บทความวิชาการ

ฟังก์ชันคอนเวกซ์ อสมการเจนเสน และการประยุกต์

Convex Functions, Jensen's Inequality and Some Applications

พุธินันท์ รัตคาม

นิสิต ป.บัณฑิต มหาวิทยาลัยทักษิณ

รองศาสตราจารย์ ดร.สมใจ จิตพิทักษ์

ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

1. บทนำ (Introduction) ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตจำนวนจริง ให้ $I = (a, b)$ เป็นช่วงใน $\mathbb{R}$ ช่วง I เป็นช่วงจำกัดหรือช่วงอนันต์ก็ได้ นั่นคือ $a = -\infty$ หรือ $b = \infty$ ก็ได้ ฟังก์ชันค่าจริง $f : I \to \mathbb{R}$ จะเรียกว่าเป็น **ฟังก์ชันคอนเวกซ์ (convex function)** ก็ต่อเมื่อ

$$f(px + qy) \le pf(x) + qf(y) \qquad \text{(a)}$$

สำหรับทุก x, y ที่ $a < x < y < b$ และทุก $p, q \ge 0$ ที่ $p + q = 1$ เงื่อนไข (a) สามารถเขียนได้อีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$f(px + (1-p)y) \le pf(x) + (1-p)f(y) \qquad \text{(b)}$$

เมื่อ $0 \le p \le 1$ กรณี $p = q = \dfrac{1}{2}$ จะได้

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big) \qquad \text{(c)}$$

เรียก f กรณีนี้ว่า **ฟังก์ชันคอนเวกซ์แบบเจ (J – convex function)** หรือ **ฟังก์ชันคอนเวกซ์ที่จุดกึ่งกลาง (midpoint convex function)** ใน (a) หรือ (b) ถ้าแทน $\le$ ด้วย $<$ จะได้ **ฟังก์ชันคอนเวกซ์แท้ (strictly convex function)** สำหรับ (c) ก็เช่นเดียวกัน

ในบทความนี้จะศึกษาฟังก์ชันคอนเวกซ์ พิสูจน์อสมการเจนเสน ประยุกต์ฟังก์ชันคอนเวกซ์และอสมการเจนเสน เพื่อพิสูจน์อสมการอื่น และแก้โจทย์ปัญหาที่น่าสนใจ

2. ผลลัพธ์หลัก (Main Results) ให้ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ เราจะพิสูจน์อสมการเจนเสน (Jensen's inequality) กรณีพิเศษ (ทฤษฎีบท 2.1) โดยใช้หลักอุปนัยเชิงอนันต์ ดังที่เจนเสน (J.L.W.W. Jensen 1859 – 1925) ได้พิสูจน์ไว้เมื่อปี 1906 โดยอาศัยแนวการพิสูจน์อสมการมัชฌิม-เลขคณิต – เรขาคณิต (AM – GM inequality) ที่โคชี (A. L. Cauchy 1789 – 1857) ได้พิสูจน์ไว้ ส่วนกรณีทั่วไป (ทฤษฎีบท 2.2) พิสูจน์โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แนวการพิสูจน์กรณีทั่วไปนี้ได้จาก สตีล (Steele. 2004 : 87 – 88)

ทฤษฎีบท 2.1 (อสมการเจนเสน) ให้ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ และ $x_i\in(a,b),\ i=1,2,\ldots,n$ จะได้

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)\le\frac{1}{n}\big(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\big) \qquad (1)$$

หรือ

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$$

การพิสูจน์ พิจารณากรณี $n=2^k$ เราจะพิสูจน์โดยการอุปนัยว่า (1) เป็นจริง
สำหรับ $k=1$ จะได้ $n=2$ จาก $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ ดังนั้น

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\le\frac{f(x_3)+f(x_4)}{2}$$

เมื่อ $k=2$ นั่นคือ $n=4$ จะได้

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)&=f\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}\right)\\
&\le\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right)\\
&\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\big(f(x_1)+f(x_2)\big)+\frac{1}{2}\big(f(x_3)+f(x_4)\big)\right)\\
&=\frac{1}{4}\big(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)\big)
\end{aligned}$$

สมมติ (1) เป็นจริงเมื่อ $n=2^k$ จะพิสูจน์ว่า (1) เป็นจริงเมื่อ $n=2^{k+1}$

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^k}+x_{2^k+1}+\ldots+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)$$

$$=f\left(\frac{\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^k}}{2^k}+\dfrac{x_{2^k+1}+x_{2^k+2}+\ldots+x_{2^{k+1}}}{2^k}}{2}\right)$$

$$\le\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{2^k}}{2^k}\right)+f\left(\frac{x_{2^k+1}+x_{2^k+2}+\ldots+x_{2^{k+1}}}{2^k}\right)\right)$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{2^k})\right)+\frac{1}{2^k}\left(f(x_{2^k+1})+f(x_{2^k+2})+\ldots+f(x_{2^{k+1}})\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2^{k+1}}\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{2^k})+f(x_{2^k+1})+f(x_{2^k+2})+\ldots+f(x_{2^{k+1}})\right)$$

นั่นคือ (1) เป็นจริงเมื่อ $n=2^{k+1}$ โดยการอุปนัยจะได้ (1) เป็นจริงเมื่อ $n=2^k$ ทุก $k\in\mathbb{N}$

ให้ $n\in\mathbb{N}$ จะมี $m\in\mathbb{N}$ ที่ $n<2^m$ ให้ $k=2^m-n$ นั่นคือ $2^m=n+k$ จากผลข้างต้นจะได้

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n+k}}{n+k}\right)\le\frac{1}{2^m}\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n+k})\right)$$

ให้ $x_{n+1}=x_{n+2}=\ldots=x_{n+k}=\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$ จะได้

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n+\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}+\ldots+\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}}{n+k}\right)$$

$$\le\frac{1}{2^m}\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)+kf\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)\right)$$

$$2^m f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)-kf\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)\le f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)$$

$$(2^m-k)f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)\le f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)\le\frac{1}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right)$$

นั่นคือ (1) เป็นจริงสำหรับทุก $n\in\mathbb{N}$

□

ทฤษฎีบท 2.2 (อสมการเจนเสน) ให้ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ ให้ $p_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ สำหรับทุก $x_i \in (a,b)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ จะได้

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} p_j f\left(x_j\right) \qquad (2)$$

การพิสูจน์ กรณี $n = 1$ ไม่มีอะไรจะต้องพิสูจน์ กรณี $n = 2$ อสมการ (2) ได้จากบทนิยามของฟังก์ชันคอนเวกซ์ สมมติอสมการเป็นจริงที่ $j = n-1$ ในการพิสูจน์ว่าอสมการเป็นจริงที่ $j = n$ โดยไม่เสียนัยทั่วไปสมมติให้ $p_n > 0$ และเขียนผลบวก $p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$ ใหม่ในรูป

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = p_n x_n + \left(1-p_n\right)\sum_{j=1}^{n-1}\frac{p_j}{1-p_n}x_j$$

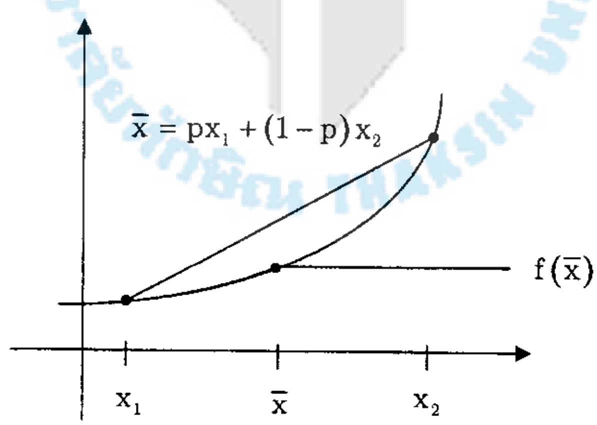
จากบทนิยามของฟังก์ชันคอนเวกซ์ และสมมติฐานของการอุปนัยจะได้

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j\right) &\leq p_n f\left(x_n\right) + \left(1-p_n\right) f\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{p_j}{1-p_n}x_j\right) \\ &\leq p_n f\left(x_n\right) + \left(1-p_n\right)\sum_{j=1}^{n-1}\frac{p_j}{1-p_n}f\left(x_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} p_j f\left(x_j\right) \end{aligned}$$

โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้อสมการ (2) เป็นจริงทุกจำนวนเต็มบวก n

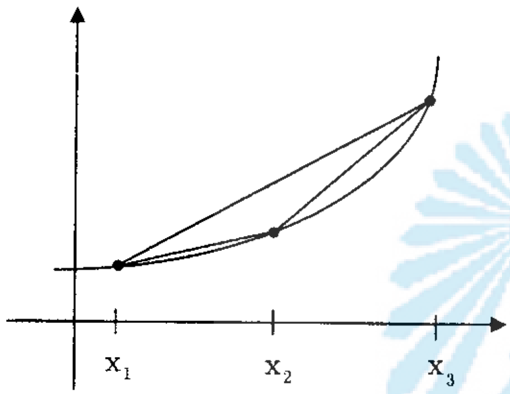
□

จากบทนิยามฟังก์ชันคอนเวกซ์ ฟังก์ชัน f คอนเวกซ์ ก็ต่อเมื่อ f สอดคล้องกับเงื่อนไข (a) หรือ (b) ซึ่งในเชิงเรขาคณิตแสดงได้ดังรูป 2.1

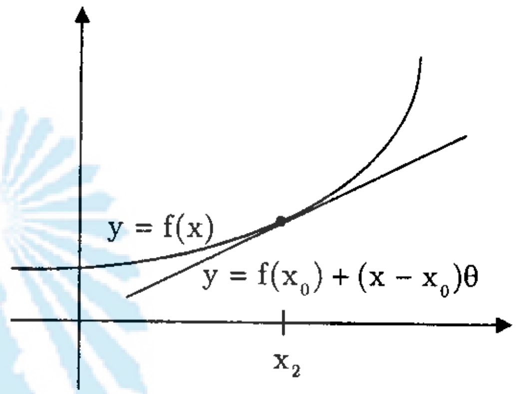


รูป 2.1

นอกจากนี้ฟังก์ชันคอนเวกซ์ยังพิจารณาได้อีกหลายลักษณะ เช่น เส้นตัดเส้นโค้งที่ติดต่อกัน (sequential secant) มีความชันเพิ่ม ดังแสดงในรูป 2.2 และจะพิสูจน์ในทฤษฎีบท 2.3



รูป 2.2



รูป 2.3

และที่โดดเด่นประการหนึ่ง คือ ฟังก์ชัน f คอนเวกซ์ ก็ต่อเมื่อ ที่แต่ละจุด p บนกราฟ จะมีเส้นตรงที่ผ่าน p และอยู่ใต้กราฟของ f ดังแสดงในรูป 2.3 และจะพิสูจน์ในทฤษฎีบท 2.4

ทฤษฎีบท 2.3 ให้ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ ถ้า $a<s<t<u<b$ แล้ว

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\le\frac{f(u)-f(s)}{u-s}\le\frac{f(u)-f(t)}{u-t} \tag{3}$$

การพิสูจน์ จาก

$$t=\frac{t-s}{u-s}u+\frac{u-t}{u-s}s$$

และ f เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ จะได้

$$f(t)\le\left(\frac{t-s}{u-s}\right)f(u)+\left(\frac{u-t}{u-s}\right)f(s)$$

ดังนั้น

$$(u-s)f(t)\le(t-s)f(u)+(u-t)f(s)$$

หรือ

$$(u-s)\big(f(t)-f(s)\big)\le(t-s)\big(f(u)-f(s)\big)$$

ซึ่งได้อสมการทางซ้ายของ (3) สำหรับอสมการทางขวาของ (3) ก็พิสูจน์ในทำนองเดียวกัน

□

ทฤษฎีบท 2.4 ถ้า $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ หาอนุพันธ์ได้ แล้ว f เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ ก็ต่อเมื่อ

$$f(y)\ge f(x)+f'(x)(y-x) \tag{4}$$

สำหรับทุก $x,y\in(a,b)$

การพิสูจน์ สมมติ f เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ และ $x,\ y\in(a,b)$ สำหรับ $0<t\le 1$ จะได้ $x+t(y-x)\in(a,b)$ โดยสมมติฐานจะได้

$$f(x+t(y-x))\le(1-t)f(x)+tf(y)$$

หารทั้งสองข้างด้วย $t>0$ จะได้

$$f(y)\ge f(x)+\frac{f(x+t(y-x))-f(x)}{t}$$

หาลิมิตเมื่อ $t\to 0$ จะได้

$$f(y)\ge f(x)+f'(x)(y-x)$$

ในทางกลับกัน สมมติฟังก์ชัน f สอดคล้องกับ (4) สำหรับทุก $x,\ y\in(a,b)$ ที่ $x\ne y$ และ $0\le p\le 1$ ให้ $z=px+(1-p)y$ โดยประยุกต์ใช้ (4) สองครั้ง จะได้

$$f(x)\ge f(z)+f'(z)(x-z) \tag{5}$$

และ

$$f(y)\ge f(z)+f'(z)(y-z) \tag{6}$$

คูณ (5) ด้วย p และ คูณ (6) ด้วย $1-p$ แล้วบวกเข้าด้วยกัน จะได้

$$pf(x)+(1-p)f(y)\ge f(z)$$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์

$\square$

การทดสอบด้วยอนุพันธ์อันดับสองในทฤษฎีบทต่อไปนี้มีประโยชน์มากในการทดสอบฟังก์ชันคอนเวกซ์ แนวการพิสูจน์ได้จาก สตีล (Steele. 2004: 90 – 91)

ทฤษฎีบท 2.5 (Differential Condition for Convexity) ให้ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ถึงอนุพันธ์อันดับสอง และถ้า $f''(x)\ge 0$ สำหรับทุก $x\in(a,b)$ แล้ว f คอนเวกซ์บน (a,b)

การพิสูจน์ ให้ $x_0\in(a,b)$ โดยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส จะได้

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(u)\,du \tag{7}$$

สำหรับทุก $x\in(a,b)$ จากสมมติฐาน $f''(x)\ge 0$ จะได้ $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ให้ $a < x < y < b$, $0 < p < 1$ และ $q = 1 - p$ ประยุกต์ (7) เข้ากับ x, y และ $x_0 = px + qy$ พิจารณา

$$\Delta = pf(x) + qf(y) - f(px+qy)$$

ซึ่งสามารถเขียนใหม่ได้ในรูป

$$\Delta = q\int_{px+qy}^{y} f'(u)\,du - p\int_{x}^{px+qy} f'(u)\,du \tag{8}$$

สำหรับ $u \in [x, px+qy]$ จะได้ $f'(u) \le f'(px+qy)$ ดังนั้น

$$p\int_{x}^{px+qy} f'(u)\,du \le pq(y-x)f'(px+qy) \tag{9}$$

และสำหรับ $u \in [px+qy, y]$ จะได้ $f'(u) \ge f'(px+qy)$ ดังนั้น

$$q\int_{px+qy}^{y} f'(u)\,du \ge pq(y-x)f'(px+qy) \tag{10}$$

จาก (9) และ (10) จะได้

$$q\int_{px+qy}^{y} f'(u)\,du \ge p\int_{x}^{px+qy} f'(u)\,du$$

นั่นคือ $\Delta \ge 0$ หรือ

$$pf(x) + qf(y) - f(px+qy) \ge 0$$

ซึ่งจะได้

$$f(px+qy) \le pf(x) + qf(y)$$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์บน (a, b)

$\square$

ตัวอย่างฟังก์ชันคอนเวกซ์ที่สำคัญ (EDM. 1993: 88B) ฟังก์ชันคอนเวกซ์แท้บน $\mathbb{R}^+$

(i) x^a ($a > 1$ หรือ $a < 0$)

(ii) $-x^a$ ($0 < a < 1$)

(iii) $-\log x$

(iv) $x \log x$

และ ฟังก์ชันคอนเวกซ์แท้บน $\mathbb{R}$

(v) x^{2n} ($n \ge 1$)

(vi) $\exp(x)$

(vii) $\log(1+e^x)$

(viii) $\sqrt{a^2+x^2}$ ($a \ne 0$)

3. การประยุกต์ ในส่วนนี้จะนำเสนอการประยุกต์ฟังก์ชันคอนเวกซ์ และอสมการเจนเสน เพื่อพิสูจน์อสมการอื่น และโจทย์ปัญหาที่น่าสนใจ

3.1 อสมการมัชฌิมเลขคณิต – เรขาคณิต (AM – GM inequality) จาก $\exp(x)$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ และจากอสมการเจนเสน จะได้ว่า ทุกจำนวนจริง $y_1, y_2, \ldots, y_n$ และทุกจำนวนจริงบวก $p_j,\ j = 1,2,\ldots,n$ ที่ $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ จะได้

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{n} p_j y_j\right) \le \sum_{j=1}^{n} p_j e^{y_j}$$

โดยให้ $x_j = e^{y_j},\ j = 1, 2, \ldots, n$ จะได้

$$\prod_{j=1}^{n} x_j^{p_j} \le \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \tag{11}$$

กรณี $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \dfrac{1}{n}$ จะได้

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \tag{12}$$

3.2 อสมการโฮลเดอร์ (Hölder's inequality) สำหรับ $p > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ และ $x_i, y_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n$ จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{13}$$

ในการพิสูจน์ พิจารณาฟังก์ชัน $-\log(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ ดังนั้น สำหรับ $a, b > 0$ และ $0 \le \lambda \le 1$ จะได้

$$\begin{aligned} -\log\left(\lambda a + (1-\lambda) b\right) &\le \lambda(-\log a) + (1-\lambda)(-\log b) \\ &= -\log\left(a^{\lambda} b^{1-\lambda}\right) \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$a^{\lambda} b^{1-\lambda} \le \lambda a + (1-\lambda) b$$

ให้

$$a = \frac{|x_i|^p}{A},\ b = \frac{|y_i|^q}{B},\ \lambda = \frac{1}{p}$$

โดยที่

$$A = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p,\ B = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q$$

จะได้

$$\left(\frac{|x_i|^p}{A}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{|y_i|^q}{B}\right)^{\frac{1}{q}} \le \frac{|x_i|^p}{pA}+\frac{|y_i|^q}{qB}$$

หาผลรวมบน i จะได้

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i||y_i|}{A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}} \le \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

นั่นคือ จะได้อสมการโฮลเดอร์ตามต้องการ

3.3 อสมการมินคอฟสกี (Minkowski's inequality) ให้ $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ และ $p \ge 1$ จะได้

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{14}$$

การพิสูจน์อสมการมินคอฟสกีทำได้หลายวิธี แต่วิธีที่ริสซ์ (F. Riesz 1880 – 1956) ได้พิสูจน์ไว้โดยผ่านทางอสมการโฮลเดอร์เป็นวิธีหนึ่งที่น่าสนใจ และอยู่ในแนวทางที่เราได้พัฒนามาแล้ว การพิสูจน์เริ่มด้วยแตกผลบวกออกเป็นสองส่วน (อาศัยอสมการอิงรูปสามเหลี่ยม)

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p \le \sum_{i=1}^{n}|x_i||x_i+y_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}|y_i||x_i+y_i|^{p-1} \tag{15}$$

กรณี $p = 1$ จะได้อสมการ (14) โดยทันที ดังนั้นเราจะพิจารณาเมื่อ $p > 1$ โดยประยุกต์อสมการโฮลเดอร์เข้ากับแต่ละพจน์ทางขวามือของ (15) จะได้อสมการสำหรับพจน์แรก คือ

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i||x_i+y_i|^{p-1} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{(p-1)}{p}}$$

และอสมการสำหรับพจน์ที่สองคือ

$$\sum_{i=1}^{n}|y_i||x_i+y_i|^{p-1} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{(p-1)}{p}}$$

โดยให้

$$A=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ B=\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

และ

$$C=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{(p-1)}{p}}$$

จะได้

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i + y_i|^p \le AC + BC$$

เมื่อหารด้วย $C \neq 0$ จะได้

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ตามต้องการ

ในสองตัวอย่างถัดไปเป็นการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันคอนเวกซ์และอสมการเจนเสน สำหรับการพิสูจน์อสมการซึ่งจะพบในโจทย์การแข่งขันคณิตศาสตร์ระดับชาติ ระดับภูมิภาค และระดับนานาชาติซึ่งรู้จักกันในชื่อ คณิตศาสตร์โอลิมปิก (International Mathematical Olympiad – IMO)

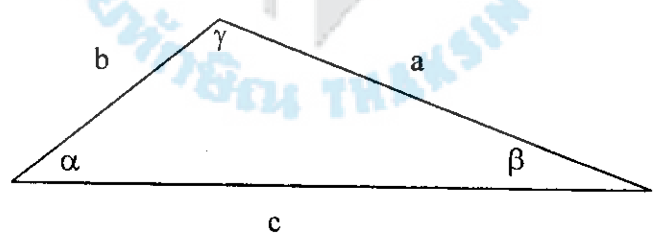
3.4 (1998 Korean National Olympiad) สำหรับจำนวนจริงบวก a, b และ c ที่ $a + b + c = abc$ จงแสดงว่า

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{3}{2}$$

และพิจารณาว่าการเท่ากันเกิดขึ้นเมื่อใด

Solution (Andreescu & Feng. 2000: 86) Let $\alpha = \tan^{-1} a$, $\beta = \tan^{-1} b$, $\gamma = \tan^{-1} c$ and the given conditions become $\alpha, \beta, \gamma > 0, \alpha + \beta + \gamma = \pi$. What we want is now $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}$ which follows from Jensen's inequality.

หมายเหตุ (อธิบายเพิ่มเติม) พิจารณาสามเหลี่ยมที่มีด้าน a, b และ c ตรงข้ามมุม α, β และ γ ดังรูป 3.1



รูป 3.1

จะได้ $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ ดังนั้น $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ โดยตรีโกณมิติจะได้

$$\tan\gamma = \tan\left(\pi-(\alpha+\beta)\right) = \tan\pi - \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

แต่ $\tan\pi = 0$ ดังนั้นจะได้

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

ซึ่งเมื่อ เปลี่ยนตัวแปรจะได้ตามสมมติฐานของโจทย์ นิพจน์ทางซ้ายในโจทย์คือ $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$ ฟังก์ชันโคไซน์ (cos) เป็นฟังก์ชันนูน (concave) บน $[0,\pi]$ ดังนั้น $-\cos(x)$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ จาก $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ โดยอสมการเจนเสน จะได้

$$\frac{-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma}{3} \ge -\cos\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$$

นั่นคือ

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma \le \frac{3}{2}$$

หรือ

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \le \frac{3}{2}$$

ตามต้องการ

3.5 (42nd IMO) จงพิสูจน์

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \ge 1$$

ทุกจำนวนจริงบวก a, b และ c

Solution (Author Unknown) Note that $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ is convex for positive x. Recall weighted Jensen's inequality :

$$af(x)+bf(y)+cf(z) \ge (a+b+c)f\left(\frac{ax+by+cz}{a+b+c}\right)$$

Apply this to get

$$\text{LHS} \ge \sqrt{\frac{(a+b+c)^3}{a^3+b^3+c^3+24abc}} \ge 1$$

The last step follows because by the AM – GM inequality, we have

$$(a+b+c)^3 \ge a^3+b^3+c^3+24abc$$

4. สรุปและเสนอแนะ (Conclusion and Recommendation) เสาหลักสามเสาของทฤษฎีอสมการ คือ positivity ($x^2 \geq 0$ ทุก $x \in \mathbb{R}$) monotonicity [(i) $x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$ (ii) $x < y \rightarrow x + z < y + z$ และ (iii) $x < y \wedge z > 0 \rightarrow xz < yz$] และ convexity สองหลักแรกแทรกในทุกส่วนของการพิสูจน์อสมการ โดยปริยาย ในบทความเชิงปริทัศน์นี้ได้นำเสนอเสาที่สาม โดยได้แสดงลักษณะสำคัญ การทดสอบการเป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์โดยอนุพันธ์จะได้ฟังก์ชันพื้นฐานจำนวนหนึ่งที่ใช้เป็นเครื่องมือในการพิสูจน์อสมการต่าง ๆ ต่อไป ในส่วนของการประยุกต์ได้ใช้ฟังก์ชันคอนเวกซ์กับอสมการเจนเสนพิสูจน์อสมการคลาสสิกต่าง ๆ นอกเหนือจากการพิสูจน์วิธีอื่น ๆ ซึ่งมีมากมายหลายวิธี นอกจากอสมการมัชฌิมเลขคณิต – เรขาคณิต อสมการ โคชี – ชวาร์ซ แล้ว อสมการเจนเสนเป็นหนึ่งในเครื่องมือสำคัญในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับอสมการ ซึ่งจะปรากฏเสมอในโจทย์แข่งขันทั้งระดับประเทศ ระดับภูมิภาค และระดับนานาชาติ ดังนั้นจึงควรได้เผยแพร่ให้รู้จักกันอย่างกว้างขวางต่อไป

5. คำขอบคุณ (Acknowledgement) ขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิที่บรรณาธิการเชิญเป็นผู้อ่านและประเมินคุณภาพบทความ และให้คำแนะนำในการปรับปรุงแก้ไข ขอขอบคุณภาควิชาคณิตศาสตร์ที่เอื้อเฟื้ออุปกรณ์และสิ่งอำนวยความสะดวกในการเตรียมบทความ

6. เอกสารอ้างอิง(References)

(1) ไสว นวลตรณี. 2528. *การวิเคราะห์เชิงจริง*. กรุงเทพฯ: สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย.

(2) Andreescu, T. and Z. Feng (ed.) 2000. *Mathematical Olympiads 1998 – 1999*. Washington, DC. The Mathematical Association of America.

(3) Barra, G. de 1974. *Introduction to Measure Theory*. New York: Van Nostrand Reinhold.

(4) *Encyclopedic Dictionary of Mathematics (EDM)*. (Ito, K. ed.) 1993. Singapore: Toppan.

(5) Kazarinoff, N. D. 1961. *Analytic Inequality*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

(6) Steele. J. M. 2004. *The Cauchy – Schwarz Master Class*. Cambridge: Cambridge University Press.

(7) Stephen, B. and L. Vendenberghe. 2004. *Convex Optimization*. Cambridge: Cambridge University Press.