) กำหนดให้ $\varphi : H \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชัน lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ ให้ $A : H \to H$ เป็นฟังก์ชัน L_A-Lipschitzian และ relaxed (c,d)-cocoercive สมมุติ $\{T_i\}_{i=1}^N$ เป็นวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน H ที่ทำให้ $\Omega = \bigcap_{i=1}^N F(T_i)\bigcap A^{-1}0\bigcap MEP(F,\varphi) \neq \emptyset$ สำหรับแต่ละ $j \in \{1,2,\dots,N\}$*
ให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j},\alpha_2^{n,j},\alpha_3^{n,j})$ เมื่อ $\alpha_1^{n,j},\alpha_2^{n,j},\alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j}+\alpha_2^{n,j}+\alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1,\theta_1]$ ซึ่ง $0 < \eta_1 \leq \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N,1]$, $0 < \eta_N \leq 1$ และ $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^N, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^N \subset [0,\theta_2]$ ซึ่ง $0 \leq \theta_2 < 1$ กำหนดให้ S_n เป็น S-ฟังก์ชัน ที่ก่อกำเนิดโดย $T_1,T_2,\dots,T_N$ และ $\alpha_1^{(n)},\alpha_2^{(n)},\dots,\alpha_N^{(n)}$ สมมุติเงื่อนไข (B1) หรือ (B2) เป็นจริง
กำหนดให้ v และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน C และ $\{x_n\},\{u_n\},\{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} F(u_n,y)+\varphi(y)-\varphi(u_n)+\frac{1}{r_n}\langle y-u_n,u_n-x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y\in H, \\ y_n = u_n - \lambda A u_n, \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1-a_n-b_n)S_n(y_n-\lambda A y_n), \quad n\geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $0<\lambda<\frac{2(d-cL_A^2)}{L_A^2}$ ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *และ* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;
(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;
(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ *และ* $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1}-r_n| = 0$;
(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i}-\alpha_1^{n,i}| = 0$ *สำหรับแต่ละ* $i\in\{1,2,\dots,N\}$ *และ* $\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j}-\alpha_3^{n,j}| = 0$ *แต่ละ* $j\in\{2,3,\dots,N\}$

แล้ว $\{x_n\}$ จะลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\overline{x} = P_\Omega v$

พิสูจน์. ให้ $\lambda = \mu$ $C = H$ $B = A$ และ $P_H = I$ จะได้ว่า $A^{-1}0 = VI(H,A)$ ในกรณีนี้จะเห็นว่า

ปัญหา (2.4.1) $\Leftrightarrow$ ปัญหา (2.4.2) $\Leftrightarrow$ $VI(A,H)$

เป็นการเพียงพอที่จะแสดงเพียง (2.4.2) $\Rightarrow$ $VI(A,H)$ สมมุติมี $(x^*,y^*)\in H\times H$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle \lambda A y^* + x^* - y^*, x - x^*\rangle \geq 0, & \forall x\in H \\ \langle \lambda A x^* + y^* - x^*, x - y^*\rangle \geq 0, & \forall x\in H \end{cases}$$

ดังนั้น

$$\begin{cases} x^* = P_H(y^*-\lambda A y^*) \\ y^* = P_H(x^*-\lambda A x^*) \end{cases}$$

นั้นคือ

$$\begin{cases} x^* = y^* - \lambda A y^* \\ y^* = x^* - \lambda A x^* \end{cases} \tag{3.3.1}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $x^* = y^*$ จะเห็นว่า ถ้า $x^* \neq y^*$ จากสมการ (3.3.1) ทำให้ได้ว่า $Ax^* \neq 0$

$Ay^* \neq 0$ และ $Ax^* + Ay^* = 0$ และจากสมการ (3.3.1) อีกครั้ง จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\|x^* - y^*\|^2 &= \|(y^* - x^*) - \lambda(Ay^* - Ax^*)\|^2 \\
&= \|y^* - x^*\|^2 + \lambda^2\|Ay^* - Ax^*\|^2 \\
&\quad - 2\lambda\langle y^* - x^*, Ay^* - Ax^*\rangle \\
&\leq \|y^* - x^*\|^2 + \lambda^2\|Ay^* - Ax^*\|^2 \\
&\quad - 2\lambda[-c\|Ay^* - Ax^*\|^2 + d\|y^* - x^*\|^2] \\
&= \|y^* - x^*\|^2 + \lambda^2\|Ay^* - Ax^*\|^2 \\
&\quad + 2\lambda c\|Ay^* - Ax^*\|^2 - 2\lambda d\|y^* - x^*\|^2 \\
&\leq \|y^* - x^*\|^2 + \lambda^2 L_A^2\|y^* - x^*\|^2 \\
&\quad + 2\lambda c L_A^2\|y^* - x^*\|^2 - 2\lambda d\|y^* - x^*\|^2 \\
&= (1 + 2\lambda c L_A^2 - 2\lambda d + \lambda^2 L_A^2)\|y^* - x^*\|^2 \\
&< \|y^* - x^*\|^2
\end{aligned}
$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น $x^* = y^*$ เป็นผลให้ปัญหา (2.4.2) $\Rightarrow VI(A, H)$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.2.2 เป็นผลให้ได้ทฤษฎีบทเป็นจริง $\square$

ต่อไปจะให้นิยามที่สำคัญของตัวแก้ปัญหา (resolvent) ของฟังก์ชันทางเดียว $B : H \to 2^H$ ซึ่งกำหนดดังนี้ $J_r^B = (I + rB)^{-1}$ สำหรับแต่ละ $r > 0$ และเป็นที่ทราบกันดีว่า $F(J_r^B) = B^{-1}0$ และ J_r^B เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ทำให้ได้ทฤษฎีบทที่สำคัญดังนี้

ทฤษฎีบท 3.3.2. *ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ F เป็นฟังก์ชันจาก $H \times H$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) กำหนดให้ $\varphi : H \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชัน lower semi-continuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ ให้ $A : H \to H$ เป็นฟังก์ชัน L_A-Lipschitzian และ relaxed (c,d)-cocoercive และกำหนดให้ $B_1, B_2, \ldots, B_N : H \to 2^H$ เป็นฟังก์ชัน maximal monotone ที่ทำให้ $\Omega = \bigcap_{i=1}^N B_i^{-1}0 \bigcap A^{-1}0 \bigcap MEP(F,\varphi) \neq \emptyset$ สำหรับแต่ละ $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ และ $r_i > 0$ ให้ $J_{r_i}^{B_i}$ เป็นตัวแก้ปัญหาของ B_i สำหรับแต่ละ $j \in \{1,2,\ldots,N\}$ ให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ เมื่อ $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ ซึ่ง $0 < \eta_1 \leq \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N, 1]$, $0 < \eta_N \leq 1$ และ $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^N, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^N \subset [0, \theta_2]$ ซึ่ง $0 \leq \theta_2 < 1$ กำหนดให้ S_n เป็น S-ฟังก์ชัน ที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ สมมุติเงื่อนไข (B1) หรือ (B2) เป็นจริง*
กำหนดให้ v และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใดๆใน C และ $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$
\begin{cases}
F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in H, \\
y_n = u_n - \lambda A u_n, \\
x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1,
\end{cases}
$$

เมื่อ $0 < \lambda < \frac{2(d - cL_A^2)}{L_A^2}$ ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *และ* $\sum_{n=1}^\infty a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ *และ* $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i} - \alpha_1^{n,i}| = 0$ *สำหรับแต่ละ* $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *และ*
$\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}| = 0$ *แต่ละ* $j \in \{2, 3, \ldots, N\}$

แล้ว $\{x_n\}$ *จะลู่เข้าแบบเข้มสู่* $\overline{x} = P_\Omega v$

พิสูจน์. สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \ldots, N$ และ $r_i > 0$ จะได้ว่า $F(J_{r_i}^{B_i}) = B_i^{-1}0$ ให้ $P_H = I$ และ $T_i = J_{r_i}^{B_i}$ สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \ldots, N$ โดยทฤษฎีบท 3.3.1 เป็นให้ทฤษฎีบทเป็นจริง □

บทที่ 4

ผลดำเนินการวิจัย

การประมาณค่าหาผลเฉลยร่วม ของปัญหาดุลยภาพผสม ระบบปัญหาทั่วไปของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต ในโครงการวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำแบบใหม่ เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมดั่งกล่าว พร้อมทั้งพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้า โดยสรุปเนื้อหาสาระสำคัญ ดังต่อไปนี้

4.1 ระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาวิจัย

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบใหม่ ที่ใช้ศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย โดยกำหนดระเบียบวิธีทำซ้ำดังนี้

ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้เวกเตอร์ v และ $x_1 \in C$ และสร้างลำดับ $\{u_n\}, \{y_n\}$ และ $\{x_n\}$ โดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

เมื่อ S_n เป็น S-ฟังก์ชัน ที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ λ และ μ เป็นสองจำนวนจริงที่มากกว่าศูนย์ $\{r_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $(0, \infty)$ และ $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $[0, 1]$

4.2 สรุปผลการวิจัย

โครงการวิจัยนี้ มีวัตถุประสงค์ที่สำคัญประการหนึ่ง คือ การสร้างทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และ ปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยได้บทตั้ง ที่สำคัญดังนี้

บทตั้ง 1. กำหนดให้ $B : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน L-Lipschitzian และ relaxed (c', d')-cocoercive ถ้า $0 < \mu \leq \frac{2(d' - c'L^2)}{L^2}$ แล้ว $I - \mu B$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย

จากการวิจัย การประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต พบว่าระเบียบวิธีที่สร้างขึ้น ได้ลู่เข้าแบบเข้มสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาดั่งกล่าวโดยได้สมบัติที่สำคัญดังนี้

ทฤษฎีบท 2. ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ F เป็นฟังก์ชันจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) และ $\varphi : C \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชัน proper lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ กำหนดให้ $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน L_A-Lipschitzian และ relaxed (c,d)-cocoercive และ $B : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน L_B-Lipschitzian และ relaxed (c', d')-cocoercive สมมุติ $\{T_i\}_{i=1}^N$ เป็นวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C ที่ทำให้ $\Omega = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \bigcap GVI(C,A,B) \bigcap MEP(F,\varphi) \neq \emptyset$ สำหรับแต่ละ $j \in \{1,2,\ldots,N\}$ ให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ เมื่อ $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ ซึ่ง $0 < \eta_1 \leq \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N, 1]$, $0 < \eta_N \leq 1$ และ $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^N, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^N \subset [0, \theta_2]$ ซึ่ง $0 \leq \theta_2 < 1$ กำหนดให้ S_n เป็น S-ฟังก์ชัน ที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ สมมุติเงื่อนไข (B1) หรือ (B2) เป็นจริงกำหนดให้ v และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน C และ $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $0 < \lambda < \frac{2(d - cL_A^2)}{L_A^2}$ และ $0 < \mu < \frac{2(d' - c' L_B^2)}{L_B^2}$ ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ และ $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i} - \alpha_1^{n,i}| = 0$ สำหรับแต่ละ $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ และ $\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}| = 0$ แต่ละ $j \in \{2,3,\ldots,N\}$

แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\overline{x} = P_\Omega v$ และ $(\overline{x}, \overline{y})$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4.1) เมื่อ $\overline{y} = P_C(\overline{x} - \mu B \overline{x})$

บทแทรก 3. ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ F เป็นฟังก์ชันจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) และ $\varphi : C \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชัน proper lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ กำหนดให้ $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน L_A-Lipschitzian และ relaxed (c,d)-cocoercive สมมุติ $\{T_i\}_{i=1}^N$ เป็นวงศ์จำกัดของ
ฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C ที่ทำให้ $\Omega = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \bigcap \Phi \bigcap MEP(F,\varphi) \neq \emptyset$ สำหรับแต่ละ $j \in \{1,2,\ldots,N\}$ ให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ เมื่อ $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ ซึ่ง $0 < \eta_1 \leq \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N, 1]$, $0 < \eta_N \leq 1$ และ $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^N, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^N \subset [0, \theta_2]$ ซึ่ง $0 \leq \theta_2 < 1$ กำหนดให้ S_n เป็น S-ฟังก์ชัน ที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ สมมุติเงื่อนไข (B1) หรือ (B2) เป็นจริง กำหนดให้ v

และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน C และ $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu A u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

เมื่อ $0 < \lambda, \mu < \frac{2(d - cL_A^2)}{L_A^2}$ ถ้า $\{r_n\}$ $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ และ $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^N$ เป็นลำดับที่มีสมบัติเหมือนในทฤษฎีบท 3.2.2 แล้ว $\{x_n\}$ จะลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\overline{x} = P_\Omega v$ และ $(\overline{x}, \overline{y})$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4.2) เมื่อ $\overline{y} = P_C(\overline{x} - \mu A\overline{x})$

นอกจากนี้ผู้วิจัยได้ประยุกต์ทฤษฎีบท 2 เพื่อประมาณค่าหาสมาชิกศูนย์ของฟังก์ชัน relaxed (c,d)-cocoercive และสมาชิกศูนย์ของฟังก์ชัน maximal monotone และได้ทฤษฎีบทที่สำคัญดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4. ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ F เป็นฟังก์ชันจาก $H \times H$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) กำหนดให้ $\varphi : H \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชัน lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ ให้ $A : H \to H$ เป็นฟังก์ชัน L_A-Lipschitzian และ relaxed (c,d)-cocoercive สมมุติ $\{T_i\}_{i=1}^N$ เป็นวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน H ที่ทำให้ $\Omega = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \bigcap A^{-1}0 \bigcap MEP(F, \varphi) \neq \emptyset$ สำหรับแต่ละ $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ ให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ เมื่อ $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ ซึ่ง $0 < \eta_1 \leq \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N, 1]$, $0 < \eta_N \leq 1$ และ $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^N, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^N \subset [0, \theta_2]$ ซึ่ง $0 \leq \theta_2 < 1$ กำหนดให้ S_n เป็น S-ฟังก์ชัน ที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ สมมุติเงื่อนไข (B1) หรือ (B2) เป็นจริง กำหนดให้ v และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน C และ $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in H, \\ y_n = u_n - \lambda A u_n, \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $0 < \lambda < \frac{2(d - cL_A^2)}{L_A^2}$ ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^\infty a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ และ $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i} - \alpha_1^{n,i}| = 0$ สำหรับแต่ละ $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ และ $\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}| = 0$ แต่ละ $j \in \{2, 3, \ldots, N\}$

แล้ว $\{x_n\}$ จะลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\overline{x} = P_\Omega v$

ทฤษฎีบท 5. ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ F เป็นฟังก์ชันจาก $H \times H$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) กำหนดให้ $\varphi : H \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชัน lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ ให้ $A : H \to H$ เป็นฟังก์ชัน L_A-Lipschitzian และ relaxed (c,d)-cocoercive และกำหนดให้ $B_1, B_2, \ldots, B_N : H \to 2^H$ เป็นฟังก์ชัน maximal monotone ที่ทำให้ $\Omega = \bigcap_{i=1}^N B_i^{-1}0 \bigcap A^{-1}0 \bigcap MEP(F, \varphi) \neq \emptyset$ สำหรับแต่ละ $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ และ $r_i > 0$ ให้ $J_{r_i}^{B_i}$ เป็นตัวแก้ปัญหาของ B_i สำหรับแต่ละ $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ ให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ เมื่อ

$\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ ซึ่ง $0 < \eta_1 \leq \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N, 1]$, $0 < \eta_N \leq 1$ และ $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^N, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^N \subset [0, \theta_2]$ ซึ่ง $0 \leq \theta_2 < 1$ กำหนดให้ S_n เป็น S-ฟังก์ชัน ที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ สมมุติเงื่อนไข (B1) หรือ (B2) เป็นจริง กำหนดให้ v และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน C และ $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in H, \\ y_n = u_n - \lambda A u_n, \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

เมื่อ $0 < \lambda < \frac{2(d - cL_A^2)}{L_A^2}$ ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ และ $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i} - \alpha_1^{n,i}| = 0$ สำหรับแต่ละ $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ และ $\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}| = 0$ แต่ละ $j \in \{2, 3, \ldots, N\}$

แล้ว $\{x_n\}$ จะลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\overline{x} = P_\Omega v$

จากการศึกษาทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นใหม่ เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และ ปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต ทำให้ได้ทฤษฎีการลู่เข้าที่สำคัญสามทฤษฎีบท ซึ่งจะมีประโยชน์อย่างมาก ต่อการนำไปประยุกต์ใช้กับวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์และวิทยาศาสตร์ประยุกต์

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำ เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วม ของปัญหาดุลยภาพผสมระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต ซึ่งได้ทฤษฎีบทการลู่เข้าที่สำคัญอย่างยิ่ง สามทฤษฎีบท สำหรับเนื้อหาในบทนี้ ผู้วิจัยได้ให้รายละเอียดเกี่ยวกับ ข้อสรุปจากการวิจัย อภิปรายผลการวิจัย และข้อเสนอแนะที่สำคัญดังต่อไปนี้

5.1 สรุปผลการวิจัย

ผลจากการวิจัยในโครงการนี้ ผู้วิจัยได้สร้างระเบียบวิธีการทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และ ปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยระเบียบวิธีทำซ้ำที่ใช้ในการศึกษามีขั้นตอนการสร้างดังนี้

ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้เวกเตอร์ v และ $x_1 \in C$ และสร้างลำดับ $\{u_n\}, \{y_n\}$ และ $\{x_n\}$ โดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

เมื่อ S_n เป็น S-ฟังก์ชัน ที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ สำหรับ λ และ μ เป็นสองจำนวนจริงที่มากกว่าศูนย์ $\{r_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $(0, \infty)$ และ $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $[0, 1]$ พร้อมทั้งได้พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ได้ลู่เข้าแบบเข้มสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต นอกจากนี้ ผลของทฤษฎีบทได้นำไปประยุกต์ใช้ กับการพิสูจน์ทฤษฎีบทการประมาณค่า หาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของฟังก์ชัน relaxed cocoercive และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัด ของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต และนำไปประยุกต์กับการประมาณค่า หาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพ ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของตัวแก้ปัญหาของฟังก์ชัน maximal monotone ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของฟังก์ชัน relaxed cocoercive ในปริภูมิฮิลเบิร์ต

5.2 อภิปรายผล

จากการศึกษาทฤษฎีบทการลู่เข้า ของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และ ปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

เมื่อ S_n เป็น S-ฟังก์ชัน ที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ λ และ μ เป็นสองจำนวนจริงที่มากกว่าศูนย์ $\{r_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $(0, \infty)$ และ $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $[0, 1]$ จากระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นดังกล่าวถ้าวางเงื่อนไขบางอย่างแล้วระเบียบวิธีทำซ้ำนี้จะคลอบคลุมระเบียบที่ศึกษามาก่อนดังต่อไปนี้

1. ถ้า $A = B$ และ $S_n = S$ แล้วระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษานี้จะลดรูปเป็นระเบียบวิธีทำซ้ำที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu A u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

ซึ่งศึกษาโดย Qin, Cho และ Kang [28]

2. ถ้า $F = \varphi = 0, r_n = 1$ และ $S_n = S$ แล้วระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษานี้จะลดรูปเป็นระเบียบวิธีทำซ้ำที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

ซึ่งศึกษาโดย Ceng et al. [8]

5.3 ข้อเสนอแนะ

จากการศึกษาระเบียบวิธีการประมาณค่า เพื่อหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสมระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ตนั้น พอสรุปแนวทางดำเนินการวิจัยต่อ ดังต่อไปนี้

1. ผู้ดำเนินวิจัย สามารถศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำอื่นๆ ที่คลอบคลุมระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาในโครงการวิจัยนี้ อาทิเช่น

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

เมื่อ $f : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน contraction และ λ μ เป็นสองจำนวนจริงที่มากกว่าศูนย์ $\{r_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $(0, \infty)$ $\{a_n\}, \{b_n\}$ เป็นลำดับ ในช่วง $[0,1]$ และ S_n เป็น S-ฟังก์ชันที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ ซึ่งจะเห็นว่า
ถ้า $f(x) = v \quad \forall x \in C$ จะได้ว่าระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นนี้ ครอบคลุม ระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาในโครงการวิจัยนี้

2. ผู้ดำเนินวิจัย สามารถศึกษาการประมาณค่าจุดตรึง ของฟังก์ชันที่โตกว่า (คลาสใหญ่กว่า) ฟังก์ชันแบบไม่ขยาย อาทิ เช่น ฟังก์ชัน strictly pseudo contractive mapping, quasai non-expansive mapping asymptotically nonexpansive mapping ฯ

3. ผู้ดำเนินวิจัย สามารถศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วม ของระบบอสมการการแปรผันแบบใหม่ ตัวอย่าง เช่น ปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไป ซึ่งเป็นปัญหาที่ ครอบคลุมปัญหาอสมการการแปรผัน ศึกษาโดย Yu และ Liang [39] โดยที่ปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไป คือ การหาสมาชิก $u \in C$ ที่ทำให้

$$\langle u - \tau B u + \lambda A u, v - u\rangle \geq 0, \quad \forall v \in C$$

เมื่อ $A, B : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน และ τ λ เป็นสองจำนวนจริงบวกใดๆ

4. ผู้ดำเนินวิจัย ศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วม ของปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึงร่วม จากปริภูมิฮิลเบิร์ต สู่ปริภูมิบานาค

บรรณานุกรม

[1] L. C. Ceng, Q. H. Ansari and J. C. Yao, Mann type steepest and modified hybrid steepest-descent methods for variational inequalities in Banach spaces, Numerical Functional Analysis and Optimization, 29 (2008) 987—1033.

[2] L. C. Ceng, Q. H. Ansari and J. C. Yao, On relaxed viscosity iterative methods for variational inequalities in Banach spaces, J. Comput. App. Math. 230 (2009) 813—822.

[3] L. C. Ceng, G. Y. Chen, X. X. Huang and J. C. Yao, Existence theorems for generalized vector variational inequalities with pseudomonotonicity and their applications, Taiwanese Journal of Mathematics 12 (2008) 151—172.

[4] L. C. Ceng, C. Lee and J. C. Yao, Strong weak convergence theorems of implicit hybrid steepest-descent methods for variational inequalities, Taiwanese Journal of Mathematics 12 (2008) 227—244.

[5] L. C. Ceng, A. Petrusel and J. C. Yao, Iterative approaches to solving equilibrium problems and fixed point problems of infinitely many nonexpansive mappings, Journal of Optimization Theory and Applications 143 (2009) 37—58.

[6] L. C. Ceng, A. Petrusel and J. C. Yao, Weak convergence theorem by a modified extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings, Fixed Point Theory 9 (2008) 73—87.

[7] L. C. Ceng, S. Schaible and J. C. Yao, Hybrid steepest descent methods for zeros of nonlinear operator with applictions to variational inequalities, Journal of Optimization Theory and Applications 141 (2009) 75—91.

[8] L. C. Ceng, C. Y. Wang and J. C. Yao, Strong convergence theorems by a relaxed extragradient method for a general system of variational inequalities, Math Meth Oper Res 67 (2008) 375—390.

[9] L. C. Ceng, J. C. Yao, A hybrid iterative scheme for mixed equilibrium problems and fixed point problems, J. Comput. App. Math. 214 (2008) 186—201.

[10] L. C. Ceng, J. C. Yao, Relaxed viscosity approximation methods for fixed point problems and variational inequality problems, Nonlinear analysis Series A: Theory, Methods & Applications 69 (2008) 3299—3309.

[11] S. S. Chang, H. W. Joseph Lee and C. K. Chan, A new method for solving equilibrium problem fixed point problem and variational inequality problem with application to optimization, Nonlinear Analysis 70 (2009) 3307—3319.

[12] K. Goebel, W. A. Kirk, Topics on metric fixed-point theory. Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[13] B. Halpern, Fixed points of nonexpansive maps, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967) 957—961.

[14] A. Kangtunyakarn, S. Suantai, Hybrid iterative scheme for generalized equilibrium problems and fixed point problems of finite family of nonexpansive mappings, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 3 (2009) 296—309.

[15] G. M. Korpelevich, An extragradient method for finding saddle points and for other problems, Ekon. Mat. Metody 12 (1976) 747—756.

[16] P. L. Lion, Approximation de points fixed de contractions, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 284 (1977) A1357—A1359.

[17] L. S. Liu, Ishikawa and Mann iteration process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 194 (1995) 114—125.

[18] N. Nadezhkina, W. Takahashi, Weak convergence theorem by an extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings, Journal of optimization theory and applications 128 (2006) 191-201.

[19] M. A. Noor, On iterative methods for solving a system of mixed variational inequalities, Applicable Analysis 87(1) (2008) 99—108.

[20] M. A. Noor, Projection methods for nonconvex variational inequalities, Optimization Letters 3(3) (2009) 411—418.

[21] M. A. Noor, Some developments in general variational inequalities, Applied Mathematics and Computation 152 (2004) 199—277.

[22] M. O. Osilike, D. I. Igbokwe, Weak and strong convergence theorems for fixed points of pseudocontractions and solutions of monotone type operator equations, Comput. Math. Appl. 40 (2000) 559—239.

[23] J. W. Peng, J. C. Yao, A modified CQ method for equilibrium problems, fixed points and variational inequality, Fixed Point Theory, 9 (2008) 515—531.

[24] J. W. Peng, J. C. Yao, A new hybrid-extragradient method for generalized mixed equilibrium problems and fixed point problems and variational inequality problems, Taiwanese Journal of Mathematics 12 (2008) 1401—1433.

[25] J. W. Peng, J. C. Yao, Some new iterative algorithms for generalized mixed equilibrium problems with strict pseudo-contractions and monotone mappings, Taiwanese Journal of Mathematics 13 (2009) 1537–1582.

[26] J. W. Peng, J. C. Yao, Strong convergence theorems of iterative schemes based on extragradient method for mixed equilibrium problems and fixed point problems, Mathematical and Computer Modelling 49 (2009) 1816–1828.

[27] S. Plubtieng, R. Punpaeng, A new iterative method for equilibrium problems and fixed point problems of nonexpansive mappings and monotone mappings, Applied Mathematics and Computation 197 (2008) 548–558.

[28] X. Qin, S. Y. Cho and S. M. Kang, Iterative algorithms for variational inequality and equilibrium problems with applications. J Glob Opim. (2009) Doi 10.1007/s10898-009-9498-8.

[29] G. Stampacchi, Formes bilineaires coercivites sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sci. Paris. 258 (1964) 4413-4416.

[30] S. Reich, Approximating fixed points of nonexpansive mappings, PanAmer. Math. J. 4(2) (1994) 23–28.

[31] T. Suzuki, Strong convergence of Krasnoselskii and Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals, J. Math. Anal. Appl. 305 (2005) 227–239.

[32] W. Takahashi, M. Toyoda, Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings, J. Optim. Theory Appl. 118 (2003) 417-428.

[33] R. U. Verma, On a new system of nonlinear variational inequalities and associated iterative algorithms, Math Sci Res Hot-Line 3 (1999) 65–68.

[34] R. Wangkeeree and P. preechasilp, A new iterative scheme for solving the equilibrium problems, variational inequality problems, and fixed point problems in Hilbert spaces, Journal of Applied Mathematics 2012 (2012) Doi:10.1155/2012/154968.

[35] R. Wittmann, Approximation of fixed points of nonexpansive mappings, Arch. Math. (Basel) 58 (1992) 486–491.

[36] Y. Yao, Y. C. Liou and S. M. Kang. (2010). Approach to common elements of variational inequality problems and fixed point problems via a relaxed extragradient method. Computers and Mathematics with Applications. 59, 3472-3480.

[37] Y. Yao, M. A. Noor, K. I. Noor, Y. C. Liou and H. Yaqoob, Modified extragradient method for a system of variational inequalities in Banach spaces, Acta Appl Math 110(3) (2010) 1211–1224.

[38] Y. Yao, J. C. Yao, On modified iterative method for nonexpansive mappings and monotone mappings, Appl. Math. Comput. 186 (2007) 1551-1558.

[39] L. Yu, M. Liang, Convergence theorems of solutions of a generalized variational inequality. Fixed Point Theory and Applications 19 (2011).

[40] L. C. Zeng, J. C. Yao, A hybrid extragradient method for general variational inequalities, Mathematical Methods of Operations Research 69 (2009) 141–158.

[41] J. Zhao, S. He, A new iterative method for equilibrium problems and fixed point problems of infinitely nonexpansive mappings and monotone mappings, Appl. Math. Comput. 215 (2009) 670–680.

บทที่ 6

ภาคผนวก

1. ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์
2. รายงานความก้าวหน้าโครงการวิจัย งวดที่ 1
3. แบบสัญญารับทุนอุดหนุนการวิจัย
4. แบบเสนอโครงการวิจัย

1. ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์

เรื่อง Iterative method for a finite family of nonexpansive mappings in Hilbert spaces with applications

วารสาร Applied Mathematical Sciences, Vol. 7, 2013, no. 3, 103 - 126

Applied Mathematical Sciences, Vol. 7, 2013, no. 3, 103 - 126

Iterative Method for a Finite Family of Nonexpansive Mappings in Hilbert Spaces with Applications

S. Imnang

Department of Mathematics, Faculty of Science
Thaksin University Phatthalung Campus, Phatthalung, 93110, Thailand
Centre of Excellence in Mathematics, CHE
Si Ayutthaya Road, Bangkok 10400, Thailand
suwicha.n@hotmail.com

Abstract

In this paper, we introduce a new iterative method for finding a common element of the set of solutions of a general system of variational inequalities, the set of solutions of a mixed equilibrium problem and the set of common fixed points of a finite family of nonexpansive mappings in a real Hilbert space. Furthermore, we prove that the studied iterative method converges strongly to a common element of these three sets. Consequently, we apply our main result to the problem of approximating a zero of a finite family of maximal monotone mappings in Hilbert spaces. The theorems presented in this paper, improve and extend the corresponding results of Takahashi and Toyoda [18] and many others.

Mathematics Subject Classification: 47H10, 49J40, 47H05, 47H09, 46B20

Keywords: Nonexpansive mapping; A general system of variational inequalities; Mixed equilibrium problem; Demi-closedness principle

1 Introduction

Let H be a real Hilbert space with inner product $\langle .,. \rangle$ and C be a nonempty closed convex subset of H. A mapping $T : C \to C$ is said to be *nonexpansive mapping* if $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ for all $x, y \in C$. The fixed point set of T is denoted by $F(T) := \{x \in C : Tx = x\}$.

For a given nonlinear operator $A : C \to H$, we consider the following variational inequality problem of finding $x^* \in C$ such that

$$\langle Ax^*, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C. \tag{1.1}$$

The set of solutions of the variational inequality (1.1) is denoted by $VI(C, A)$. Variational inequality theory has emerged as an important tool in studying a wide class of obstacle, unilateral, free, moving, equilibrium problems arising in several branches of pure and applied sciences in a unified and general framework. The variational inequality problem has been extensively studied in the literature, see, for example, Piri [13], Qin et al. [15], Shehu [16], Wangkeeree and Preechasilp [21], Yao et al. [23], Yao et al. [25] and the references therein.

For solving the variational inequality problem in the finite-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^n$ under the assumption that a set $C \subset \mathbb{R}^n$ is closed and convex, a mapping A of C into $\mathbb{R}^n$ is monotone and k-Lipschitz-continuous and $VI(C, A)$ is nonempty, Korpelevich [9] introduced the following so-called extragradient method:

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda A x_n), \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda A y_n), \end{cases}$$

for every $n = 0, 1, 2, \dots,$ where $\lambda \in (0, 1/k)$ and P_C is the projection of $\mathbb{R}^n$ onto C. He showed that the sequences $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ generated by this iterative process converge to the same point $z \in VI(C, A)$. Later on, the idea of Korpelevich was generalized and extended by many authors, see e.g. [4, 8, 13, 15, 16, 21, 23] for finding a common element of the set of fixed points and the set of solutions of the variational inequality.

Let $A, B : C \to H$ be two mappings. In 2008, Ceng et al. [1] considered the following problem of finding $(x^*, y^*) \in C \times C$ such that

$$\begin{cases} \langle \lambda A y^* + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \\ \langle \mu B x^* + y^* - x^*, x - y^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \end{cases} \tag{1.2}$$

which is called a general system of variational inequalities (in short, GSVI), where λ and μ are positive numbers. In particular, if $A = B$, problem GSVI (1.2) reduces to find $(x^*, y^*) \in C \times C$ such that

$$\begin{cases} \langle \lambda A y^* + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \\ \langle \mu A x^* + y^* - x^*, x - y^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \end{cases} \tag{1.3}$$

which is defined by Verma [19], and is called the new system of variational inequalities. The set of solutions of GSVI (1.3) is denoted by Φ. Further, if we add up the requirement that $x^* = y^*$, then problem (1.3) reduces to the classical variational inequality $VI(C, A)$. Ceng et al. [1] introduced and studied a relaxed extragradient method for finding a common element of the set of solutions of problem GSVI (1.2) for the α and β-inverse-strongly monotone mappings and the set of fixed points of a nonexpansive mapping in a real Hilbert space. Let $x_1 = v \in C$ and $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ are given by

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \mu B x_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

where $\lambda \in (0, 2\alpha), \mu \in (0, 2\beta)$ and $\{a_n\}, \{b_n\} \subset [0, 1]$. Then, they proved that the sequence $\{x_n\}$ converges strongly to a common element of the set of fixed points of a nonexpansive mapping and the set of solutions of problem GSVI (1.2) under some control conditions. Some related works, we refer to see [2, 5, 8, 10, 20, 24].

Recently, in 2012, Ceng et al. [2] considered an iterative method for the system of GSVI (1.2) and obtained a strong convergence theorem for the two different systems of GSVI (1.2) and the set of fixed points of a strict pseudo-contraction mapping in a real Hilbert space.

Let $\varphi : C \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ be a proper extended real-valued function and F be a bifunction from $C \times C$ to $\mathbb{R}$, where $\mathbb{R}$ is the set of real numbers. Ceng and Yao [3] considered the following mixed equilibrium problem (in short, MEP):

$$\text{Find } \ x \in C \ \text{ such that } \ F(x, y) + \varphi(y) \geq \varphi(x), \quad \forall y \in C. \tag{1.4}$$

The set of solution of MEP (1.4) is denoted by $MEP(F, \varphi)$. It is easy to see that x is a solution of MEP (1.4) implies that $x \in \mathrm{dom}\varphi = \{x \in C \mid \varphi(x) < +\infty\}$.

If $\varphi = 0$, then the MEP (1.4) becomes the following equilibrium problem:

$$\text{Find } \ x \in C \ \text{ such that } \ F(x, y) \geq 0, \quad \forall y \in C. \tag{1.5}$$

The set of solution of (1.5) is denoted by $EP(F)$.

If $F = 0$, then the MEP (1.4) reduces to the convex minimization problem:

$$\text{Find } \ x \in C \ \text{ such that } \ \varphi(y) \geq \varphi(x), \quad \forall y \in C.$$

If $\varphi = 0$ and $F(x, y) = \langle Ax, y - x \rangle$ for all $x, y \in C$, where A is a mapping from C into H, then MEP (1.4) reduces to the classical variational inequality and $EP(F) = VI(C, A)$. For solving problem MEP (1.4), Ceng and Yao [3] introduced a hybrid iterative scheme for finding a common element of the set $MEP(F, \varphi)$ and the set of common fixed points of finite many nonexpansive mappings in a Hilbert space. Some related works, we refer to see [8, 16, 20, 23].

Motivated and inspired by the works in the literature, in this paper, we introduce a general iterative method for finding a common element of the set of solutions of a general system of variational inequalities, the set of solutions of a mixed equilibrium problem and the set of common fixed points of a finite family of nonexpansive mappings in a real Hilbert space. Furthermore, we prove that the studied iterative method converges strongly to a common element of these three sets. Consequently, we apply our main result to the problem of approximating a zero of a finite family of maximal monotone mappings in Hilbert spaces. The theorems presented in this paper, improve and extend the corresponding results of Takahashi and Toyoda [18] and many others.

2 Preliminaries

In this section, we recall the well known results and give some useful lemmas that will be used in the next section.

Let C be a nonempty closed convex subset of a real Hilbert space H. For every point $x \in H$, there exists a unique nearest point in C, denoted by $P_C x$, such that

$$\|x - P_C x\| \leq \|x - y\|, \quad \forall y \in C.$$

P_C is called the *metric projection* of H onto C. It is well known that P_C is a nonexpansive mapping of H onto C and satisfies

$$\langle x - y, P_C x - P_C y\rangle \geq \|P_C x - P_C y\|^2, \quad \forall x, y \in H. \tag{2.1}$$

Obviously, this immediately implies that

$$\|(x - y) - (P_C x - P_C y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|P_C x - P_C y\|^2, \quad \forall x, y \in H. \tag{2.2}$$

Recall that, $P_C x$ is characterized by the following properties: $P_C x \in C$ and

$$\begin{aligned} &\langle x - P_C x, y - P_C x\rangle \leq 0, \\ &\|x - y\|^2 \geq \|x - P_C x\|^2 + \|P_C x - y\|^2, \end{aligned} \tag{2.3}$$

for all $x \in H$ and $y \in C$; see Goebel and Kirk [6] for more details.

For solving the mixed equilibrium problem, let us give the following assumptions for the bifunction F, φ and the set C:

(A1) $F(x, x) = 0$ for all $x \in C$;
(A2) F is monotone, i.e. $F(x, y) + F(y, x) \leq 0$ for all $x, y \in C$;
(A3) For each $y \in C$, $x \mapsto F(x, y)$ is weakly upper semicontinuous;
(A4) For each $x \in C$, $y \mapsto F(x, y)$ is convex;
(A5) For each $x \in C$, $y \mapsto F(x, y)$ is lower semicontinuous;

(B1) For each $x \in H$ and $r > 0$, there exist a bounded subset $D_x \subseteq C$ and $y_x \in C$ such that for any $z \in C \setminus D_x$,

$$F(z, y_x) + \varphi(y_x) + \frac{1}{r}\langle y_x - z, z - x\rangle < \varphi(z).$$

(B2) C is a bounded set.

In the sequel we shall need to use the following lemmas.

Lemma 2.1. ([12]) *Let C be a nonempty closed convex subset of H. Let F be a bifunction from $C \times C$ to $\mathbb{R}$ satisfying (A1)-(A5) and let $\varphi : C \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ be a proper lower semicontinuous and convex function. Assume that either (B1) or (B2) holds. For $r > 0$ and $x \in H$, define a mapping $T_r : H \to C$ as follows.*

$$T_r(x) = \left\{z \in C : F(z, y) + \varphi(y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x\rangle \geq \varphi(z), \quad \forall y \in C\right\}$$

for all $x \in H$. Then the following conclusions hold:

(1) *For each $x \in H$, $T_r(x) \neq \emptyset$;*

(2) *T_r is single-valued;*

(3) *T_r is firmly nonexpansive, i.e. for any $x, y \in H$,*

$$\|T_r(x) - T_r(y)\|^2 \leq \langle T_r x - T_r y, x - y\rangle;$$

(4) *$F(T_r) = MEP(F, \varphi)$;*

(5) *$MEP(F, \varphi)$ is closed and convex.*

Lemma 2.2. ([22]) Assume $\{a_n\}$ is a sequence of nonnegative real numbers such that

$$a_{n+1} \leq (1 - \gamma_n)a_n + \delta_n,$$

where $\{\gamma_n\}$ is a sequence in $(0, 1)$ and $\{\delta_n\}$ is a sequence such that

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$;

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \delta_n/\gamma_n \leq 0$ or $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n| < \infty$.

Then $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Lemma 2.3. ([11]) *Let $(H, \langle., .\rangle)$ be an inner product space. Then, for all $x, y, z \in H$ and $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$ with $\alpha + \beta + \gamma = 1$, we have*

$$\begin{aligned}\|\alpha x + \beta y + \gamma z\|^2 = \alpha\|x\|^2 + \beta\|y\|^2 + \gamma\|z\|^2 - \alpha\beta\|x - y\|^2 \\ - \alpha\gamma\|x - z\|^2 - \beta\gamma\|y - z\|^2.\end{aligned}$$

Lemma 2.4. ([17]) *Let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be bounded sequences in a Banach space X and let $\{b_n\}$ be a sequence in $[0, 1]$ with $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$. Suppose $x_{n+1} = (1-b_n)y_n + b_n x_n$ for all integers $n \geq 1$ and $\limsup_{n\to\infty}(\|y_{n+1} - y_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \leq 0$. Then, $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0$.*

Lemma 2.5. ([6]) *Demi-closedness principle. Assume that T is a nonexpansive self-mapping of a nonempty closed convex subset C of a real Hilbert space H. If T has a fixed point, then $I-T$ is demi-closed: that is, whenever $\{x_n\}$ is a sequence in C converging weakly to some $x \in C$ (for short, $x_n \rightharpoonup x \in C$), and the sequence $\{(I-T)x_n\}$ converges strongly to some y (for short, $(I-T)x_n \to y$), it follows that $(I-T)x = y$. Here I is the identity operator of H.*

The following lemma is an immediate consequence of an inner product.

Lemma 2.6. *In a real Hilbert space H, there holds the inequality*

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, x+y\rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

In 2009, Kangtunyakarn and Suantai [7] introduced a new mapping called the S-mapping. Let $\{T_i\}_{i=1}^N$ be a finite family of nonexpansive mappings of C into itself. For each $n \in \mathbb{N}$, and $j = 1, 2, \ldots, N$, let $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ be such that $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$ with $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$. They defined the new mapping $S_n : C \to C$ as follows:

$$\begin{aligned}
U_{n,0} &= I,\\
U_{n,1} &= \alpha_1^{n,1} T_1 U_{n,0} + \alpha_2^{n,1} U_{n,0} + \alpha_3^{n,1} I,\\
U_{n,2} &= \alpha_1^{n,2} T_2 U_{n,1} + \alpha_2^{n,2} U_{n,1} + \alpha_3^{n,2} I,\\
U_{n,3} &= \alpha_1^{n,3} T_3 U_{n,2} + \alpha_2^{n,3} U_{n,2} + \alpha_3^{n,3} I,\\
&\vdots\\
U_{n,N-1} &= \alpha_1^{n,N-1} T_{N-1} U_{n,N-2} + \alpha_2^{n,N-1} U_{n,N-2} + \alpha_3^{n,N-1} I,\\
S_n = U_{n,N} &= \alpha_1^{n,N} T_N U_{n,N-1} + \alpha_2^{n,N} U_{n,N-1} + \alpha_3^{n,N} I.
\end{aligned}$$

The mapping S_n is called the S-mapping generated by $T_1, T_2, \ldots, T_N$ and $\alpha_1^{(n)}$, $\alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$. Nonexpansivity of each T_i ensures the nonexpansivity of S_n.

Lemma 2.7. ([7]) *Let C be a nonempty closed convex subset of a strictly convex Banach space X. Let $\{T_i\}_{i=1}^N$ be a finite family of nonexpansive mappings of C into itself with $\bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq \emptyset$ and let $\alpha_j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, where $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j \in [0,1]$, $\alpha_1^j + \alpha_2^j + \alpha_3^j = 1$, $\alpha_1^j \in (0,1)$ for all $j = 1, 2, \ldots, N-1$, $\alpha_1^N \in (0,1]$ and α_2^j, $\alpha_3^j \in [0,1)$ for all $j = 1, 2, \ldots, N$. Let S be the S-mapping generated by $T_1, T_2, \ldots, T_N$ and $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$. Then $F(S) = \bigcap_{i=1}^N F(T_i)$.*

Lemma 2.8. ([7]) *Let C be a nonempty closed convex subset of a Banach space X. Let $\{T_i\}_{i=1}^N$ be a finite family of nonexpansive mappings of C into itself and for all $n \in \mathbb{N}$ and all $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$, let $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$, $\alpha_j =$*

$(\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j)$ *where* $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j}+\alpha_2^{n,j}+\alpha_3^{n,j} = 1$ *and* $\alpha_1^j + \alpha_2^j + \alpha_3^j = 1$. *Suppose* $\alpha_i^{n,j} \to \alpha_i^j$ *as* $n \to \infty$ *for all* $i \in \{1,3\}$ *and all* $j = 1,2,3,\dots,N$. *Let* S *and* S_n *be the* S*-mappings generated by* $T_1, T_2, \dots, T_N$ *and* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ *and* $T_1, T_2, \dots, T_N$ *and* $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_N^{(n)}$, *respectively. Then* $\lim_{n\to\infty} \|S_n x - Sx\| = 0$ *for every* $x \in C$.

Lemma 2.9. ([1]) *For given* $x^*, y^* \in C$, (x^*, y^*) *is a solution of problem* (1.2) *if and only if* x^* *is a fixed of the mapping* $G : C \to C$ *defined by*

$$G(x) = P_C[P_C(x - \mu Bx) - \lambda A P_C(x - \mu Bx)], \quad \forall x \in C,$$

where $y^* = P_C(x^* - \mu Bx^*)$.

Throughout this paper, the set of fixed points of the mapping G is denoted by $GVI(C, A, B)$.

Lemma 2.10. ([21]) *Let* $A : C \to H$ *be a* L_A*-Lipschitzian and relaxed* (c,d)*-cocoercive mapping and* $B : C \to H$ *be a* L_B*-Lipschitzian and relaxed* (c', d')*-cocoercive mapping. Let the mapping* $G : C \to C$ *be defined by*

$$G(x) = P_C[P_C(x - \mu Bx) - \lambda A P_C(x - \mu Bx)], \quad \forall x \in C.$$

If $0 < \lambda < \frac{2(d - cL_A^2)}{L_A^2}$ *and* $0 < \mu < \frac{2(d' - c'L_B^2)}{L_B^2}$. *Then* G *is nonexpansive.*

3 Main Results

We are now in a position to state and prove our main results.

Lemma 3.1. *Let* $B : C \to H$ *be a* L*-Lipschitzian and relaxed* (c', d')*-cocoercive mapping. If* $0 < \mu \le \frac{2(d' - c'L^2)}{L^2}$, *then* $I - \mu B$ *is nonexpansive.*

Proof. For any $x, y \in C$, we have

$$\begin{aligned}
\|(I - \mu B)x - (I - \mu B)y\|^2 &= \|(x - y) - \mu(Bx - By)\|^2 \\
&= \|x - y\|^2 + \mu^2\|Bx - By\|^2 \\
&\quad - 2\mu\langle x - y, Bx - By\rangle \\
&\le \|x - y\|^2 + \mu^2\|Bx - By\|^2 \\
&\quad - 2\mu[-c'\|Bx - By\|^2 + d'\|x - y\|^2] \\
&= \|x - y\|^2 + \mu^2\|Bx - By\|^2 \\
&\quad + 2\mu c'\|Bx - By\|^2 - 2\mu d'\|x - y\|^2 \\
&\le \|x - y\|^2 + \mu^2 L^2\|x - y\|^2 \\
&\quad + 2\mu c' L^2\|x - y\|^2 - 2\mu d'\|x - y\|^2 \\
&= (1 + 2\mu c' L^2 - 2\mu d' + \mu^2 L^2)\|x - y\|^2 \\
&\le \|x - y\|^2,
\end{aligned}$$

hence $I - \mu B$ is nonexpansive. $\square$

Theorem 3.2. *Let C be a nonempty closed and convex subset of a real Hilbert space H. Let F be a function from $C \times C$ to $\mathbb{R}$ satisfying (A1)-(A5) and $\varphi : C \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ be a proper lower semicontinuous and convex function. Let $A : C \to H$ be a L_A-Lipschitzian and relaxed (c, d)-cocoercive mapping and $B : C \to H$ be a L_B-Lipschitzian and relaxed (c', d')-cocoercive mapping. Let $\{T_i\}_{i=1}^N$ be a finite family of nonexpansive self-mappings of C such that $\Omega = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \bigcap GVI(C, A, B) \bigcap MEP(F, \varphi) \neq \emptyset$. For all $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, let $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ be such that $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0, 1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ with $0 < \eta_1 \leq \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N, 1]$ with $0 < \eta_N \leq 1$ and $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^N, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^N \subset [0, \theta_2]$ with $0 \leq \theta_2 < 1$. Let S_n be the S-mappings generated by $T_1, T_2, \dots, T_N$ and $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_N^{(n)}$. Assume that either (B1) or (B2) holds and that v is an arbitrary point in C. Let $x_1 \in C$ and $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ be the sequences defined by*

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

where $0 < \lambda < \frac{2(d - cL_A^2)}{L_A^2}$ and $0 < \mu < \frac{2(d' - c' L_B^2)}{L_B^2}$. Suppose that the following conditions hold:

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ *and* $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i} - \alpha_1^{n,i}| = 0$ *for all* $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ *and* $\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}| = 0$ *for all* $j \in \{2, 3, \dots, N\}$.

Then $\{x_n\}$ converges strongly to $\overline{x} = P_\Omega v$ and $(\overline{x}, \overline{y})$ is a solution of problem (1.2), where $\overline{y} = P_C(\overline{x} - \mu B\overline{x})$.

Proof. Let $x^* \in \Omega$ and $\{T_{r_n}\}$ be a sequence of mappings defined as in Lemma 2.1. It follows from Lemma 2.9 that

$$x^* = P_C[P_C(x^* - \mu B x^*) - \lambda A P_C(x^* - \mu B x^*)].$$

Put $y^* = P_C(x^* - \mu B x^*)$ and $t_n = P_C(y_n - \lambda A y_n)$, then $x^* = P_C(y^* - \lambda A y^*)$ and

$$x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n t_n.$$

From Lemma 3.1 and nonexpansiveness of P_C and T_{r_n}, we have

$$\begin{aligned}
\|t_n - x^*\|^2 &= \|P_C(y_n - \lambda A y_n) - P_C(y^* - \lambda A y^*)\|^2 \\
&\leq \|y_n - y^*\|^2 \\
&= \|P_C(u_n - \mu B u_n) - P_C(x^* - \mu B x^*)\|^2 \\
&\leq \|u_n - x^*\|^2 \\
&= \|T_{r_n} x_n - T_{r_n} x^*\|^2 \\
&\leq \|x_n - x^*\|^2, \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

which, implies that

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\| &= \|a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n t_n - x^*\| \\
&\leq a_n \|v - x^*\| + b_n \|x_n - x^*\| + (1 - a_n - b_n)\|t_n - x^*\| \\
&\leq a_n \|v - x^*\| + b_n \|x_n - x^*\| + (1 - a_n - b_n)\|x_n - x^*\| \\
&\leq \max\{\|v - x^*\|, \|x_1 - x^*\|\}.
\end{aligned}$$

Thus, $\{x_n\}$ is bounded. Consequently, the sequences $\{u_n\}$, $\{y_n\}$, $\{t_n\}$, $\{Ay_n\}$, $\{Bu_n\}$ and $\{S_n t_n\}$ are also bounded. Also, observe that

$$\begin{aligned}
\|t_{n+1} - t_n\| &= \|P_C(y_{n+1} - \lambda A y_{n+1}) - P_C(y_n - \lambda A y_n)\| \\
&\leq \|y_{n+1} - y_n\| \\
&= \|P_C(u_{n+1} - \mu B u_{n+1}) - P_C(u_n - \mu B u_n)\| \\
&\leq \|u_{n+1} - u_n\|. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

On the other hand, from $u_n = T_{r_n} x_n \in \mathrm{dom}\varphi$ and $u_{n+1} = T_{r_{n+1}} x_{n+1} \in \mathrm{dom}\varphi$, we have

$$F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \qquad (3.3)$$

and

$$F(u_{n+1}, y) + \varphi(y) - \varphi(u_{n+1}) + \frac{1}{r_{n+1}}\langle y - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1}\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C. \qquad (3.4)$$

Putting $y = u_{n+1}$ in (3.3) and $y = u_n$ in (3.4), we have

$$F(u_n, u_{n+1}) + \varphi(u_{n+1}) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle u_{n+1} - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0,$$

and

$$F(u_{n+1}, u_n) + \varphi(u_n) - \varphi(u_{n+1}) + \frac{1}{r_{n+1}}\langle u_n - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1}\rangle \geq 0.$$

From the monotonicity of F, we obtain that

$$\left\langle u_{n+1} - u_n, \frac{u_n - x_n}{r_n} - \frac{u_{n+1} - x_{n+1}}{r_{n+1}} \right\rangle \geq 0,$$

and hence

$$\left\langle u_{n+1} - u_n, u_n - u_{n+1} + u_{n+1} - x_n - \frac{r_n}{r_{n+1}}(u_{n+1} - x_{n+1}) \right\rangle \geq 0.$$

Then, we have

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - u_n\|^2 &\leq \left\langle u_{n+1} - u_n, x_{n+1} - x_n + (1 - \frac{r_n}{r_{n+1}})(u_{n+1} - x_{n+1}) \right\rangle \\ &\leq \|u_{n+1} - u_n\| \left\{ \|x_{n+1} - x_n\| + |1 - \frac{r_n}{r_{n+1}}| \|u_{n+1} - x_{n+1}\| \right\}, \end{aligned}$$

and hence

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{r_{n+1}} |r_{n+1} - r_n| \|u_{n+1} - x_{n+1}\|. \tag{3.5}$$

It follows from (3.2) and (3.5) that

$$\|t_{n+1} - t_n\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{r_{n+1}} |r_{n+1} - r_n| \|u_{n+1} - x_{n+1}\|. \tag{3.6}$$

Let $x_{n+1} = b_n x_n + (1 - b_n) z_n$. Then, we obtain

$$\begin{aligned} z_{n+1} - z_n &= \frac{x_{n+2} - b_{n+1} x_{n+1}}{1 - b_{n+1}} - \frac{x_{n+1} - b_n x_n}{1 - b_n} \\ &= \frac{a_{n+1} v + (1 - a_{n+1} - b_{n+1}) S_{n+1} t_{n+1}}{1 - b_{n+1}} - \frac{a_n v + (1 - a_n - b_n) S_n t_n}{1 - b_n} \\ &= \frac{a_{n+1}}{1 - b_{n+1}} (v - S_{n+1} t_{n+1}) + \frac{a_n}{1 - b_n} (S_n t_n - v) + S_{n+1} t_{n+1} - S_n t_n. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Next, we estimate $\|S_{n+1} t_{n+1} - S_n t_n\|$.

For each $k \in \{2, 3, \dots, N\}$, we have

$$
\begin{aligned}
\|U_{n+1,k}t_n - U_{n,k}t_n\| &= \|\alpha_1^{n+1,k}T_kU_{n+1,k-1}t_n + \alpha_2^{n+1,k}U_{n+1,k-1}t_n + \alpha_3^{n+1,k}t_n \\
&\quad - \alpha_1^{n,k}T_kU_{n,k-1}t_n - \alpha_2^{n,k}U_{n,k-1}t_n - \alpha_3^{n,k}t_n\| \\
&= \|\alpha_1^{n+1,k}(T_kU_{n+1,k-1}t_n - T_kU_{n,k-1}t_n) \\
&\quad + (\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k})T_kU_{n,k-1}t_n + (\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k})t_n \\
&\quad + \alpha_2^{n+1,k}(U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n) + (\alpha_2^{n+1,k} - \alpha_2^{n,k})U_{n,k-1}t_n\| \\
&\leq \alpha_1^{n+1,k}\|U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n\| + |\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}|\|T_kU_{n,k-1}t_n\| \\
&\quad + |\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}|\|t_n\| + \alpha_2^{n+1,k}\|U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n\| \\
&\quad + |\alpha_2^{n+1,k} - \alpha_2^{n,k}|\|U_{n,k-1}t_n\| \\
&= (\alpha_1^{n+1,k} + \alpha_2^{n+1,k})\|U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n\| \\
&\quad + |\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}|\|T_kU_{n,k-1}t_n\| + |\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}|\|t_n\| \\
&\quad + |\alpha_2^{n+1,k} - \alpha_2^{n,k}|\|U_{n,k-1}t_n\| \\
&\leq \|U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n\| + |\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}|\|T_kU_{n,k-1}t_n\| \\
&\quad + |\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}|\|t_n\| + |(\alpha_1^{n,k} - \alpha_1^{n+1,k}) + (\alpha_3^{n,k} - \alpha_3^{n+1,k})|\|U_{n,k-1}t_n\| \\
&\leq \|U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n\| + |\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}|\|T_kU_{n,k-1}t_n\| \\
&\quad + |\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}|\|t_n\| + |\alpha_1^{n,k} - \alpha_1^{n+1,k}|\|U_{n,k-1}t_n\| \\
&\quad + |\alpha_3^{n,k} - \alpha_3^{n+1,k}|\|U_{n,k-1}t_n\| \\
&= \|U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n\| + |\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}|(\|T_kU_{n,k-1}t_n\| + \|U_{n,k-1}t_n\|) \\
&\quad + |\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}|(\|t_n\| + \|U_{n,k-1}t_n\|). \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

It follow from (3.8) that

$$
\begin{aligned}
\|S_{n+1}t_n - S_nt_n\| &= \|U_{n+1,N}t_n - U_{n,N}t_n\| \\
&\leq \|U_{n+1,1}t_n - U_{n,1}t_n\| + \sum_{j=2}^{N}|\alpha_1^{n+1,j} - \alpha_1^{n,j}|(\|T_jU_{n,j-1}t_n\| + \|U_{n,j-1}t_n\|) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{N}|\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}|(\|t_n\| + \|U_{n,j-1}t_n\|) \\
&= |\alpha_1^{n+1,1} - \alpha_1^{n,1}|\|T_1t_n - t_n\| \\
&\quad + \sum_{j=2}^{N}|\alpha_1^{n+1,j} - \alpha_1^{n,j}|(\|T_jU_{n,j-1}t_n\| + \|U_{n,j-1}t_n\|) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{N}|\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}|(\|t_n\| + \|U_{n,j-1}t_n\|).
\end{aligned}
$$

This together with the condition $(C4)$, we obtain

$$\lim_{n\to\infty}\|S_{n+1}t_n - S_nt_n\| = 0. \tag{3.9}$$

It follows from (3.6) that

$$\begin{aligned}\|S_{n+1}t_{n+1} - S_nt_n\| &\le \|t_{n+1} - t_n\| + \|S_{n+1}t_n - S_nt_n\| \\ &\le \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{r_{n+1}}|r_{n+1} - r_n|\|u_{n+1} - x_{n+1}\| \\ &\quad + \|S_{n+1}t_n - S_nt_n\|. \end{aligned}\tag{3.10}$$

By (3.7) and (3.10), we have

$$\begin{aligned}\|z_{n+1} - z_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| &\le \frac{a_{n+1}}{1-b_{n+1}}\|v - S_{n+1}t_{n+1}\| + \frac{a_n}{1-b_n}\|S_nt_n - v\| \\ &\quad + \|S_{n+1}t_{n+1} - S_nt_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\le \frac{a_{n+1}}{1-b_{n+1}}\|v - S_{n+1}t_{n+1}\| + \frac{a_n}{1-b_n}\|S_nt_n - v\| \\ &\quad + \frac{1}{r_{n+1}}|r_{n+1} - r_n|\|u_{n+1} - x_{n+1}\| \\ &\quad + \|S_{n+1}t_n - S_nt_n\|.\end{aligned}$$

This together with (C1)-(C3) and (3.9), we obtain that

$$\limsup_{n\to\infty}\|z_{n+1} - z_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \le 0.$$

Hence, by Lemma 2.4, we get $\|x_n - z_n\| \to 0$ as $n \to \infty$. Consequently,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n\to\infty}(1-b_n)\|z_n - x_n\| = 0. \tag{3.11}$$

From (C3), (3.2) and (3.5), we also have $\|u_{n+1} - u_n\| \to 0$, $\|t_{n+1} - t_n\| \to 0$ and $\|y_{n+1} - y_n\| \to 0$, as $n \to \infty$.
Since

$$x_{n+1} - x_n = a_n(v - x_n) + (1 - a_n - b_n)(S_nt_n - x_n),$$

therefore

$$\|S_nt_n - x_n\| \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty. \tag{3.12}$$

Next, we prove that $\lim_{n\to\infty}\|x_n - u_n\| = 0$. From Lemma 2.1(3), we have

$$\begin{aligned}\|u_n - x^*\|^2 = \|T_{r_n}x_n - T_{r_n}x^*\|^2 &\le \langle T_{r_n}x_n - T_{r_n}x^*, x_n - x^*\rangle \\ = \langle u_n - x^*, x_n - x^*\rangle &= \frac{1}{2}\{\|u_n - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 - \|x_n - u_n\|^2\}.\end{aligned}$$

Hence

$$\|u_n - x^*\|^2 \leq \|x_n - x^*\|^2 - \|x_n - u_n\|^2. \tag{3.13}$$

From Lemma 2.3, (3.1) and (3.13), we have

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 &\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|t_n - x^*\|^2 \\
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|u_n - x^*\|^2 \\
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\left[\|x_n - x^*\|^2 - \|x_n - u_n\|^2\right] \\
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 - (1 - a_n - b_n)\|x_n - u_n\|^2.
\end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned}
&(1 - a_n - b_n)\|x_n - u_n\|^2 \leq a_n\|v - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - x^*\|^2 \\
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + (\|x_n - x^*\| + \|x_{n+1} - x^*\|)\|x_{n+1} - x_n\|.
\end{aligned}$$

From the conditions (C1), (C2) and (3.11), we obtain

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - u_n\| = 0. \tag{3.14}$$

Since

$$\|S_n t_n - u_n\| \leq \|S_n t_n - x_n\| + \|x_n - u_n\|,$$

it follows from (3.12) and (3.14) that

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n t_n - u_n\| = 0. \tag{3.15}$$

Next, we show that $\|Ay_n - Ay^*\| \to 0$ and $\|Bu_n - Bx^*\| \to 0$ as $n \to \infty$. From (3.1), we have

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 &\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|t_n - x^*\|^2 \\
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|y_n - y^*\|^2 \\
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\|(u_n - \mu Bu_n) - (x^* - \mu Bx^*)\|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\big[\|u_n - x^*\|^2 - 2\mu\langle u_n - x^*, Bu_n - Bx^*\rangle \\
&\quad + \mu^2\|Bu_n - Bx^*\|^2\big] \\
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\big[\|u_n - x^*\|^2 + 2\mu c'\|Bu_n - Bx^*\|^2 \\
&\quad - 2\mu d'\|u_n - x^*\|^2 + \mu^2\|Bu_n - Bx^*\|^2\big] \\
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\big[\|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad + (2\mu c' + \mu^2 - \frac{2\mu d'}{L_B^2})\|Bu_n - Bx^*\|^2\big] \\
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)(2\mu c' + \mu^2 - \frac{2\mu d'}{L_B^2})\|Bu_n - Bx^*\|^2,
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 &\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|t_n - x^*\|^2 \\
&= a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\|P_C(y_n - \lambda Ay_n) - P_C(y^* - \lambda Ay^*)\|^2 \\
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\|(y_n - \lambda Ay_n) - (y^* - \lambda Ay^*)\|^2 \\
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\big[\|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad + (2\lambda c + \lambda^2 - \frac{2\lambda d}{L_A^2})\|Ay_n - Ay^*\|^2\big] \\
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)(2\lambda c + \lambda^2 - \frac{2\lambda d}{L_A^2})\|Ay_n - Ay^*\|^2.
\end{aligned}
$$

Therefore, we have

$$
\begin{aligned}
&-(1 - a_n - b_n)(2\mu c' + \mu^2 - \frac{2\mu d'}{L_B^2})\|Bu_n - Bx^*\|^2 \\
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + (\|x_n - x^*\| + \|x_{n+1} - x^*\|)\|x_{n+1} - x_n\|,
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&-(1 - a_n - b_n)(2\lambda c + \lambda^2 - \frac{2\lambda d}{L_A^2})\|Ay_n - Ay^*\|^2 \\
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + (\|x_n - x^*\| + \|x_{n+1} - x^*\|)\|x_{n+1} - x_n\|.
\end{aligned}
$$

This together with (3.11), (C1) and (C2), we obtain

$$\|Ay_n - Ay^*\| \to 0 \quad \text{and} \quad \|Bu_n - Bx^*\| \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty. \tag{3.16}$$

Next, we prove that $\|S_n t_n - t_n\| \to 0$ as $n \to \infty$. From (2.1) and nonexpansiveness of $I - \mu B$, we get

$$\begin{aligned}
\|y_n - y^*\|^2 &= \|P_C(u_n - \mu Bu_n) - P_C(x^* - \mu Bx^*)\|^2 \\
&\leq \langle (u_n - \mu Bu_n) - (x^* - \mu Bx^*), y_n - y^* \rangle \\
&= \frac{1}{2}\big[\|(u_n - \mu Bu_n) - (x^* - \mu Bx^*)\|^2 + \|y_n - y^*\|^2 \\
&\quad - \|(u_n - \mu Bu_n) - (x^* - \mu Bx^*) - (y_n - y^*)\|^2\big] \\
&\leq \frac{1}{2}\big[\|u_n - x^*\|^2 + \|y_n - y^*\|^2 - \|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\mu\langle (u_n - x^*) - (y_n - y^*), Bu_n - Bx^* \rangle - \mu^2\|Bu_n - Bx^*\|^2\big].
\end{aligned}$$

By (3.1), we obtain

$$\begin{aligned}
\|y_n - y^*\|^2 &\leq \|u_n - x^*\|^2 - \|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\mu\langle (u_n - x^*) - (y_n - y^*), Bu_n - Bx^* \rangle - \mu^2\|Bu_n - Bx^*\|^2 \\
&\leq \|x_n - x^*\|^2 - \|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\mu\langle (u_n - x^*) - (y_n - y^*), Bu_n - Bx^* \rangle - \mu^2\|Bu_n - Bx^*\|^2.
\end{aligned}$$

Hence,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 &\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|y_n - y^*\|^2 \\
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\big[\|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad - \|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\mu\langle (u_n - x^*) - (y_n - y^*), Bu_n - Bx^* \rangle - \mu^2\|Bu_n - Bx^*\|^2\big] \\
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad - (1 - a_n - b_n)\|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\|^2 \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)2\mu\|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\|\|Bu_n - Bx^*\|,
\end{aligned}$$

which implies that

$$\begin{aligned}
&(1 - a_n - b_n)\|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\|^2 \\
&\leq a_n\|v - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)2\mu\|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\|\|Bu_n - Bx^*\| \\
&\quad + (\|x_n - x^*\| + \|x_{n+1} - x^*\|)\|x_{n+1} - x_n\|.
\end{aligned}$$

This together with (C1), (3.11) and (3.16), we obtain

$$\|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\| \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty. \tag{3.17}$$

From Lemma 2.6 and (2.2), it follows that

$$\begin{aligned}
&\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\|^2 = \|(y_n - \lambda A y_n) - (y^* - \lambda A y^*) \\
&\quad - \big[P_C(y_n - \lambda A y_n) - P_C(y^* - \lambda A y^*)\big] + \lambda(A y_n - A y^*)\|^2 \\
&\leq \|(y_n - \lambda A y_n) - (y^* - \lambda A y^*) - \big[P_C(y_n - \lambda A y_n) - P_C(y^* - \lambda A y^*)\big]\|^2 \\
&\quad + 2\lambda\langle A y_n - A y^*, (y_n - t_n) + (x^* - y^*)\rangle \\
&\leq \|(y_n - \lambda A y_n) - (y^* - \lambda A y^*)\|^2 - \|P_C(y_n - \lambda A y_n) - P_C(y^* - \lambda A y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\lambda\|A y_n - A y^*\|\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \\
&\leq \|(y_n - \lambda A y_n) - (y^* - \lambda A y^*)\|^2 - \|S_n P_C(y_n - \lambda A y_n) - S_n P_C(y^* - \lambda A y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\lambda\|A y_n - A y^*\|\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \\
&\leq \|(y_n - \lambda A y_n) - (y^* - \lambda A y^*) \\
&\quad - (S_n t_n - x^*)\|\big[\|(y_n - \lambda A y_n) - (y^* - \lambda A y^*)\| + \|S_n t_n - x^*\|\big] \\
&\quad + 2\lambda\|A y_n - A y^*\|\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \\
&= \|u_n - S_n t_n + x^* - y^* - (u_n - y_n) \\
&\quad - \lambda(A y_n - A y^*)\|\big[\|(y_n - \lambda A y_n) - (y^* - \lambda A y^*)\| + \|S_n t_n - x^*\|\big] \\
&\quad + 2\lambda\|A y_n - A y^*\|\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\|.
\end{aligned}$$

This together with (3.15), (3.17) and (3.16), we obtain $\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \to 0$ as $n \to \infty$. This together with (3.12), (3.14) and (3.17), we obtain that

$$\begin{aligned}
\|S_n t_n - t_n\| &\leq \|S_n t_n - x_n\| + \|x_n - u_n\| + \|(u_n - y_n) - (x^* - y^*)\| \\
&\quad + \|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Next, we show that

$$\limsup_{n\to\infty}\langle v - \overline{x}, x_n - \overline{x}\rangle \leq 0,$$

where $\overline{x} = P_\Omega v$.
Indeed, since $\{t_n\}$ and $\{S_n t_n\}$ are two bounded sequences in C, we can choose a subsequence $\{t_{n_i}\}$ of $\{t_n\}$ such that $t_{n_i} \rightharpoonup z \in C$ and

$$\limsup_{n\to\infty}\langle v - \overline{x}, S_n t_n - \overline{x}\rangle = \lim_{i\to\infty}\langle v - \overline{x}, S_{n_i} t_{n_i} - \overline{x}\rangle.$$

Since $\lim_{n\to\infty}\|S_n t_n - t_n\| = 0$, we obtain that $S_{n_i} t_{n_i} \rightharpoonup z$ as $i \to \infty$.

Next, we show that $z \in \Omega$.

(a) We first show $z \in \bigcap_{i=1}^N F(T_i)$.

We can assume that $\alpha_1^{n,j} \to \alpha_1^j \in (0,1)$ and $\alpha_1^{n,N} \to \alpha_1^N \in (0,1]$ as $n \to \infty$ for all $j \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ and $\alpha_3^{n,j} \to \alpha_3^j \in [0,1)$ as $n \to \infty$ for $j = 1, 2, \dots, N$. Let S be the S-mappings generated by $T_1, T_2, \dots, T_N$ and $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ where

$\alpha_j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j)$, for $j = 1, 2, \ldots, N$. From Lemma 2.8, we have $\|S_n t_n - St_n\| \to 0$ as $n \to \infty$. Since

$$\|St_n - t_n\| \le \|St_n - S_n t_n\| + \|S_n t_n - t_n\|,$$

it follows by (3.18) that $\|St_n - t_n\| \to 0$ as $n \to \infty$.
Since $t_{n_i} \rightharpoonup z$ and $\|St_n - t_n\| \to 0$, we obtain by Lemma 2.5 and Lemma 2.7 that $z \in F(S) = \bigcap_{i=1}^N F(T_i)$.

(b) Now, we show that $z \in GVI(C, A, B)$.
Since

$$\|t_n - x_n\| \le \|S_n t_n - t_n\| + \|S_n t_n - x_n\|,$$

it follows from (3.18) and (3.12) that $\|t_n - x_n\| \to 0$ as $n \to \infty$. Furthermore, by Lemma 2.10, we have $G : C \to C$ is nonexpansive. Then, we have

$$\begin{aligned}
\|t_n - G(t_n)\| &= \|P_C(y_n - \lambda A y_n) - G(t_n)\| \\
&= \|P_C[P(u_n - \mu B u_n) - \lambda A P(u_n - \mu B u_n)] - G(t_n)\| \\
&= \|G(u_n) - G(t_n)\| \le \|u_n - t_n\| \\
&\le \|u_n - x_n\| + \|x_n - t_n\|,
\end{aligned}$$

which implies $\|t_n - G(t_n)\| \to 0$ as $n \to \infty$. Again by Lemma 2.5, we have $z \in GVI(C, A, B)$.

(c) We show that $z \in MEP(F, \varphi)$. Since $t_{n_i} \rightharpoonup z$ and $\|x_n - t_n\| \to 0$, we obtain that $x_{n_i} \rightharpoonup z$. From $\|u_n - x_n\| \to 0$, we also obtain that $u_{n_i} \rightharpoonup z$. By using the same argument as that in the proof of [12, Theorem 3.1, pp. 1825], we can show that $z \in MEP(F, \varphi)$. Therefore there holds $z \in \Omega$.

On the other hand, it follows from (2.3) and $S_{n_i} t_{n_i} \rightharpoonup z$ as $i \to \infty$ that

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \langle v - \overline{x}, x_n - \overline{x}\rangle &= \limsup_{n\to\infty} \langle v - \overline{x}, S_n t_n - \overline{x}\rangle = \lim_{i\to\infty} \langle v - \overline{x}, S_{n_i} t_{n_i} - \overline{x}\rangle \\
&= \langle v - \overline{x}, z - \overline{x}\rangle \le 0. \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Hence, we have

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - \overline{x}\|^2 &= \langle a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n t_n - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle \\
&= a_n \langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle + b_n \langle x_n - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\langle S_n t_n - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le a_n\langle v-\overline{x}, x_{n+1}-\overline{x}\rangle + \frac{1}{2}b_n(\|x_n-\overline{x}\|^2+\|x_{n+1}-\overline{x}\|^2)\\
&\quad + \frac{1}{2}(1-a_n-b_n)(\|t_n-\overline{x}\|^2+\|x_{n+1}-\overline{x}\|^2)\\
&\le a_n\langle v-\overline{x}, x_{n+1}-\overline{x}\rangle + \frac{1}{2}b_n(\|x_n-\overline{x}\|^2+\|x_{n+1}-\overline{x}\|^2)\\
&\quad + \frac{1}{2}(1-a_n-b_n)(\|x_n-\overline{x}\|^2+\|x_{n+1}-\overline{x}\|^2)\\
&= a_n\langle v-\overline{x}, x_{n+1}-\overline{x}\rangle + \frac{1}{2}(1-a_n)(\|x_n-\overline{x}\|^2+\|x_{n+1}-\overline{x}\|^2),
\end{aligned}
$$

which implies that

$$
\|x_{n+1}-\overline{x}\|^2 \le (1-a_n)\|x_n-\overline{x}\|^2 + 2a_n\langle v-\overline{x}, x_{n+1}-\overline{x}\rangle.
$$

It follows from Lemma 2.2 and (3.19) that $\{x_n\}$ converges strongly to $\overline{x}$. This completes the proof. □

If $A=B$ in Theorem 3.2, then we obtain the following result.

Corollary 3.3. *Let C be a nonempty closed and convex subset of a real Hilbert space H. Let F be a function from $C\times C$ to $\mathbb{R}$ satisfying (A1)-(A5) and $\varphi : C \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ be a proper lower semicontinuous and convex function. Let $A : C \to H$ be a L_A-Lipschitzian and relaxed (c,d)-cocoercive mapping. Let $\{T_i\}_{i=1}^N$ be a finite family of nonexpansive self-mappings of C such that $\Omega = \bigcap_{i=1}^N F(T_i)\bigcap\Phi\bigcap MEP(F,\varphi) \neq \emptyset$. For all $j\in\{1,2,\dots,N\}$, let $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ be such that $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j}+\alpha_2^{n,j}+\alpha_3^{n,j}=1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1,\theta_1]$ with $0<\eta_1\le\theta_1<1$, $\{\alpha_1^{n,N}\}\subset[\eta_N,1]$ with $0<\eta_N\le 1$ and $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^N, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^N \subset [0,\theta_2]$ with $0\le\theta_2<1$. Let S_n be the S-mappings generated by $T_1,T_2,\dots,T_N$ and $\alpha_1^{(n)},\alpha_2^{(n)},\dots,\alpha_N^{(n)}$. Assume that either (B1) or (B2) holds and that v is an arbitrary point in C. Let $x_1\in C$ and $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ be the sequences generated by*

$$
\begin{cases}
F(u_n,y)+\varphi(y)-\varphi(u_n)+\frac{1}{r_n}\langle y-u_n, u_n-x_n\rangle \ge 0, \quad \forall y\in C,\\
y_n = P_C(u_n-\mu Au_n),\\
x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1-a_n-b_n)S_nP_C(y_n-\lambda Ay_n), \quad n\ge 1,
\end{cases}
$$

where $0<\lambda,\mu<\frac{2(d-cL_A^2)}{L_A^2}$. If the sequences $\{r_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ and $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^N$ are as in Theorem 3.2, then $\{x_n\}$ converges strongly to $\overline{x}=P_\Omega v$ and $(\overline{x},\overline{y})$ is a solution of problem (1.3), where $\overline{y}=P_C(\overline{x}-\mu A\overline{x})$.

If $N=1$, $T_1=S$, $\varphi=0$ and $\alpha_2^{n,1}$, $\alpha_3^{n,1}=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ in Theorem 3.2, then we obtain the following result.

Corollary 3.4. *Let C be a nonempty closed and convex subset of a real Hilbert space H. Let F be a function from $C \times C$ to $\mathbb{R}$ satisfying (A1)-(A5). Let $A : C \to H$ be a L_A-Lipschitzian and relaxed (c, d)-cocoercive mapping and $B : C \to H$ be a L_B-Lipschitzian and relaxed (c', d')-cocoercive mapping. Let S be a nonexpansive self-mappings of C such that $\Omega = F(S) \bigcap GVI(C, A, B) \bigcap EP(F) \neq \emptyset$. Assume that v is an arbitrary point in C. Let $x_1 \in C$ and $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ be the sequences generated by*

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

If λ, μ and the sequences $\{r_n\}$, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ are as in Theorem 3.2, then $\{x_n\}$ converges strongly to $\overline{x} \in P_\Omega v$ and $(\overline{x}, \overline{y})$ is a solution of problem (1.2), where $\overline{y} = P_C(\overline{x} - \mu B \overline{x})$.

4 Applications

In this section, we will apply Theorem 3.2 to obtain two strong convergence theorems in a real Hilbert space.

Theorem 4.1. *Let H be a real Hilbert space. Let F be a function from $H \times H$ to $\mathbb{R}$ satisfying (A1)-(A5) and $\varphi : H \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ be a proper lower semicontinuous and convex function. Let $A : H \to H$ be a L_A-Lipschitzian and relaxed (c, d)-cocoercive mapping. Let $\{T_i\}_{i=1}^N$ be a finite family of nonexpansive self-mappings of H such that $\Omega = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \bigcap A^{-1}0 \bigcap MEP(F, \varphi) \neq \emptyset$. For all $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, let $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ be such that $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0, 1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ with $0 < \eta_1 \leq \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N, 1]$ with $0 < \eta_N \leq 1$ and $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^N, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^N \subset [0, \theta_2]$ with $0 \leq \theta_2 < 1$. Let S_n be the S-mappings generated by $T_1, T_2, \dots, T_N$ and $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_N^{(n)}$. Assume that either (B1) or (B2) holds and that v is an arbitrary point in H. Let $x_1 \in H$ and $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ be the sequences defined by*

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in H, \\ y_n = u_n - \lambda A u_n, \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

where $0 < \lambda < \frac{2(d - cL_A^2)}{L_A^2}$. Suppose that the following conditions hold:

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *and* $\sum_{n=1}^\infty a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ *and* $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;
(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i} - \alpha_1^{n,i}| = 0$ *for all* $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ *and* $\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}| = 0$ *for all* $j \in \{2, 3, \dots, N\}$.

Then $\{x_n\}$ *converges strongly to* $\overline{x} = P_\Omega v$.

Proof. Put $\lambda = \mu$, $C = H$, $B = A$ and $P_H = I$, we have $A^{-1}0 = VI(H, A)$. In this case, there holds the following:

$$\text{problem } (1.2) \Leftrightarrow \text{problem } (1.3) \Leftrightarrow VI(A, H).$$

Indeed, it is sufficient to show that problem (1.3) $\Rightarrow VI(A, H)$. Suppose that there is $(x^*, y^*) \in H \times H$ such that

$$\begin{cases} \langle \lambda Ay^* + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geq 0, & \forall x \in H, \\ \langle \lambda Ax^* + y^* - x^*, x - y^* \rangle \geq 0, & \forall x \in H. \end{cases}$$

Then we have

$$\begin{cases} x^* = P_H(y^* - \lambda Ay^*), \\ y^* = P_H(x^* - \lambda Ax^*), \end{cases}$$

this is

$$\begin{cases} x^* = y^* - \lambda Ay^*, \\ y^* = x^* - \lambda Ax^*. \end{cases} \tag{4.1}$$

We claim that $x^* = y^*$. Otherwise, from (4.1) it follows that $Ax^* \neq 0$, $Ay^* \neq 0$ and $Ax^* + Ay^* = 0$. Again from (4.1), we obtain

$$\begin{aligned} \|x^* - y^*\|^2 &= \|(y^* - x^*) - \lambda(Ay^* - Ax^*)\|^2 \\ &= \|y^* - x^*\|^2 + \lambda^2\|Ay^* - Ax^*\|^2 \\ &\quad - 2\lambda\langle y^* - x^*, Ay^* - Ax^* \rangle \\ &\leq \|y^* - x^*\|^2 + \lambda^2\|Ay^* - Ax^*\|^2 \\ &\quad - 2\lambda[-c\|Ay^* - Ax^*\|^2 + d\|y^* - x^*\|^2] \\ &= \|y^* - x^*\|^2 + \lambda^2\|Ay^* - Ax^*\|^2 \\ &\quad + 2\lambda c\|Ay^* - Ax^*\|^2 - 2\lambda d\|y^* - x^*\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|y^* - x^*\|^2 + \lambda^2 L_A^2\|y^* - x^*\|^2 \\ &\quad + 2\lambda c L_A^2\|y^* - x^*\|^2 - 2\lambda d\|y^* - x^*\|^2 \\ &= (1 + 2\lambda c L_A^2 - 2\lambda d + \lambda^2 L_A^2)\|y^* - x^*\|^2 \\ &\leq \|y^* - x^*\|^2, \end{aligned}$$

which hence leads to a contradiction. Therefore $x^* = y^*$. Thus, problem (1.3) $\Rightarrow VI(A, H)$. Thus, by Theorem 3.2 we obtain the desired result. $\square$

Recall that the resolvent of the maximal monotone mapping $B : H \to 2^H$ is defined by $J_r^B = (I + rB)^{-1}$ for all $r > 0$, it is known that $F(J_r^B) = B^{-1}0$ and J_r^B is nonexpansive.

Theorem 4.2. *Let H be a real Hilbert space. Let F be a function from $H \times H$ to $\mathbb{R}$ satisfying (A1)-(A5) and $\varphi : H \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ be a proper lower semi-continuous and convex function. Let $A : H \to H$ be a L_A-Lipschitzian and relaxed (c,d)-cocoercive mapping and let $B_1, B_2, \dots, B_N : H \to 2^H$ be maximal monotone mappings such that $\Omega = \bigcap_{i=1}^N B_i^{-1}0 \bigcap A^{-1}0 \bigcap MEP(F,\varphi) \neq \emptyset$. For all $i \in \{1,2,\dots,N\}$ and $r_i > 0$, let $J_{r_i}^{B_i}$ be the resolvents of B_i. For all $j \in \{1,2,\dots,N\}$, let $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ be such that $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ with $0 < \eta_1 \leq \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N, 1]$ with $0 < \eta_N \leq 1$ and $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^N, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^N \subset [0, \theta_2]$ with $0 \leq \theta_2 < 1$. Let S_n be the S-mappings generated by $J_{r_1}^{B_1}, J_{r_2}^{B_2}, \dots, J_{r_N}^{B_N}$ and $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_N^{(n)}$. Assume that either (B1) or (B2) holds and that v is an arbitrary point in H. Let $x_1 \in H$ and $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ be the sequences defined by*

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in H, \\ y_n = u_n - \lambda A u_n, \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

where $0 < \lambda < \frac{2(d - cL_A^2)}{L_A^2}$. Suppose that the following conditions hold:

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ *and* $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i} - \alpha_1^{n,i}| = 0$ *for all* $i \in \{1,2,\dots,N\}$ *and* $\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}| = 0$ *for all* $j \in \{2,3,\dots,N\}$.

Then $\{x_n\}$ converges strongly to $\overline{x} = P_\Omega v$.

Proof. For all $i = 1,2,\dots,N$ and $r_i > 0$, we have $F(J_{r_i}^{B_i}) = B_i^{-1}0$. Putting $P_H = I$ and $T_i = J_{r_i}^{B_i}$ for all $i = 1,2,\dots,N$, by Theorem 4.1, we obtain the desired result. □

Acknowledgement. The author would like to thank Professor Dr. Suthep Suantai and the reviewer for careful reading, valuable comment and suggestions on this paper. This work was supported by Thaksin University in the year 2012. The author also would like to thank the Commission on Higher Education, the Thailand Research Fund, the Centre of Excellence in Mathematics for their financial support.

References

[1] L. C. Ceng, C. Y. Wang and J. C. Yao, Strong convergence theorems by a relaxed extragradient method for a general system of variational inequalities, Math Meth Oper Res 67 (2008) 375–390.

[2] L. C. Ceng, M. M. Wong and A. Latif, Generalized extragradient iterative method for systems of variational inequalities, Journal of Inequalities and Applications 2012 (2012) Doi:10.1186/1029-242X-2012-88.

[3] L. C. Ceng, J. C. Yao, A hybrid iterative scheme for mixed equilibrium problems and fixed point problems, J. Comput. App. Math. 214 (2008) 186–201.

[4] S. S. Chang, H. W. Joseph Lee and C. K. Chan, A new method for solving equilibrium problem fixed point problem and variational inequality problem with application to optimization, Nonlinear Analysis 70 (2009) 3307–3319.

[5] Y. J. Cho, I. K. Argyros and N. Petrot, Approximation methods for common solutions of generalized equilibrium, system of nonlinear variational inequalities and fixed point problems, Computer and Mathematics with Applications 60 (2010) 2292–2301.

[6] K. Goebel, W. A. Kirk, Topics on metric fixed-point theory. Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[7] A. Kangtunyakarn, S. Suantai, Hybrid iterative scheme for generalized equilibrium problems and fixed point problems of finite family of nonexpansive mappings, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 3 (2009) 296–309.

[8] K. R. Kazmi and S. H. Rizvi, A hybrid extragradient method for approximating the common solutions of a variational inequality, a system of variational inequalities, a mixed equilibrium problem and a fixed point problem, Applied Mathematics and Computation 218 (2012) 5439–5452.

[9] G. M. Korpelevich, An extragradient method for finding saddle points and for other problems, Ekon. Mat. Metody 12 (1976) 747–756.

[10] P. Kumam and P. Katchang, A system of mixed equilibrium problems, a general system of variational inequality problems for relaxed cocoercive, and fixed point problems for nonexpansive semigroup and strictly pseudocontractive mappings, Journal of Applied Mathematics 2012 (2012) Doi:10.1155/2012/414831.

[11] M. O. Osilike, D. I. Igbokwe, Weak and strong convergence theorems for fixed points of pseudocontractions and solutions of monotone type operator equations, Comput. Math. Appl. 40 (2000) 559–239.

[12] J. W. Peng, J. C. Yao, Strong convergence theorems of iterative schemes based on extragradient method for mixed equilibrium problems and fixed point problems, Mathematical and Computer Modelling 49 (2009) 1816–1828.

[13] H. Piri, A general iterative method for finding common solutions of system of equilibrium problems, system of variational inequalities and fixed point problems, Mathematical and Computer Modelling 55 (2012) 1622–1638.

[14] S. Plubtieng, R. Punpaeng, A new iterative method for equilibrium problems and fixed point problems of nonexpansive mappings and monotone mappings, Applied Mathematics and Computation 197 (2008) 548–558.

[15] X. Qin, M. Shang and Y. Su, Strong convergence of a general iterative algorithm for equilibrium problems and variational inequality problems, Mathematical and Computer Modelling 48 (2008) 1033–1046.

[16] Y. Shehu, Iterative method for fixed point problem, variational inequality and generalized mixed equilibrium problems with applications, J. Glob. Optim 52 (2012) 57–77.

[17] T. Suzuki, Strong convergence of Krasnoselskii and Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals, J. Math. Anal. Appl. 305 (2005) 227–239.

[18] W. Takahashi and M. Toyoda, Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings, J. Optim. Theory Appl. 118 (2003) 417–428.

[19] R. U. Verma, On a new system of nonlinear variational inequalities and associated iterative algorithms, Math Sci Res Hot-Line 3 (1999) 65–68.

[20] R. Wangkeeree and U. Kamraksa, An iterative approximation method for solving a general system of variational inequality problems and mixed equilibrium problems, Nonlinear Analysis: Hybrid systems 3 (2009) 615–630.

[21] R. Wangkeeree and P. preechasilp, A new iterative scheme for solving the equilibrium problems, variational inequality problems, and fixed point problems in Hilbert spaces, Journal of Applied Mathematics 2012 (2012) Doi:10.1155/2012/154968.

[22] H. K. Xu, Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl. 298 (2004) 279–291.

[23] Y. Yao, Y. J. Cho and Chen, An iterative algorithm for solving fixed point problems, variational inequalities problems and mixed equilibrium problems, Nonlinear Analysis 71 (2009) 3363–3373.

[24] Y. Yao, Y. C. Liou and S. M. Kang, Approach to common elements of variational inequality problems and fixed point problems via a relaxed extragradient method, Computers and Mathematics with Applications 59 (2010) 3472–3480.

[25] Y. Yao, Y. C. Liou, M. M. Wong and J. C. Yao, Strong convergence of a hybrid method for monotone variational inequalities and fixed point problems, Fixed Point Theory and Applications 2011 (2011) Doi: 101186/1687-1812-2011-53.

Received: September, 2012

2. รายงานความก้าวหน้าโครงการวิจัย งวดที่ 1

แบบ TSURD-2

มหาวิทยาลัยทักษิณ

รายงานความก้าวหน้าโครงการวิจัย

งวดที่ 1 ปีงบประมาณ พ.ศ. 2555

รหัสโครงการ......................

(สำหรับเจ้าหน้าที่)

---

1. ชื่อโครงการ

(ไทย) ระเบียบวิธีการประมาณค่าสำหรับปัญหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่เชิงเส้นและปัญหาอสมการการแปรผัน

(อังกฤษ) Approximation Method for Common Fixed Point Problems of Nonlinear Mappings and Variational Inequality Problems

2. จำนวนเงินอุดหนุน 120,000 **บาท ปีงบประมาณ พ.ศ. 2555**

จาก ☑ **งบประมาณแผ่นดิน** ☐ **งบประมาณเงินรายได้**

3. ชื่อหัวหน้าโครงการ อาจารย์ ดร.สุวิชา อิ่มนาง

ตำแหน่ง อาจารย์

สังกัดภาควิชา/งาน สาขาคณิตศาสตร์และสถิติ

คณะ/สถาบัน/สำนัก/สำนักงาน คณะวิทยาศาสตร์

โทรศัพท์ 0858708598 โทรสาร.........-......... E-mail: suwicha.n@hotmail.com

4. ระยะเวลาของโครงการ

เริ่มโครงการวิจัยเมื่อ/ เดือน 1 กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2555

สิ้นสุดระยะเวลาตามโครงการวิจัย/เดือน 31 มกราคม พ.ศ. 2556

5. เป้าหมายของโครงการวิจัย ณ งวดที่รายงาน

โครงการวิจัยในช่วง 6 เดือนแรกมีเป้าหมายที่สำคัญ 3 ประการ ดังต่อไปนี้ ประการแรก สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำแบบใหม่เพื่อหาผลเฉลยร่วมของปัญหาอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต ประการที่สองหาเงื่อนไขของการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาอสมการการแปรผันและปัญหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่ขยาย และประการสุดท้ายพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาอสมการการแปรผันและปัญหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต

6. ความก้าวหน้าของการวิจัย ณ งวดที่รายงานเมื่อเทียบกับเป้าหมาย

ผลงาน/กิจกรรม	ผู้รับผิดชอบ	กำหนดการ (เดือน)											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1. รวบรวมและศึกษาเอกสารงานวิจัย หนังสือ บทความที่เกี่ยวข้องกับปัญหาวิจัย	ดร.สุวิชา อิ่มนาง												
2. สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าสู่คำตอบของอสมการการแปรผันและปัญหาจุดตรึง	ดร.สุวิชา อิ่มนาง												
3. พิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้มของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างโดยข้อ 2 สู่คำตอบของปัญหาอสมการการแปรผันและปัญหาจุดตรึง	ดร.สุวิชา อิ่มนาง												
4. เขียนเอกสารงานวิจัยและส่งตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติและรายงานความก้าวหน้าของโครงการใน รอบ 6 เดือนหลังต่อมหาวิทยาลัย													

แผนงานวิจัยทั้งโครงการที่วางไว้

ผลงานวิจัยที่ดำเนินจนถึงปัจจุบัน

ผลงานที่ได้ และที่คาดว่าจะสำเร็จ

- ผลงานที่ได้จากการวิจัยที่ผ่านมา มีดังนี้
  1) ได้ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบใหม่เพื่อหาผลเฉลยร่วมของปัญหาอสมการการแปรผันและปัญหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่ขยาย
  2) ได้เงื่อนไขการลู่เข้าสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาอสมการการแปรผันและปัญหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่ขยาย
  3) ได้ทฤษฎีบทการลู่เข้าสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาอสมการการแปรผันและปัญหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่ขยาย
- ผลงานที่คาดว่าจะสำเร็จต่อไป มีดังนี้
  1) ผลงานได้รับการตีพิมพ์ในวารสาร Applied Mathematical Sciences
  2) ผลงานได้รับการอ้างอิง(citation)จากวารสารวิชาการทางคณิตศาสตร์
  3) บุคลากรในสาขาวิชาคณิตศาสตร์มีความสนใจทำงานวิจัยในปัญหาจุดตรึงและการประยุกต์เพิ่มขึ้น

7. รายละเอียดทางวิชาการที่ได้รับจากการวิจัย

โครงการวิจัยนี้ผู้วิจัยศึกษาการหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของปัญหาอสมการการแปรผัน ปัญหาสมดุลผสมและปัญหาจุดตรึงของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย (nonexpansive mappint) ในปริภูมิฮิลเบิร์ต ระบบปัญหาอสมการการแปรผันคือการหาผลเฉลย $(x^*, y^*) \in C \times C$ ของระบบปัญหา

$$\begin{cases} \langle \lambda Ay^* + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C \\ \langle \mu Bx^* + y^* - x^*, x - y^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C \end{cases} \tag{1}$$

เมื่อ C เป็นเซตย่อยของปริภูมิฮิลเบิร์ต H และเรียกระบบปัญหา (1) ว่า "**ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน** (general system of variational inequalities)" ขั้นตอนการหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน (1) และปัญหาจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายโดยศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำของลำดับ $\{x_n\}$ ดังนี้

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \dfrac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu Bu_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n P_C(y_n - \lambda Ay_n), \quad n \geq 1 \end{cases} \tag{2}$$

ซึ่งเป็นระเบียบวิธีทำซ้ำแบบใหม่เพื่อหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของปัญหาอสมการการแปรผัน ปัญหาสมดุลผสมและปัญหาจุดตรึงของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย (nonexpansive mappint) ในปริภูมิฮิลเบิร์ต จากการวิจัยได้พบว่าระเบียบวิธีทำซ้ำ (2) ลู่เข้าสู่ผลเฉลยของปัญหาทางคณิตศาสตร์อีกหนึ่งปัญหาซึ่งเรียกว่า"**ปัญหาสมดุล** (equilibrium problem)" จากอสมการที่ (2) พบว่า ถ้า $F = \varphi = 0,\ S_n = T$ และ $r_n = 1$ จะได้ว่า $u_n = x_n$ ดังนั้นระเบียบวิธีทำซ้ำ (2) ได้ลดรูปเป็นระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาโดย Ceng et al. ที่กำหนดดังนี้

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \mu B x_n), \\ x_{n+1} = a_n v + (1-a_n) T P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \ge 1 \end{cases}$$

จากการวิจัยได้ทฤษฎีบทและองค์ความรู้ใหม่ที่สำคัญดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 ให้ C เป็นเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์ของปริภูมิฮิวเบิร์ต H กำหนดให้ $F: C \times C \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องเงื่อนไข $(A1)-(A5)$ และ $\varphi: C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ เป็น proper lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ กำหนด $\lambda, \mu > 0$ และ $A: C \to H$ เป็นฟังก์ชันประเภท $L_A - Lipschitzian$ และ $relaxed\ (c,d) - cocoercive$ และ $B: C \to H$ เป็นฟังก์ชันประเภท $L_B - Lipschitzian$ และ $relaxed\ (c',d') - cocoercive$ ให้ $\{T_i\}_{i=1}^N$ เป็นวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายโดยที่ $\Omega = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \cap GVI(C,A,B) \cap MEP(F,\varphi) \neq \phi$ สำหรับแต่ละ $j \in \{1,2,\ldots,N\}$ กำหนดให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ โดยที่ $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ ซึ่ง $0 < \eta_1 \le \theta_1$ และ $\{\alpha_1^{n,N}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_N, 1]$ โดยที่ $0 < \eta_N \le 1$ และ $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^{N} \subset [0, \theta_2]$ ซึ่ง $0 \le \theta_2 < 1$ กำหนดให้ S_n เป็น S-ฟังก์ชัน ที่ก่อกำเนิดโดยฟังก์ชัน $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ สมมุติเงื่อนไข $(B1)$ หรือ $(B2)$ เป็นจริง และ $v \in C$ กำหนดลำดับ $\{x_n\}, \{y_n\}$ และ $\{u_n\}$ โดยสมการ

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \dfrac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \ge 0 \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \ge 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\{a_n\}, \{b_n\} \subset [0,1], 0 < \lambda < \dfrac{2(d - cL_A^2)}{L_A^2}$ และ $0 < \mu < \dfrac{2(d' - c'L_B^2)}{L_B^2}$ ถ้าสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ และ $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i} - \alpha_1^{n,i}| = 0;\ \forall i \in \{1,2,\ldots,N\}$ และ $\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}| = 0;\ \forall j \in \{2,3,\ldots,N\}$

แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\bar{x} = P_\Omega v$ และ $(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (1) เมื่อ $\bar{y} = P_\Omega(\bar{x} - \mu B \bar{x})$

ถ้าฟังก์ชัน $A = B$ ในทฤษฎีบทที่ 1 จะได้บทแทรกที่สำคัญตามมาดังนี้

<u>บทแทรก 2</u> ให้ C เป็นเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์ของปริภูมิฮิวเบิร์ต H กำหนดให้ $F : C \times C \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องเงื่อนไข $(A1)-(A5)$ และ $\varphi : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ เป็น proper lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ กำหนด $\lambda, \mu > 0$ และ $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชันประเภท $L_A - Lipschitzian$ และ $relaxed\ (c,d) - cocoercive$ ให้ $\{T_i\}_{i=1}^{N}$ เป็นวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายโดยที่ $\Omega = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \cap \Phi \cap MEP(F,\varphi) \neq \phi$ สำหรับแต่ละ $j \in \{1,2,...,N\}$ กำหนดให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ โดยที่ $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ ซึ่ง $0 < \eta_1 \le \theta_1$ และ $\{\alpha_1^{n,N}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_N, 1]$ โดยที่ $0 < \eta_N \le 1$ และ $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^{N} \subset [0, \theta_2]$ ซึ่ง $0 \le \theta_2 < 1$ กำหนดให้ S_n เป็น S - ฟังก์ชัน ที่ก่อกำเนิดโดยฟังก์ชัน $T_1, T_2, ..., T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, ..., \alpha_N^{(n)}$

สมมุติเงื่อนไข $(B1)$ หรือ $(B2)$ เป็นจริง และ $v \in C$ กำหนดลำดับ $\{x_n\}, \{y_n\}$ และ $\{u_n\}$ โดยสมการ

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \dfrac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \ge 0 \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu A u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \ge 1 \end{cases}$$

เมื่อ $0 < \lambda, \mu < \dfrac{2(d - cL_A^2)}{L_A^2}$ ถ้า $\{a_n\}, \{b_n\}, \{r_n\}, \{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N}$, สอดคล้องเงื่อนไขในทฤษฎีบทที่ 1 แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\bar{x} = P_\Omega v$

ถ้า $N = 1, T_1 = S, \varphi = 0$ และ $\alpha_2^{n,1}, \alpha_3^{n,1} = 0 \ \ \forall n \in \mathrm{N}$ ในทฤษฎีบทที่ 1 จะได้บทแทรกที่สำคัญตามมาดังนี้

<u>บทแทรก 3</u> ให้ C เป็นเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์ของปริภูมิฮิวเบิร์ต H กำหนดให้ $F : C \times C \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องเงื่อนไข $(A1)-(A5)$ กำหนด $\lambda, \mu > 0$ และ $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชันประเภท $L_A - Lipschitzian$ และ $relaxed\ (c,d) - cocoercive$ และ $B : C \to H$ เป็นฟังก์ชันประเภท $L_B - Lipschitzian$ และ $relaxed\ (c',d') - cocoercive$ ให้ S เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายซึ่งทำให้ $\Omega = F(S) \cap GVI(C,A,B) \cap EP(F) \neq \phi$

สมมุติเงื่อนไข $(B1)$ หรือ $(B2)$ เป็นจริง และ $v \in C$ กำหนดลำดับ $\{x_n\}, \{y_n\}$ และ $\{u_n\}$ โดยสมการ

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \dfrac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \ge 0 \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \ge 1 \end{cases}$$

ถ้า $\lambda, \mu, \{a_n\}, \{b_n\}, \{r_n\}$, สอดคล้องเงื่อนไขในทฤษฎีบทที่ 1 แล้ว แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\bar{x} = P_\Omega v$ และ $(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (1) เมื่อ $\bar{y} = P_\Omega(\bar{x} - \mu B \bar{x})$

8. งานสำเร็จตามเป้าหมายที่เสนอไว้หรือไม่ (ถ้าไม่เพราะเหตุใด)

จากการวิจัยในช่วง 6 เดือนแรกผลงานวิจัยได้บรรลุตามเป้าหมายที่วางไว้

9. อุปสรรคหรือปัญหา

ไม่มี

10. แนวทางในการแก้ไขปัญหาและอุปสรรค

ไม่มี

11. รายการครุภัณฑ์ที่จัดซื้อเรียบร้อยแล้ว (ในกรณีที่มีครุภัณฑ์)

ไม่มี

12. รายละเอียดงบประมาณ (ระบุรายละเอียดในแต่ละหมวดอย่างชัดเจนตามแบบรายงานการใช้เงิน)

งบประมาณที่ได้รับทั้งโครงการ เป็นจำนวนเงิน 120,000 บาท

งบประมาณที่ได้รับงวดที่ 1 (งวดก่อนหน้าที่รายงานนี้) เป็นจำนวนเงิน 60,000 บาท

รายการค่าใช้จ่าย	งบประมาณโครงการ	เบิกใช้จ่ายในโครงการไปแล้ว	ยอดคงเหลือ
ค่าปฏิบัติงานนอกราชการ (วันราชการ)	6,000	60,00	0
ค่าพาหนะในการเดินทางเพื่อค้นเอกสาร ค่าเบี้ยเลี้ยง ค่าเช่าที่พัก	15,000	15,000	0
ค่าเดินทางเพื่อพบนักวิจัยที่ปรึกษา ค่าเช่าที่พัก	15,000	15,000	0
ค่าเดินทางเข้าร่วมประชุมวิชาการ	10,000	10,000	0
ค่าตอบแทนที่ปรึกษาโครงการ	2,000	2,000	0
ค่าหนังสือ วารสารและถ่ายเอกสาร	12,000	12,000	0
รวม	60,000	60,000	0

13. สรุปผลงานการวิจัยที่ได้ดำเนินการมาแล้ว

การวิจัยในช่วง 6 เดือนแรกได้ผลสรุป 3 ประการ ดังต่อไปนี้
ประการแรกได้ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบใหม่เพื่อหาผลเฉลยร่วมของปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ตและปัญหาจุดตรึงของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้น ประการที่สองได้เงื่อนไขของการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาอสมการการแปรผันและปัญหาจุดตรึงของการส่งแบบไม่เชิงเส้น และประการสุดท้ายได้ทฤษฎีบทการลู่เข้าสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาอสมการการแปรผันและปัญหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่เชิงเส้นในปริภูมิฮิลเบิร์ต

ผลงานวิจัยที่ได้ดำเนินการมาแล้วคิดเป็นร้อยละ 70 **ของงานวิจัยตลอดโครงการ**

14. คาดว่าจะส่งรายงานวิจัยได้ภายในเดือน มกราคม พ.ศ. 2556

15. รายงานความก้าวหน้านี้เมื่อวันที่ 17 เดือน กันยายน พ.ศ. 2555

(ลงชื่อ)...หัวหน้าโครงการ

(อาจารย์ ดร. สุวิชา อิ่มนาง)

3. แบบสัญญารับทุนอุดหนุนการวิจัย

แบบ TSURD-1/แผ่นดิน/เดี่ยว/ปีเดียว

สัญญาเลขที่ ง 3 / 2555

(สำหรับเจ้าหน้าที่)

แบบสัญญารับทุนอุดหนุนการวิจัยจากงบประมาณแผ่นดิน
มหาวิทยาลัยทักษิณ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2555

****

สัญญาทำที่ มหาวิทยาลัยทักษิณ

วันที่ 16 เดือน มกราคม พ.ศ. 2555

สัญญานี้ทำขึ้นระหว่างมหาวิทยาลัยทักษิณ โดย รองศาสตราจารย์ ดร. ประมาณ เทพสงเคราะห์ ตำแหน่ง รองอธิการบดี ปฏิบัติหน้าที่แทนอธิการบดีมหาวิทยาลัยทักษิณ ซึ่งต่อไปสัญญานี้เรียกว่า "ผู้ให้ทุน" ฝ่ายหนึ่ง กับ นาย/~~นาง/นางสาว~~ สุจิตรา อิ่มนาง ตำแหน่ง อาจารย์ สังกัดภาควิชา/ฝ่าย คณิตศาสตร์และสถิติ คณะ/สำนัก/สถาบัน/วิทยาลัย วิทยาศาสตร์ อยู่บ้านเลขที่ 235 หมู่ 14 ซอย - ถนน - ตำบล กุดดู่ อำเภอ โนนสัง จังหวัด หนองบัวลำภู ในฐานะหัวหน้าโครงการวิจัย ซึ่งต่อไปในสัญญานี้เรียกว่า "ผู้รับทุน" อีกฝ่ายหนึ่ง คู่สัญญาได้ตกลงกันต่อไปนี้

ข้อ 1. ผู้ให้ทุนตกลงให้ทุนอุดหนุนการวิจัยจากงบประมาณแผ่นดิน มหาวิทยาลัยทักษิณ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2555 จำนวน 120,000 บาท (หนึ่งแสนสองหมื่นบาทถ้วน) โดยมีระยะเวลาดำเนินการ 1 ปี 0 เดือน (ตั้งแต่วันที่ 1 เดือน กุมภาพันธ์ พ.ศ. 2555 ถึงวันที่ 31 เดือน มกราคม พ.ศ. 2556) เพื่อทำการวิจัยเรื่อง

ชื่อโครงการ(ภาษาไทย) ระเบียบวิธีการประมาณค่าสำหรับปัญหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่เชิงเส้นและปัญหาอสมการการแปรผัน

ชื่อโครงการ(ภาษาอังกฤษ) Approximation Method for Common Fixed Point Problems of Nonlinear Mappings and Variational Inequality Problems

โดยผู้ให้ทุนจะจ่ายให้แก่ผู้รับทุนเป็น 3 งวด ดังรายละเอียดดังนี้

งวดที่ 1 อัตราร้อยละ 50 ของงบดำเนินการทั้งโครงการ (โดยหักเงินค่าครุภัณฑ์ออกจากเงินอุดหนุนทั้งโครงการไปดำเนินการตามข้อ 2.) เป็นเงินไม่เกิน 60,000 บาท (หกหมื่นบาทถ้วน) เมื่อผู้รับทุนจัดทำสัญญารับทุนเรียบร้อยแล้ว และผู้รับทุนจะต้องไม่ค้างส่งรายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์ของโครงการวิจัยที่ได้รับทุนในปีที่ผ่านๆมาซึ่งสิ้นสุดระยะเวลาดำเนินการวิจัยแล้ว

งวดที่ 2 อัตราร้อยละ 40 ของงบดำเนินการทั้งโครงการ เป็นเงินไม่เกิน 48,000 บาท (สี่หมื่นแปดพันบาทถ้วน) ผู้ให้ทุนจะจ่ายให้ภายหลังจากผู้รับทุนได้ส่งรายงานความก้าวหน้าของโครงการวิจัย เมื่อได้ดำเนินการวิจัยตามแผนงานคิดได้เป็นร้อยละ 60 ของการดำเนินการวิจัยทั้งหมดของโครงการ และรายงานความก้าวหน้าดังกล่าวต้องผ่านการอนุมัติจากมหาวิทยาลัยแล้ว

งวดที่ 3 อัตราร้อยละ 10 ของงบดำเนินการทั้งโครงการ เป็นเงินไม่เกิน........12000........บาท (........หนึ่งหมื่นสองพันบาทถ้วน........) ผู้ให้ทุนจะจ่ายให้ภายหลังจากผู้รับทุนได้ส่งรายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์ที่ผ่านการประเมินคุณภาพจากผู้ทรงคุณวุฒิ และเอกสารตาม ข้อ 8 เรียบร้อยแล้ว

ข้อ 2. กรณีที่โครงการวิจัยมีงบประมาณค่าครุภัณฑ์ ให้ดำเนินการจัดซื้อครุภัณฑ์ตามระเบียบสำนักนายกรัฐมนตรีว่าด้วยพัสดุ และให้ลงทะเบียนครุภัณฑ์ไว้ที่หน่วยงานระดับคณะ/ภาควิชา/กลุ่มงาน ทั้งนี้ให้ดำเนินการหักเงินค่าครุภัณฑ์ออกจากจำนวนเงินของงบประมาณทั้งจำนวน

ข้อ 3. การเปลี่ยนแปลงใดๆ เกี่ยวกับรายละเอียดโครงการที่ได้รับอนุมัติแล้ว เช่น การเปลี่ยนแปลงนักวิจัยในโครงการ การเปลี่ยนแปลงการดำเนินงานโครงการ การขยายเวลาดำเนินการ การยุติโครงการ หรืออื่นๆ ให้ผู้รับทุนเสนอขอความเห็นชอบจากคณะ/หน่วยงานต้นสังกัด เพื่อเสนอมหาวิทยาลัยอนุมัติก่อนดำเนินการ

ข้อ 4. ผู้รับทุนจะต้องปฏิบัติตามประกาศมหาวิทยาลัยทักษิณ เรื่อง หลักเกณฑ์และวิธีการขอรับเงินอุดหนุนโครงการวิจัยจากงบประมาณเงินแผ่นดิน และระเบียบ/ กฎ/เกณฑ์/แนวปฏิบัติอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกับการวิจัยของมหาวิทยาลัยทักษิณ หรือที่อาจจะกำหนดขึ้นในภายหน้า

ข้อ 5. ผู้รับทุนจะดำเนินการด้วยความวิริยะอุตสาหะ ให้การวิจัยเสร็จได้ผลสมความมุ่งหมายของผู้ให้ทุน หากเกิดอุปสรรคไม่สามารถทำการวิจัยได้ด้วยประการใดก็ดี ผู้รับทุนจะรีบรายงานให้ผู้ให้ทุนทราบทันที เพื่อพิจารณาหาทางแก้ไข หรือดำเนินการตามที่เห็นสมควรต่อไป

ข้อ 6. ผู้รับทุนจะควบคุมการใช้เงินทุนให้เป็นไปอย่างประหยัดและจัดเตรียมหลักฐานบัญชีการจ่ายเงิน เพื่อให้ผู้ให้ทุนตรวจสอบได้ทุกโอกาส

ข้อ 7. ผู้รับทุนจะใช้และบำรุงรักษาครุภัณฑ์การวิจัยของผู้ให้ทุน ให้อยู่ในสภาพดีใช้งานได้อยู่เสมอ และผู้รับทุนยินยอมให้ผู้ให้ทุนหรือผู้ที่ได้รับมอบหมายจากผู้ให้ทุนตรวจสอบครุภัณฑ์การวิจัยซึ่งเป็นทรัพย์สินของผู้ให้ทุนได้ทุกขณะและทุกโอกาส และเมื่อเสร็จสิ้นการวิจัยตามโครงการแล้ว ผู้รับทุนจะส่งคืนครุภัณฑ์การวิจัยให้แก่ผู้ให้ทุนทันที

ข้อ 8. ผู้รับทุนยินยอมให้คณะกรรมการติดตามและประเมินผลที่มหาวิทยาลัยแต่งตั้ง ตรวจสอบความก้าวหน้าของโครงการและรายงานการปฏิบัติงานและการใช้จ่ายทุนวิจัยได้ทุกเมื่อตามที่มหาวิทยาลัยกำหนด และเมื่องานวิจัยเสร็จสมบูรณ์ตามโครงการแล้วจะต้องดำเนินการนำส่งเอกสารดังต่อไปนี้

8.1 รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์ จำนวน 10 ชุด พร้อมแผ่นบันทึกข้อมูล จำนวน 1 แผ่น (นักวิจัยจัดส่ง "ร่าง" รายงานวิจัยให้สถาบันวิจัยและพัฒนา จำนวน 1 ชุด เพื่อประเมินคุณภาพก่อนจัดทำรายงานวิจัยฉบับจริง)

8.2 ผลงานที่นำเสนอในที่ประชุมวิชาการและเสนอผลงานวิจัยประจำปีของมหาวิทยาลัยทักษิณ จำนวน 2 ชุด

8.3 ผลงานตีพิมพ์บทความวิจัยลงในวารสารระดับชาติที่มีผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบเป็นอย่างต่ำ หรือ ผลงานในรูปแบบอื่น เช่น หนังสือรับรองการนำไปใช้ประโยชน์จากหน่วยงาน/ชุมชน เอกสารการยื่นจดสิทธิบัตร หรือ อนุสิทธิบัตร จำนวน 2 ชุด

8.4 รายงานสรุปค่าใช้จ่ายโครงการวิจัย จำนวน 1 ชุด ภายในระยะเวลา 1 เดือน หลังจากส่งรายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์เรียบร้อยแล้ว ทั้งนี้ให้ผู้รับทุนเก็บหลักฐานการใช้จ่ายงบประมาณโครงการวิจัยเป็นเวลา 10 ปี เพื่อการตรวจสอบจากมหาวิทยาลัยและสำนักงานตรวจเงินแผ่นดิน

ข้อ 9. ผู้รับทุนจะต้องเผยแพร่ผลงานวิจัย หลังสิ้นสุดโครงการวิจัยในที่ประชุมวิชาการและเสนอผลงานวิจัยของมหาวิทยาลัยทักษิณ

ข้อ 10. ผู้รับทุนจะต้องเผยแพร่ผลงานวิจัย โดยตีพิมพ์บทความวิจัยลงในวารสารวิชาการระดับชาติที่มีผู้ทรงคุณวุฒิตรวจสอบ เป็นอย่างต่ำ หรือดำเนินการนำผลการวิจัยยื่นขอจดทะเบียนสิทธิบัตรหรืออนุสิทธิบัตร

ข้อ 11. กรรมสิทธิ์ในผลงานวิจัย เป็นกรรมสิทธิ์ของผู้ให้ทุน ส่วนผลประโยชน์ซึ่งเกิดจากการนำผลการวิจัยไปใช้ในเชิงพาณิชย์ให้แบ่งกันระหว่างมหาวิทยาลัยทักษิณกับผู้ทำวิจัย

ข้อ 12. ในการเผยแพร่ข้อมูลข่าวสารอันเกี่ยวกับผลงานวิจัยในสิ่งพิมพ์ใดหรือสื่อใดในแต่ละครั้ง ผู้รับทุนต้องระบุข้อความแสดงกิตติกรรมประกาศมหาวิทยาลัยทักษิณ ที่ให้ทุนอุดหนุนการวิจัยนี้ หรือระบุข้อความ "**ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากมหาวิทยาลัยทักษิณ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2555**" ด้วยทุกครั้ง

ข้อ 13. ในกรณีที่ผู้ร่วมวิจัยหลายคน ผู้รับทุนจะต้องเป็นผู้ตรวจสอบดูแลผู้ร่วมวิจัยทุกคนให้ปฏิบัติตามระเบียบ กฎเกณฑ์ ข้อกำหนดของมหาวิทยาลัยทักษิณ ที่เกี่ยวข้องของผู้ให้ทุนอย่างเคร่งครัด

ข้อ 14. หากผู้รับทุนผิดสัญญาข้อหนึ่งข้อใดข้างต้น ผู้รับทุนยินยอมให้ผู้ให้ทุนบอกเลิกสัญญาและยินยอมชดใช้เงินทุนรวมทั้งดอกผล ตลอดจนครุภัณฑ์การวิจัย ซึ่งจัดซื้อโดยเงินอุดหนุนนี้คืนแก่ผู้ให้ทุนทั้งหมด หรือยินยอมชดใช้เงินทุนโดยอนุญาตให้หักจากเงินเดือนของผู้รับทุน

ในกรณีที่ผู้รับทุนไม่สามารถทำวิจัยต่อไปได้ หรือไม่อาจทำให้แล้วเสร็จได้ และประสงค์จะขอยุติการวิจัยตามโครงการที่รับเงินอุดหนุน ผู้รับทุนต้องยื่นคำร้องต่อผู้ให้ทุน และถือว่าผู้รับทุนผิดสัญญา จะต้องรับผิดตามความในวรรคหนึ่งด้วย

ในกรณีผู้ให้ทุนพิจารณาเห็นว่า การทำการวิจัยของผู้รับทุนจะล่าช้าเกินกว่าระยะเวลาที่กำหนดตามสัญญานี้ หรือจะเนิ่นนานกว่าระยะเวลาตามโครงการที่กำหนด หรือการวิจัยตามโครงการของผู้รับทุนจะไม่เป็นประโยชน์ต่อผู้ให้ทุนอีกต่อไป ผู้ให้ทุนมีสิทธิบอกเลิกสัญญา และผู้รับทุนต้องรับผิดตามความในวรรคหนึ่งด้วย

ข้อ 15. ผู้ให้ทุนมีสิทธิที่จะจัดให้มีการตรวจสอบข้อเท็จจริงและติดตามความก้าวหน้าของการดำเนินการตามโครงการของผู้รับทุน ในระยะเวลาตามที่เห็นความจำเป็น และหากพบว่ามีการดำเนินการใดที่แตกต่างไปจากข้อตกลงของสัญญานี้ ผู้ให้ทุนทรงไว้ซึ่งสิทธิที่จะบอกเลิกสัญญานี้และดำเนินการตามสัญญาข้อ 14.

สัญญานี้ทำขึ้น 2 ฉบับ มีข้อความตรงกัน คู่สัญญาได้อ่าน และเข้าใจข้อความในสัญญานี้โดยตลอดแล้ว จึงได้ลงลายมือชื่อไว้เป็นสำคัญต่อหน้าพยานของแต่ละฝ่ายและต่างเก็บไว้ฝ่ายละฉบับ

(ลงชื่อ)...ผู้ให้ทุน
(รองศาสตราจารย์ ดร.ประมาณ เทพสงเคราะห์)
รองอธิการบดี ปฏิบัติหน้าที่แทน
อธิการบดีมหาวิทยาลัยทักษิณ

(ลงชื่อ)...ผู้รับทุน
(.....อ.ดร. สุจิชา อิ่มทอง.....)
หัวหน้าโครงการ

(ลงชื่อ).......ผศ.ดร.นุกูล อินทระสังขา.......พยาน
(.......คณะ.......)
คณบดี / ผู้อำนวยการ

(ลงชื่อ)...พยาน
(รองศาสตราจารย์ เกษม อัศวตรีรัตนกุล)
ผู้อำนวยการสถาบันวิจัยและพัฒนา

4. แบบเสนอโครงการวิจัย

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ

แบบ ว-1ด

(ฉบับปรับปรุงปี พ.ศ. 2553)

แบบเสนอโครงการวิจัย (research project)

ประกอบการเสนอของบประมาณ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2555 ตามมติคณะรัฐมนตรี

ชื่อโครงการวิจัย (ภาษาไทย) ระเบียบวิธีการประมาณค่าสำหรับปัญหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่เชิงเส้นและปัญหาอสมการการแปรผัน

(ภาษาอังกฤษ) Approximation Method for Common Fixed Point Problems of Nonlinear Mappings and Variational Inequality Problems

<u>ส่วน ก</u> : ลักษณะโครงการวิจัย

✓ โครงการวิจัยใหม่

○ โครงการวิจัยต่อเนื่องระยะเวลา....ปี ปีนี้เป็นปีที่..... รหัสโครงการวิจัย.................

I ระบุความสอดคล้องของโครงการวิจัยกับยุทธศาสตร์การพัฒนาประเทศตามแผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ ฉบับที่ 11 (พ.ศ. 2555-2559) -

II ระบุความสอดคล้องของโครงการวิจัยกับนโยบายและยุทธศาสตร์การวิจัยของชาติ (พ.ศ. 2555-2559) (กรุณาระบุความสอดคล้องเพียง 1 ยุทธศาสตร์ 1 กลยุทธ์ และ 1 แผนงานวิจัย ที่มีความสอดคล้องมากที่สุด โดยโปรดดูรายละเอียดในผนวก 2)

- ยุทธศาสตร์การวิจัยที่ 3 การสร้างศักยภาพและความสามารถเพื่อการพัฒนาทางวิทยาการและทรัพยากรบุคคล

- กลยุทธ์การวิจัยที่ 1 พัฒนานวัตกรรมและองค์ความรู้ใหม่ทางวิทยาศาสตร์ ทางสังคมศาสตร์ และการพัฒนาองค์ความรู้ใหม่ในวิทยาการต่าง ๆ

- แผนงานวิจัยที่ 1.1 การวิจัยและพัฒนาเกี่ยวกับนวัตกรรมสิ่งประดิษฐ์และองค์ความรู้ใหม่ทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

III ระบุความสอดคล้องของโครงการวิจัยกับกลุ่มเรื่องที่ควรวิจัยเร่งด่วนตามนโยบายและยุทธศาสตร์การวิจัยของชาติ (พ.ศ. 2555-2559) (โปรดดูรายละเอียดในผนวก 2)

- นโยบายการปฏิรูปการศึกษาและสร้างสรรค์การเรียนรู้

IV ระบุความสอดคล้องของโครงการวิจัยกับนโยบายรัฐบาล (กรุณาระบุความสอดคล้องเพียง 1 หัวข้อที่มีความสอดคล้องมากที่สุด โดยโปรดดูรายละเอียดในผนวก 3)

- นโยบายระยะการบริหารราชการ 3 ปี ของรัฐบาล : นโยบายสังคมและคุณภาพชีวิต หัวข้อย่อย นโยบายการศึกษา

<u>ส่วน ข</u> : องค์ประกอบในการจัดทำโครงการวิจัย

1. ผู้รับผิดชอบ

1.1. หัวหน้าโครงการ

ชื่อ - นามสกุล (ภาษาไทย) ดร.สุวิชา อิ่มนาง

ชื่อ - นามสกุล (ภาษาอังกฤษ) Dr. Suwicha Imnang

คุณวุฒิ Ph.D (Mathematics)

ตำแหน่งทางวิชาการ อาจารย์

สถานที่ทำงาน สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ จังหวัดพัทลุง รหัสไปรษณีย์ 93110

โทรศัพท์ 074-693972 ต่อ 2579 โทรสาร –

โทรศัพท์มือถือ 085-8708598, email: suwicha.n@hotmail.com

บทบาทในการทำวิจัย

1. รวบรวมเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาวิจัย
2. สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อหาคำตอบของปัญหาวิจัย
3. นำเสนอผลงานวิจัยในงานประชุมวิชาการในหัวข้อที่เกี่ยวข้องกับปัญหาวิจัย
4. ร่วมเสวนาและอภิปรายปัญหาวิจัยกับนักวิจัยที่ปรึกษา
5. สรุปผลและจัดทำรายงานการวิจัย

สัดส่วนที่ทำการวิจัย 60%

1.2. ผู้ร่วมโครงการ

ชื่อ นามสกุล นางสาวอรจิรา สิทธศักดิ์

ชื่อ - นามสกุล (ภาษาอังกฤษ) Dr. Onjira Sitthisak

คุณวุฒิ Ph.D (Computer Sciences)

ตำแหน่งทางวิชาการ อาจารย์

สถานที่ทำงาน สาขาวิชาคอมพิวเตอร์และเทคโนโลยีสารสนเทศ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ จังหวัดพัทลุง รหัสไปรษณีย์ 93110

โทรศัพท์ 074-693972 ต่อ 2576 โทรสาร –

โทรศัพท์มือถือ 08-74918318, email: on_ja@hotmail.com

บทบาทในการทำวิจัย

1. รวบรวมเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาวิจัย
2. นำปัญหาวิจัยไปประยุกต์กับปัญหาทางคอมพิวเตอร์

3. ร่วมนำเสนอผลงานวิจัยในงานประชุมวิชาการในหัวข้อที่เกี่ยวข้องกับปัญหาวิจัย
4. ร่วมเสวนาและอภิปรายปัญหาวิจัยกับนักวิจัยที่ปรึกษา
5. จัดทำเอกสารงานวิจัยและรายงานความก้าวหน้าของโครงการ

สัดส่วนที่ทำการวิจัย 40%

1.3. ที่ปรึกษาโครงการ

ชื่อ นามสกุล ศาสตราจารย์ ดร.สุเทพ สวนใต้
คุณวุฒิ Ph.D (Mathematics)
ตำแหน่งทางวิชาการ ศาสตราจารย์
สถานที่ทำงาน ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
โทรศัพท์ 053 – 943327

2. ประเภทการวิจัย

การวิจัยพื้นฐาน (basic research)

3. สาขาวิชาการและกลุ่มวิชาที่ทำการวิจัย

สาขาวิทยาศาสตร์กายภาพและคณิตศาสตร์

4. คำสำคัญ (keywords) ของโครงการวิจัย

(ภาษาไทย) ปัญหาจุดตรึง, จุดตรึงร่วม, การส่งแบบไม่เชิงเส้น, ปัญหาอสมการการแปรผัน, ขั้นตอนวิธี

(ภาษาอังกฤษ) Fixed point problems, Common fixed point, Nonlinear mapping, Variational inequality problem, Algorithm

5. ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

ปัจจุบันทฤษฎีบทจุดตรึง (fixed point theory) นับว่ามีบทบาทสำคัญอย่างมาก ต่อการพัฒนาความก้าวหน้าทางวิชาการในด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีสมัยใหม่ อันเป็นพื้นฐานสำคัญในการพัฒนาประเทศ ทฤษฎีบทจุดตรึง นอกจากนักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจแล้ว นักวิทยาศาสตร์สาขาอื่นยังได้นำทฤษฎีบทจุดตรึงไปประยุกต์ใช้ ตัวอย่างเช่น นักคอมพิวเตอร์ได้นำไปประยุกต์กับการสร้างโครงข่ายประสาทเทียม (artificial neural network) นักบัญชีได้นำไปคำนวณทิศทางการขนส่ง เพื่อให้

ได้ค่าขนส่งน้อยที่สุด นักเศรษฐศาสตร์ได้นำไปใช้ในการหาจุดที่ทำกำไรสูงที่สุด หรือเพื่อหาจุดคุ้มทุน รวมถึงการคำนวณว่าจะใช้ทรัพยากรให้เกิดประโยชน์สูงสุดได้อย่างไร และนักฟิสิกส์นำไปประยุกต์ใช้การคำนวณความร้อน ที่เหมาะสมกับการเผาไหม้อุปกรณ์ เป็นต้น การคิดทฤษฎีบทจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาต่างๆ เหล่านี้จะทำให้เกิดองค์ความรู้ใหม่อันเป็นพื้นฐานในการพัฒนาประเทศต่อไป

ทฤษฎีบทจุดตรึง นับเป็นแขนงที่สำคัญแขนงหนึ่งในสาขาของการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน (functional analysis) ในปัจจุบันนักคณิตศาสตร์ได้ศึกษาและวิจัยในแขนงดังกล่าวกันอย่างต่อเนื่อง ในการคิดค้นทฤษฎีบทเพื่อหาองค์ความรู้ใหม่ ๆ นั้นนับว่ามีประโยชน์เป็นอย่างมากต่องานทางวิชาการและการพัฒนาประเทศเป็นที่ยอมรับว่าทฤษฎีบทและองค์ความรู้ใหม่ ๆ ที่เกิดจากการวิจัยนั้น นอกจากจะมีประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาความรู้เชิงวิชาการในสาขาและแขนงต่างๆนั้นแล้ว บางครั้งยังสามารถนำไปประยุกต์ในสาขาอื่นๆ และเป็นพื้นฐานสำคัญในการพัฒนาทางวิทยาศาสตร์พื้นฐาน (basic science) อันถือเป็นพื้นฐานในการพัฒนาประเทศชาติ

ทฤษฎีบทจุดตรึงนับว่าเป็นแขนงหนึ่งที่สามารถประยุกต์ได้อย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะอย่างยิ่งการศึกษาเกี่ยวกับ **การมีคำตอบของสมการ**ต่างๆ (existence of solution) และ **การมีเพียงคำตอบเดียวของสมการ** (uniqueness of solution) ตลอดจนการคิดค้นหาวิธีในการประมาณหาคำตอบของสมการต่างๆ ดังนั้นการศึกษาทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับการมีจุดตรึงของการส่งต่างๆ และ การหาระเบียบวิธีต่างๆที่ใช้ในการประมาณค่าคำตอบนั้นจึงเป็นหัวข้อที่มีนักคณิตศาสตร์จำนวนมากให้ความสนใจศึกษา ค้นคว้าวิจัย จากการศึกษาที่ผ่านมาพบว่าการศึกษาทฤษฎีบทจุดตรึงมีความสัมพันธ์ใกล้ชิดต่อการศึกษาสมบัติเรขาคณิตของปริภูมิบานาค ตัวอย่างเช่น สมบัติ Uniform convexity ของปริภูมิบานาค X ทำให้ได้ว่า ทุกๆ การส่งแบบไม่ขยาย (nonexpansive mapping) จากเซตย่อย C ของ X ไปยังตัวมันเอง มีจุดตรึง เสมอ โดยที่ C เป็นเซตคอนเวกซ์ (convex set) ปิด (closed) และมีขอบเขต (bounded) นอกจากนี้เรารู้ว่า ถ้า X เป็นปริภูมิบานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูป (uniformly convex Banach space) และ T เป็นการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับ (asymptotically nonepansive mapping) จากเซตย่อย C ของ X ไปยังตัวมันเองจะ มีจุดตรึง เสมอ โดยที่ C เป็นเซตคอนเวกซ์ ปิด และมีขอบเขต จากนั้นนักคณิตศาสตร์ก็ให้ความสนใจศึกษาสมบัติเรขาคณิตอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกับการมีจุดตรึงของการส่งต่างๆ มากขึ้นตามลำดับ และเป็นปัญหาที่กำลังเป็นที่สนใจกันอย่างกว้างขวาง เมื่อมีการศึกษาการมีคำตอบของสมการต่างๆแล้ว ปัญหาที่น่าสนใจต่อไปก็คือ เราจะหาคำตอบของสมการต่างๆนั้นได้อย่างไร คำถามดังกล่าวนี้ก็ทำให้มีนักคณิตศาสตร์จำนวนมากสนใจศึกษา คิดค้น ระเบียบวิธีต่างๆที่ใช้ในการหาคำตอบ และ ประมาณคำตอบ เช่น ระเบียบวิธีของ Picard Iteration, Ishikawa Iterations, Mann Iteration และNoor iteration เป็นต้น ผลงานวิจัยโดยสรุปในเรื่อง Fixed Point Theory and Applications ในแนวดังกล่าวข้างต้นเป็นการศึกษา คิดค้นหาทฤษฎีบทและองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับ Fixed point theory ซึ่งในงานวิจัยนี้ เราต้องการสร้างระเบียบวิธีการทำซ้ำสำหรับการหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่เชิงเส้นในปริภูมิบานาค และหาเงื่อนไขที่จำเป็นต่อการลู่เข้าสู่จุดตรึงร่วม ทั้งแบบอ่อนและแบบเข้มของการส่งไม่เชิงเส้นดังกล่าว

เนื่องจากการศึกษาที่ผ่านมาพบว่าการศึกษาทฤษฎีบทจุดตรึงสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการหาคำตอบของปัญหาอสมการการแปรผัน (variational inequality problem) ได้ ดังนั้นปัจจุบันจึงมีนักคณิตศาสตร์จำนวนมากให้ความสนใจศึกษา และวิจัยเกี่ยวกับปัญหาจุดตรึงโดยการสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าจุดตรึงและจุดตรึงที่ได้นั้นยังรู้ด้วยว่าเป็นคำตอบของอสมการการแปรผันด้วย ตัวอย่างเช่น Yao และ Yao (2007) ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อหาสมาชิกร่วมของเซตคำตอบของปัญหาอสมการการแปรผันและเซตของจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายภายใต้สมมุติฐานบางอย่างเขาได้พิสูจน์ว่าระเบียบวิธีทำซ้ำที่เขาสร้างขึ้นมาใหม่นั้นได้ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายและรู้มากกว่านั้นว่าจุดตรึงที่ได้นั้นยังเป็นคำตอบของสมการการแปรผันด้วย จากตัวอย่างข้างต้น และมีผลงานวิจัยอีกมากมายเกี่ยวกับปัญหาจุดตึงและปัญหาอสมการการแปรผันทำให้เกิดความตื่นตัวกันมากในวงการของการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชันที่จะนำเอาทฤษฎีบทจุดตรึงไปช่วยหาคำตอบของอสมการการแปรผัน

ดังนั้นในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยก็มีความสนใจที่จะศึกษาเกี่ยวกับปัญหาอสมการการแปรผันโดยการนำความรู้ทางทฤษฎีบทจุดตรึงไปช่วยหาคำตอบของปัญหาดังกล่าวด้วย

6. วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1. เพื่อสร้างและศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำใหม่เพื่อหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่เชิงเส้น
2. เพื่อหาเงื่อนไขที่เพียงพอต่อการลู่เข้าแบบเข้มและแบบอ่อนของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างในข้อ 1.
3. เพื่อสร้างและศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำใหม่เพื่อหาคำตอบของปัญหาอสมการการแปรผัน
4. เพื่อหาเงื่อนไขที่เพียงพอต่อการลู่เข้าแบบเข้มของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างในข้อ 3.
5. เพื่อผลิตนิสิตบัณฑิต วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิตในสาขาคณิตศาสตร์อย่างน้อย 1 คน
6. สร้างเครือข่ายระหว่างหน่วยงานและนอกหน่วยงานที่สนใจทำงานวิจัยด้านทฤษฎีบทจุดตรึงและการประยุกต์
7. เพื่อส่งผลงานวิจัยตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติที่มีมาตรฐานสากลอย่างน้อย 1 เรื่อง

7. ขอบเขตของโครงการวิจัย

1. ในโครงการวิจัยนี้เราจะศึกษาการส่งแบบไม่เชิงเส้นดังต่อไปนี้

   - การส่งแบบไม่ขยายและแบบกึ่งไม่ขยาย (quasia-nonexpansive mapping)

   - การส่งแบบไม่ขยายที่วางนัยทั่วไป (generalized nonexpansive mapping)

   -การส่งแบบกึ่งไม่ขยายเชิงเส้นกำกับที่วางนัยทั่วไป (generalized asymptotically quasi nonexpansive mapping)

   - α -ทางเดียวอย่างผกผัน

2. สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำใหม่เพื่อหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่เชิงเส้นและพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้มและแบบอ่อนภายใต้การวางเงื่อนไขบางอย่าง
3. สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำใหม่เพื่อหาคำตอบของปัญหาอสมการการแปรผันและพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้มภายใต้การวางเงื่อนไขบางอย่าง

8. ทฤษฎี สมมุติฐาน (ถ้ามี) และกรอบแนวความคิดของโครงการวิจัย

<u>ทฤษฎี สมมุติฐาน</u>

1. ปัญหาการมีจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย

<u>ทฤษฎีบทที่ 1</u> ให้ C เป็นเซตย่อย คอนเวกซ์ ปิด และมีขอบเขต ของปริภูมิบานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูป X , $T:C \to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขขยาย (หรือการส่งแบบไม่ขยายเชิงเส้นกำกับ) แล้ว T จะมีจุดตรึง

2. ปัญหาอสมการการแปรผัน

<u>ทฤษฎีบทที่ 2</u> ให้ C เป็นเซตย่อย ปิด และคอนเวกซ์ของปริภูมิฮิลเบิร์ต(Hilbert space) H , P_C เป็นภาพฉายระยะทางและ $A:C \to H$ เป็นการส่งทางเดียวแล้ว $u \in VI(C,A)$ ก็ต่อเมื่อ $u = P_C(u - \lambda Au), \lambda > 0$

<u>กรอบแนวความคิดของโครงการวิจัย</u>

1. จากทฤษฎีบทที่ 1 เราสามารถสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำใหม่เพื่อประมาณหาจุดตรึงได้หรือไม่ โดยที่ระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นใหม่นั้นดีกว่าระเบียบวิธีทำซ้ำที่มีมาก่อน
2. จากทฤษฎีบทที่ 2 เราสามารถสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำใหม่เพื่อประมาณหาคำตอบของอสมการการแปรผันได้หรือไม่ โดยระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นใหม่นั้นดีกว่าระเบียบวิธีทำซ้ำที่มีมาก่อน
3. จาก ข้อ 1,2 เราจะวางเงื่อนไขอย่างไรถึงจะพิสูจน์ว่าลำดับที่สร้างขึ้นลู่เข้าสู่จุดตรึงและคำตอบของอสมการการแปรผันของการส่งที่กำหนดให้

9. การทบทวนวรรณกรรม/สารสนเทศ (information) ที่เกี่ยวข้อง

<u>การประมาณค่าจุดตรึงของการส่งแบบไม่เชิงเส้น</u>

Senter และ Dotson (1974) ได้ศึกษาทฤษฎีการลู่เข้าโดยใช้ระเบียบวิธีทำซ้ำของ Mann ที่นิยามโดย ให้ $x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n T x_n + (1-\alpha_n) x_n, \quad \forall n \ge 1,$$

เมื่อ C เป็นเซตย่อยปิดของปริภูมิบานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูป X (uniformly convex Banach space) และ α_n เป็นลำดับโดยที่ $0 < a \le \alpha_n \le b < 1, \quad \forall n \ge 1$ และ T เป็นการส่งแบบไม่ขยาย (nonexpansive mapping) หรือกึ่งไม่ขยาย (quasi nonexpansive) ต่อมา Das และ Beta (1986) ได้พิจารณาสองการส่ง S,T บน C ที่นิยามระเบียบวิธีทำซ้ำดังนี้ ให้ $x \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n S[\beta_n T x_n + (1-\beta_n) x_n] + (1-\alpha_n) x_n, \quad \forall n \ge 1, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ และ $\{\beta_n\}$ เป็นลำดับใน $[0,1]$ ในกรณี $S = T$ ระเบียบวิธีทำซ้ำนี้ได้ถูกพิจารณาโดย Ishikawa (1974) ต่อมา Das และ Beta ได้ศึกษาการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำ (1) ในกรณี X เป็นปริภูมิคอนเวกซ์โดยแท้ (strictly convex space) และ S,T เป็นการส่งแบบกึ่งไม่ขยาย

Tan และ Xu (1993)ได้พิสูจน์ว่า ระเบียบวิธีทำซ้ำ $\{x_n\}$ ที่นิยามโดย (1) ลู่เข้าแบบอ่อน (weak convergence) สู่จุดตรึงของ S และ T เมื่อ S,T เป็นการส่งแบบไม่ขยายโดยที่ $S = T$ ภายใต้การวางเงื่อนไขของ$\{\alpha_n\}$ และ $\{\beta_n\}$ บางอย่าง

Takahashi และ Kim (1998) ได้พิสูจน์การลู่เข้าแบบอ่อนโดยเงื่อนไขอ่อนกว่าทฤษฎีบทของ Tan และ Xu กล่าวคือ ถ้า C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิบานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูป X โดยที่ X สอดคล้องเงื่อนไข Opial หรือ นอร์มหาอนุพันธ์แบบ Frechet ได้ แล้วระเบียบวิธีทำซ้ำ $\{x_n\}$ ที่นิยามโดย (1) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุดตรึงของU โดยที่ $U = S = T$ มากกว่านั้น Takahashi และ Kim ยังได้พิสูจน์ว่า ถ้า C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิบานาคคอนเวกซ์โดยแท้ X และ U เป็นการส่งบน C โดยที่ $U(C)$ บรรจุเซตย่อยกระชับ (compact subset) ของ C แล้ว ระเบียบวิธีทำซ้ำ $\{x_n\}$ ที่นิยามโดย (1) ลู่เข้าแบบเข้ม (strong convergence) สู่จุดตรึงของU โดยที่ $U = S = T$ และเงื่อนไขของ $\{\alpha_n\}$ และ $\{\beta_n\}$ ยังแตกต่างจากเงื่อนไขของ Das และ Debata (1986) และ Tan และ Xu (1993)

Takahashi และ Tamura (1998) ได้พิสูจน์ว่า ถ้า C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิบานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูป X โดยที่ X สอดคล้องเงื่อนไข Opial หรือ นอร์มหาอนุพันธ์แบบ Frechet ได้ แล้ว ระเบียบวิธีทำซ้ำ $\{x_n\}$ ที่นิยามโดย (1) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุดตรึงร่วมของ S และ T ภายใต้เงื่อนไขบางอย่างของ $\{\alpha_n\}$ และ $\{\beta_n\}$ มากกว่านั้น เขายังได้พิสูจน์ว่า ถ้า C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ที่ไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิบานาคคอนเวกซ์โดยแท้ X และ S,T เป็นการส่งแบบไม่ขยายบน C โดยที่ $S(C) \cup T(C)$ บรรจุเซตย่อยกระชับของ C และจุดตรึงร่วมของ

S,T ไม่เป็นเซ็ตว่าง แล้ว ระเบียบวิธีทำซ้ำ $\{x_n\}$ ที่นิยามโดย (1) ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงร่วมของ S,T

Liu (2000) ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำแบบใหม่เพื่อประมาณจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายบนเซตย่อยปิด คอนเวกซ์และมีขอบเขต C ของปริภูมิบานาค X นิยามโดย

$$x_{n+1} = Sx_n \ \forall n \geq 1, \qquad \text{.....................................} \quad (2)$$

เมื่อ $S = \alpha_r T_r + \alpha_{r-1} T_{r-1} + \cdots + (1-\alpha_r - \alpha_{r-1} \cdots - \alpha_1) I$, $T_i : C \to C$, $i = 1,2,\ldots,r$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย $\forall i = 2,3,\ldots,r$ และ $1-\alpha_r - \alpha_{r-1} \cdots - \alpha_1 > 0$

เราจะกล่าวว่าการส่ง T_i, $i = 1,2,\ldots,r$ สอดคล้องกับเงื่อนไข A (Senter และ Dotson, 1974, หน้า 377) ถ้ามีการส่งไม่ลด (nondecreasing function) $f:[0,\infty) \to [0,\infty)$ พร้อมกับ $f(0) = 0$ และ $f(t) > 0$ ทุก $t \in [0,\infty)$ ที่ทำให้ $\|x - S\| \geq f(d(x,F))$ สำหรับทุก $x \in C$ เมื่อ S กำหนดโดย (2) $d(x,F) = \inf\{\|x-p\| \mid p \in F\}$ และ $F = F(T_i) \neq \phi$, $(i = 1,2,3,\ldots,r)$
Liu ได้พิสูจน์ว่า $\{x_n\}$ ที่นิยามโดย (2) ได้ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงร่วมของ T_i, $i = 1,2,\ldots,r$ ในปริภูมิบานาคโดยที่ T_i, $i = 1,2,\ldots,r$ จะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไข A

Khan และ Fukhar-ud-din (2005)ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำโดย

$$\begin{aligned} x_1 &= x \in C, \\ y_n &= a'_n T x_n + b'_n x_n + c'_n v_n, \qquad \text{.....................................} \quad (3) \\ x_{n+1} &= a_n S y_n + b_n x_n + c_n u_n, n \geq 1, \end{aligned}$$

เมื่อ $T,S : C \to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\},\{a'_n\},\{b'_n\}$ และ $\{c'_n\}$ เป็นลำดับใน $[0,1]$ พร้อมกับ $0 < \delta \leq a_n, a'_n \leq 1-\delta < 1, a_n + b_n + c_n = 1 = a'_n + b'_n + c'_n$ และ $\{u_n\},\{v_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน C Khan และ Fukhar-ud-din (2005) ได้พิสูจน์ว่า ถ้า X เป็นปริภูมิบานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูป ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข Opial เซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่าง คอนเวกซ์ และมีขอบเขต C ของ X, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} c'_n < \infty$ และ $F(T) \cap F(S) \neq \phi,$ แล้ว ลำดับ $\{x_n\}$ ที่กำหนดโดย (3) จะลู่เข้าแบบอ่อนสู่จุดตรึงร่วมของ S และ T มากกว่านั้นเขายังได้พิสูจน์ว่า สำหรับปริภูมิคอนเวกซ์แบบเอกรูป X ถ้า $T,S : C \to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายที่สอดคล้องกับเงื่อนไข A', $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty, \sum_{n=1}^{\infty} c'_n < \infty$ และ $F(T) \cap F(S) \neq \phi,$ แล้ว ลำดับ $\{x_n\}$ ที่กำหนดโดย (3) จะลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงร่วมของ S และ T

Fukhar-ud-din และKhan (2007) ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำดังนี้

$$\begin{aligned} x_1 &\in C, \\ z_n &= \alpha^{(3)}{}_n x_n + \beta^{(3)}{}_n T_3 x_n + \gamma^{(3)}{}_n u^{(3)}{}_n, \\ y_n &= \alpha^{(2)}{}_n x_n + \beta^{(2)}{}_n T_2 z_n + \gamma^{(2)}{}_n u^{(2)}{}_n, \qquad \text{.....................................} \quad (4) \\ x_{n+1} &= \alpha^{(1)}{}_n x_n + \beta^{(1)}{}_n T_1 y_n + \gamma^{(1)}{}_n u^{(1)}{}_n, n \geq 1, \end{aligned}$$

เมื่อ $T_i : C \to C, i = 1,2,3$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย $\{u^{(j)}{}_n\}$เป็นลำดับที่มีขอบเขตบน C สำหรับแต่ละ $j = 1,2,3$ และ $\{\alpha^{(j)}{}_n\},\{\beta^{(j)}{}_n\}$ และ $\{\gamma^{(j)}{}_n\}$ เป็นลำดับใน $[0,1]$ ที่สอดคล้องกับ

$\alpha^{(j)}{}_n+\beta^{(j)}{}_n+\gamma^{(j)}{}_n=1$ สำหรับแต่ละ $j=1,2,3$ เข้าได้พิสูจน์ทฤษฎีการลู่เข้าแบบเข้มและแบบอ่อนของระเบียบวิธีทำซ้ำ (4) สำหรับสามการส่งไม่ขยาย ในปริภูมิบานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูปภายใต้เงื่อนไขบางอย่างของ $\{\alpha^{(j)}{}_n\},\{\beta^{(j)}{}_n\}$ และ $\{\gamma^{(j)}{}_n\}$

<u>ปัญหาอสมการการแปรผัน</u>

Stampacchi (1964) ได้ศึกษาปัญหาที่เรียกว่าอสมการการแปรผันแบบฉบับ (classical variational inequality) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $VI(C,A)$ คือการหา $x^* \in C$ ที่ทำให้ $\langle Ax^*, y-x^*\rangle \geq 0,\ \forall y\in C$ จากนิยามดังกล่าวจะเห็นได้ว่า x^* เป็นคำตอบของอสมการการแปรผันในสมการที่ (1) ก็ต่อเมื่อ $x^*=P_C(x^*-\lambda Ax^*)$ เมื่อ $\lambda>0$ และ P_C เป็นภาพฉายระยะทาง (metric projection) นั่นแสดงให้เห็นว่าปัญหาอสมการการแปรผันมีความสัมพันธ์กับปัญหาจุดตรึง (Fixed point problems) สำหรับการแก้ปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิ Euclidean มิติจำกัด $\mathbb{R}^n$ ภายใต้สมุติฐาน $C\subset\mathbb{R}^n$ เป็นเซตปิดและคอนเวกซ์ ให้ $A:C\to\mathbb{R}^n$ เป็นการส่งทางเดียว (montonr mapping) และต่อเนื่อง $k-$ลิพชิทซ์ (k-Lipschitz continuous) โดยที่ $VI(C,A)\neq\phi$

Korpelevich (1976) ได้นิยามระเบียบวิธีทำซ้ำที่ถูกเรียกว่าวิธีเอกซตราเกรเดียนต์ (extragradient method) โดย

$$x_0=x\in C,$$
$$y_n=P_C(x_n-\lambda Ax_n), \qquad \text{(5)}$$
$$x_{n+1}=P_C(x_n-\lambda Ay_n),$$

สำหรับทุก $n=1,2,...,$ เมื่อ $\lambda\in(0,\frac{1}{k})$ Korpelevich ได้พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ ของระเบียบวิธีทำซ้ำ (5) ลู่เข้าสู่จุด $z\in VI(C,A)$

Takahashi และ Toyoda (2003) ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อหาคำตอบร่วมระหว่างจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายและผลเฉลยของอสมการการแปรผันกล่าวคือเพื่อหาคำตอบของ $F(S)\cap V(C,A)$ โดยกำหนดให้ $x_0\in C$
นิยามลำดับ $\{x_n\}$ โดย

$$x_{n+1}=\alpha_n x_n+(1-\alpha_n)SP_C(x_n-\lambda_n Ax_n) \qquad \text{(6)}$$

สำหรับทุกๆ $n=0,1,2,...,$ เมื่อ $\{\alpha_n\}\subset(0,1)$, $\{\lambda_n\}\subset(0,2\alpha)$ และ $S:C\to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายบน C, $P_C:H\to C$ เป็นภาพฉายระยะทาง และ $A:C\to H$ เป็น α-ทางเดียวอย่างผกผัน จากนั้น Takahashi และ Toyoda ได้พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่งนิยามโดย (6) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่สมาชิกร่วมของ $F(T)\cap VI(C,A)$ ในปริภูมิฮิลเบิร์ต

Nadezhkina และ Takahashi (2006) ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อหาสมาชิกร่วมระหว่างจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายและผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผันสำหรับการส่งทางเดียว และต่อเนื่อง $k-$ลิพชิทซ์

นิยามระเบียบวิธีทำซ้ำโดย

$$x_0 = x \in C,$$
$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \qquad \text{....................................} \quad (7)$$
$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) S P_C(x_n - \alpha_n A y_n),$$

สำหรับทุกๆ $n = 0,1,2,\ldots,$ เมื่อ $\{\lambda_n\} \subset [a,b]$ สำหรับบาง $a,b \in (0, \frac{1}{k})$ และ $\{\alpha_n\} \subset [c,d]$ สำหรับบาง $c,d \in (0,1)$ Nadezhkina และ Takahashi ได้พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ซึ่งนิยามโดย (7) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่สมาชิก $z \in F(S) \cap VI(C,A)$ เมื่อ $z = \lim_{x\to\infty} P_{F(S)\cap VI(C,A)} x_n$

Yao และ Yao (2007) สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำใหม่เพื่อหาสมาชิกร่วมของ $F(S) \cap VI(C,A)$ ภายใต้สมมุติฐาน $A: C \to H$ เป็น α-ทางเดียวอย่างผกผัน และ $S: C \to C$ เป็นการส่งแบบไม่ขยายซึ่ง $F(T) \cap VI(A,C) \neq \phi$

ให้ $x_0 = u \in C$ และนิยามลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ โดย

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_n x_n) \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n S P_C(y_n - \lambda_n A y_n) \end{cases} \qquad \text{....................................} \quad (8)$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วงปิด $[0,1]$ และ $\{\lambda_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วงปิด $[0, 2\alpha]$ Yao และ Yao พิสูจน์ว่า ถ้าลำดับ $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ สอดคล้องเงื่อนไขบางอย่าง แล้วลำดับ $\{x_n\}$ กำหนดโดย (8) ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $z \in F(S) \cap VI(C,A)$ เมื่อ $z = P_{F(S)\cap VI(C,A)} u$

10. เอกสารอ้างอิงของโครงการวิจัย

1. Das, G. & Debata, J.P. (1986). Fixed points of quasi-nonexpansive mappings. Indian J. Pure Appl. Math. (17), 1263-1269.
2. Fukhar-ud-din, H. & Khan, A. R. (2007). Approximating common fixed points of asymptotically nonexpansive maps in uniformly convex Banach spaces. Computers and Mathematics with Applications (53), 1349-1360.
3. Ishikawa. (1974). Fixed point by a new iteration. Proc. Amer. Math. Soc. (44), 147-150.
4. Khan, S. & Fukhar-ud-din, H. H. (2005). Weak and strong convergence of a scheme with errors for two nonexpansive mappings, Nonlinear Analysis (61), 1295-1301.
5. Korpelevich, G. M. (1976). An extragradient method for finding saddle points and for other problems. Ekon. Mat. Metody (12), 747-756.
6. Liu, G. Lei D. & Li S. (2000). Approximating fixed points of nonexpansive mappings. Internat. J. Math. Math. sci. (24), 173-177.

7. Nadezhkina, N. & Takahashi, W. (2006). Weak convergence theorem by an extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings. Journal of optimization theory and applications (128), 191-201.
8. Senter, H. F. & Dotson, W. G. (1974) Approximating fixed points of nonexpansive mappings. Proc. Amer. Math. Soc. 44 (2), 375-380.
9. Stampacchi, G. (1964). Formes bilineaires coercivites sur les ensembles convexes. C. R. Acad. Sci. Paris. (258), 4413-4416.
10. Takahashi, W. & Kim, G. E. (1998). Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces. Math. Japonica. (48), 1-9.
11. Takahashi, W. & Tamura, T. (1998). Convergence theorems for a pair of nonexpansive mappings. J. Convex Analysis (1), 45-56.
12. Takahashi, W. & Toyoda, M. (2003). Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings. J. Optim. Theory Appl. (118), 417-428.
13. Tan, K.K. & Xu, H. K. (1993). Approximating fixed points of nonexpansive mapping by the Ishikawa iteration process. J. Math. Anal. Appl. (178), 301-308.
14. Yao,Y. & Yao, J. C. (2007). On modified iterative method for nonexpansive mappings and monotone mappings. Appl. Math. Comput. (186), 1551-1558.

11. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ เช่น การเผยแพร่ในวารสาร จดสิทธิบัตร ฯลฯ และหน่วยงานที่นำผลการวิจัยไปใช้ประโยชน์

1. ได้ระเบียบวิธีทำซ้ำใหม่เพื่อประมาณค่าจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่เชิงเส้น
2. ได้เงื่อนไขที่เพียงพอต่อการลู่เข้าแบบเข้มและแบบอ่อนของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างในข้อ 1.
3. ได้ระเบียบวิธีทำซ้ำใหม่เพื่อหาคำตอบของปัญหาอสมการการแปรผัน
4. ได้เงื่อนไขที่เพียงพอต่อการลู่เข้าแบบเข้มของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างในข้อ 3.
5. มีบุคลากรในหน่วยงานสาขาคณิตศาสตร์ม.ทักษิณทำงานวิจัยด้านทฤษฎีบทจุดตรึงและการประยุกต์เพิ่มขึ้น
6. สามารถผลิตนิสิตบัณฑิต วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิตในสาขาคณิตศาสตร์ได้อย่างน้อย 1 คน
7. ผลงานวิจัยได้ตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติที่มีมาตรฐานสากล

12. แผนการถ่ายทอดเทคโนโลยีหรือผลการวิจัยสู่กลุ่มเป้าหมาย

1. นำเสนอผลงานวิจัยในการประชุมวิชาการในหัวข้อที่เกี่ยวข้องกับปัญหาทฤษฎีบทจุดตรึงและการประยุกต์ 1 เรื่อง
2. ร่วมเสวนาและอภิปรายกับผู้เชี่ยวชาญทางด้านทฤษฎีบทจุดตรึงและการประยุกต์อย่างน้อย 2 ครั้ง
3. จัดฝึกอบรมทฤษฎีบทจุดตรึงและการประยุกต์ให้กับนักวิจัยทางคณิตศาสตร์และนิสิตระดับปริญญาตรีและโท จำนวน 20 คน เป็นเวลา 2 วันเพื่อเป็นการกระตุ้นและส่งเสริมการเรียนรู้สำหรับนิสิตและนักวิจัย
4. ร่วมอภิปรายกับที่ปรึกษาโครงการเพื่อเป็นการแลกเปลี่ยนความรู้
5. ส่งบทความวิจัยตีพิมพ์ในวารสารทางวิชาการระดับนานาชาติ

   โดยใช้งบประมาณทั้งโครงการเป็นจำนวนเงิน 120,000 บาท

13. วิธีการดำเนินการวิจัย และสถานที่ทำการทดลอง/เก็บข้อมูล

1. รวบรวมงานวิจัย หนังสือ และบทความที่สำคัญที่เกี่ยวข้องกับการส่งไม่เชิงเส้นและคุณสมบัติของจุดตรึง
2. รวบรวมข้อมูลและศึกษาความรู้เพิ่มเติมที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทจุดตรึงและการประยุกต์ โดยการจัดสัมมนา ประชุม และร่วมประชุมวิชาการในหัวข้อที่เกี่ยวข้อง
3. ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับปัญหาจุดตรึงของการส่งแบบไม่เชิงเส้นทั้งในปริภูมิฮิลเบิร์ตและปริภูมิบานาค
4. ใช้ความรู้วิธีการต่างๆจาก 1-3 เพื่อศึกษาและสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำใหม่เพื่อให้ได้ตามวัตถุประสงค์ของการวิจัย
5. พิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้มและแบบอ่อนของระเบียบวิธีทำซ้ำที่เราสร้างขึ้นโดยข้อ 4 โดยการหาเงื่อนไขบนลำดับที่สร้างขึ้น
6. เขียนบทความวิจัยจากปัญหางานวิจัยและส่งไปตีพิมพ์วารสารวิชาการระดับนานาชาติ
7. เขียนรายงานวิจัยทุก 6 เดือนรายงานต่อมหาวิทยาลัย

14. ระยะเวลาทำการวิจัย และแผนการดำเนินงานตลอดโครงการวิจัย (ให้ระบุขั้นตอนอย่างละเอียด)

กิจกรรมและขั้นตอนการดำเนินงาน	2555 (6 เดือนแรก)					
	1	2	3	4	5	6
1. รวบรวมเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาวิจัยจากหลายๆวารสาร และ อภิปราย ปัญหาวิจัยกับทีมวิจัย	↔					
2. ศึกษาคุณสมบัติพื้นฐานของการส่งไม่เชิงเส้นอื่นๆ จากเอกสารอ้างอิง		↔	↔			
3. ใช้ความรู้จากข้อ 2 เพื่อสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำใหม่เพื่อประมาณค่าจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่เชิงเส้นและผลเฉลยของอสมการการแปรผัน			↔	↔	↔	
4. รายงานความก้าวหน้าของโครงการในรอบ 6 เดือนแรกต่อมหาวิทยาลัย					↔	↔

กิจกรรมและขั้นตอนการดำเนินงาน	2555-2556 (6 เดือนหลัง)					
	1	2	3	4	5	6
1. พิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้มของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นสู่จุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่เชิงเส้นและผลเฉลยของอสมการการแปรผัน	↔	↔	↔			
2. พบนักวิจัยที่ปรึกษาเพื่อปรับปรุงแก้ไข			↔	↔	↔	
3. เขียนเอกสารงานวิจัยและส่งตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติและรายงานความก้าวหน้าของโครงการในรอบ 6 เดือนหลังต่อมหาวิทยาลัย					↔	↔

15. ปัจจัยที่เอื้อต่อการวิจัย (อุปกรณ์การวิจัย, โครงสร้างพื้นฐาน ฯลฯ) ระบุเฉพาะปัจจัยที่ต้องการเพิ่มเติม

1. บทความและวารสารคณิตศาสตร์ทางด้านทฤษฎีบทจุดตรึงและการวิเคราะห์เชิงเส้น
2. โปรแกรมคอมพิวเตอร์ทางด้านคณิตศาสตร์ เช่น WinEdt Mathematica และ Sketchpad

16. งบประมาณของโครงการวิจัย

16.1 รายละเอียดงบประมาณการวิจัย จำแนกตามงบประเภทต่าง ๆ [ปีงบประมาณที่เสนอขอ (ผนวก 5)

รายการ	จำนวนเงิน
1. งบบุคลากร	**23,820**
ค่าจ้างผู้ช่วยนักวิจัยนิสิตบัณฑิตศึกษา 1 คน (7,940 บาท x 3 เดือน)	23,820
2. งบดำเนินงาน	**96,180**
2.1 ค่าตอบแทน ใช้สอยและวัสดุ	
2.1.1 ค่าตอบแทน	**8,000**
ค่าปฏิบัติงานนอกเวลาราชการ (วันราชการ) (2 คน x 15 วัน x 200 บาท)	6,000
ค่าตอบแทนที่ปรึกษาโครงการ	2,000
2.1.2 ค่าใช้สอย	**38,200**
ค่าพาหนะในการเดินทางเพื่อค้นเอกสาร ค่าเบี้ยเลี้ยง ค่าเช่าที่พัก (2 คน x 1 ครั้ง x 5000 บาท)	10,000
ค่าใช้จ่ายในการจัดสัมมนาและฝึกอบรม (ค่าตอบแทนวิทยากร) (1 คน x 2 วัน x 7 ช.ม. x 600 บาท)	8,400
ค่าใช้จ่ายในการจัดสัมมนาและฝึกอบรม (ค่าตอบแทนวิทยากรภาคปฏิบัติ) (1 คน x 2 วัน x 7 ช.ม. x 200 บาท)	2,800
ค่าใช้จ่ายในการจัดสัมมนาและฝึกอบรม (ค่าวัสดุ)	3,000
ค่าใช้จ่ายในการจัดสัมมนาและฝึกอบรม (ค่าอาหาร) (20 คน x 2 วัน x 100 บาท)	4,000

ค่าจัดทำรายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์	5,000
ค่าวิเคราะห์ข้อมูล	5,000
2.1.3 ค่าวัสดุ	**46,980**
วัสดุสำนักงาน	5,000
วัสดุหนังสือ วารสาร ตำรา และบทความวิชาการคณิตศาสตร์ ฯลฯ	11,800
วัสดุคอมพิวเตอร์ เช่น Handy Drive, CD-R, DVD+R, DVD+RW, EXT. USB HDD, โปรแกรมคอมพิวเตอร์ หมึกพิมพ์เครื่องพิมพ์เลเซอร์ ฯลฯ	30,180
2.2 ค่าสาธารณูปโภค	**3,000**
ค่าไฟฟ้า ค่าน้ำประปา ค่าโทรศัพท์ ค่าไปรษณีย์ ค่าบริการด้านสื่อสารและโทรคมนาคม	3,000
รวมงบประมาณที่เสนอขอ	**120,000**

17. ผลสำเร็จและความคุ้มค่าของการวิจัยที่คาดว่าจะได้รับ

1. ผลสำเร็จเบื้องต้น (P) ได้ระเบียบวิธีการทำซ้ำใหม่ที่ครอบคลุมระเบียบวิธีทำซ้ำที่ได้พัฒนามาก่อน
2. ผลสำเร็จกึ่งกลาง (I)
   2.1 ได้เงื่อนไขที่เพียงพอต่อการลู่เข้าสู่จุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่เชิงเส้น
   2.2 ได้เงื่อนไขที่เพียงพอต่อการลู่เข้าสู่คำตอบของอสมการการแปรผัน

3 ผลสำเร็จตามเป้าประสงค์ (G)
   1. ได้ทฤษฎีบทการลู่เข้าสู่จุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่เชิงเส้น
   2. ได้ทฤษฎีบทการลู่เข้าสู่คำตอบของอสมการการแปรผัน
   3. งานวิจัยได้รับการตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติอย่างน้อย 1 เรื่อง

ลงชื่อ หัวหน้าโครงการวิจัย

(นายสุวิชา อิ่มนาง)

16 มกราคม 2555

ลงชื่อ อรจิรา สิทธิศักดิ์ ผู้ร่วมโครงการวิจัย

(นางสาวอรจิรา สิทธิศักดิ์)

16 มกราคม 2555

<u>ส่วน ค</u> :ประวัติคณะผู้วิจัย

รายระเอียดหัวหน้าโครงการ

1. ชื่อ - นามสกุล (ภาษาไทย) ดร.สุวิชา อิ่มนาง
   ชื่อ - นามสกุล (ภาษาอังกฤษ) Dr. Suwicha Imnang
   เลขหมายบัตรประจำตัวประชาชน 3411600421335
2. ตำแหน่งปัจจุบัน อาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ
3. ที่ทำงาน สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ วิทยาเขตพัทลุง
   อำเภอป่าพะยอม จังหวัด พัทลุง รหัสไปรษณีย์ 93110
   โทรศัพท์ 074-693972 ต่อ 2579
   โทรศัพท์มือถือ 085-8708598 email: suwicha.n@hotmail.com
4. ประวัติการศึกษา
   กศ.บ. คณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม
   วท.ม. คณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
   ปร.ด. คณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
5. สาขาวิชาที่ทำการวิจัย Functional Analysis, Banach Space Theory and Fixed Ponit Theory
6. ผลงานวิจัย และตำรา

6.1. ผลงานวิจัยที่ตีพิมพ์ในวารสารวิชาการนานาชาติ ผลงานวิจัยย้อนหลัง 5 ปี (ปี 2005-ปัจจุบัน)

1. **S. Imnang**, S. Suantai, Strong convergence of the modified Mann iteration in a Banach space, Thai Journal of Mathematics 3 (2005) 259-274.
2. **S. Imnang**, S. Suantai, A new iterative method for common fixed points of a finite family of nonexpansive mappings, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences (2009) doi:10.1155/2009/391839.
3. **S. Imnang**, S. Suantai, Common Fixed Points of Multistep Noor Iterations with Errors for a Finite Family of Generalized Asymptotically Quasi-Nonexpansive Mappings, Abstract and Applied Analysis (2009) doi:10.1155/2009/728510. **Impact factor**: 2008 = 0.644.
4. **S. Imnang**, S. Suantai, Approximating common fixed points for a finite family of non-Lipschitzian mappings in Banach spaces, Int. Journal of Math. Analysis no. 35 (2009) 1745-1759.
5. **S. Imnang**, S. Suantai, Weak and Strong Convergence Theorems for a Finite Family of Non-Lipschitzian Mappings in Banach Spaces, Lobachevskii Journal of Mathematics, 2010, Vol. 31, No. 1, pp. 18–26.. **Impact factor**: 2008 = 0.104.

6. **S. Imnang**, S. Suantai, Strong convergence theorems for a general system of variational inequalities problems, mixed equilibrium problems and fixed points problems with applications, Mathematical and Computer Modelling (2010), Doi:10.1016/j.mcm.2010.06.037, **Impact factor**:2009 = 1.103

6.2 ผลงานวิจัยอื่น ๆ

1. **S. Imnang**, S. Suantai, Strong and weak convergence theorems for common fixed points of three asymptotically nonexpansive mappings, Proceeding of the International Symposium on Banach and Function Spaces II, Kitakyshu, Japan, 2006, 319-336.

รายละเอียดของผู้ร่วมโครงการ

1. **ชื่อ - นาม**สกุล (ภาษาไทย) ดร. อรจิรา สิทธิศักดิ์
   ชื่อ - นามสกุล (ภาษาอังกฤษ) Dr. Onjira Sitthisak
   เลขหมายบัตรประจำตัวประชาชน 3830300353526
2. ตำแหน่งปัจจุบัน อาจารย์สาขาวิชาคอมพิวเตอร์และเทคโนโลยี คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ
3. ที่ทำงาน สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ วิทยาเขตพัทลุง อำเภอป่าพะยอม จังหวัด พัทลุง รหัสไปรษณีย์ 93110
   โทรศัพท์ 074-693972 ต่อ 2576
   โทรศัพท์มือถือ 082-7491831 email: on_ja@hotmail.com
4. ประวัติการศึกษา
   วท.บ. วิทยาการคอมพิวเตอร์ (เกียรตินิยมอันดับ 1) มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์
   วท.ม. การจัดการระบบสารสนเทศ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์
   PhD. (Computer Science) University of Southampton, United Kingdom
5. สาขาวิชาที่ทำการวิจัย Modeling, Computational algorithm, E-learning
6. ประสบการณ์การทำงาน

หัวหน้าโครงการวิจัย "E-Journal" ของสถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยทักษิณ ได้รับทุนจากสกอ. ระหว่างเดือน ต.ค. 2552-ธ.ค.2553

ผู้จัดการโครงการวิจัยเรื่อง "e-Assessment in Higher Education" project (EASiHE) ณ. University of Southampton ระหว่างเดือนกันยายน 2551 ถึง มิถุนายน 2552

7. ผลงานวิจัยที่ตีพิมพ์ในวารสารวิชาการนานาชาติ ผลงานวิจัยย้อนหลัง 5 ปี (ปี 2005-ปัจจุบัน)

1. **Sitthisak, O.** and Gilbert, L (2010) An evaluation of generated question sequences based on competency modelling. In Proceedings of the 18th International Conference on Computers in Education, Malaysia.

2. **Sitthisak, O.** and Gilbert, L (2010) Extension of IMS LD for improved pedagogical expressiveness in assessment. In proceeding of the International Computer Assisted Assessment (CAA) Conference: Research into E-Assessment, Southampton, UK.

3. **Sitthisak, O.**, Gilbert, L. and Davis, H. (2009) Transforming a competency model to parameterised questions in assessment. WEBIST 2008, Lecture Notes in Business Information Processing, 18 . pp. 392-405.

4. **Sitthisak, O.** and L. Gilbert. (2009). Affordances of machine-processable competency modelling. In proceeding of the International Conference Cognition and Exploratory Learning in Digital Age, Rome, Italy.

5. **Sitthisak, O.** and L. Gilbert. (2009). Improving the pedagogical expressiveness of IMS LD. In proceeding of the International conference on Technology Enhanced Learning Conference, Taipei, Taiwan.

6. **Sitthisak, O.**, Gilbert, L. and Davis, H. (2008) TRANSFORMING A COMPETENCY MODEL TO ASSESSMENT ITEMS. In: 4th International Conference on Web Information Systems and Technologies (WEBIST), 4-7 May 2008, Funchal, Madeira - Portugal.

7. **Sitthisak, O.**, Gilbert, L. and Davis, H. (2008) Deriving e-assessment from a competency model. In: The 8th IEEE International Conference on Advanced Learning Technologies (ICALT 2008), July 1st- July 5th, 2008, Santander, Cantabria, Spain.

8. **Sitthisak, O.**, Gilbert, L. and Davis, H. (2008) An evaluation of pedagogically informed parameterised questions for self assessment. Learning, Media and Technology, 33 (3).pp.235-248.

9. **Sitthisak, O.**, Gilbert, L. and Davis, H. C. (2007) Towards a competency model for adaptive assessment to support lifelong learning. In: TENCompetence Workshop on Service Oriented Approaches and Lifelong Competence Development Infrastructures, 11-12 January 2007, Manchester, UK.

10. **Sitthisak, O.**, Gilbert, L., Zalfan, M. T. and Davis, H. C. (2007) INTERACTIVITY WITHIN IMS LEARNING DESIGN AND QUESTION AND TEST INTEROPERABILITY. In: the 3rd International Conference on Web Information Systems and Technologies (WEBIST), 3-6 March, Barcelona, Spain.

11. Gilbert, L. and **Sitthisak, O.** (2007) Pedagogically informed metadata content and structure for learning and teaching. In: TENCompetence Open Workshop on Current research on IMS Learning Design and Lifelong Competence Development Infrastructures, 21-22 June 2007, Barcelona, Spain.

12. **Sitthisak, O.**, Gilbert, L., Davis, H. C. and Gobbi, M. (2007) Adapting health care competencies to a formal competency model. In: The 7th IEEE International Conference on Advanced Learning Technologies (ICALT 2007), July 18-20, 2007, Niigata, Japan.

13. **Sitthisak, O.**, Gilbert, L. and Davis, H. C. (2007) Transforming a competency model to assessment items. In Proceedings of PROLIX Workshop2007 in conjunction with EC-TEL07,Create,Greece.

14. Gilbert, L., **Sitthisak, O.**, Sim, Y. W., Wang, C. and Wills, G. (2006) From collaborative virtual research environment to teaching and learning. In: TENcompetence Workshop: Learning Networks for Lifelong Competence Development, 30-31 March 2006, Sofia, Bulgaria.