บทความวิชาการ

อสมการมัชฌิมเลขคณิต-เรขาคณิต : การพิสูจน์หกวิธี

A.M.-G.M. Inequality : Six Proofs

ศิริกัญญา กิตติวุฒิ
นิสิต ป. บัณฑิต มหาวิทยาลัยทักษิณ
รองศาสตราจารย์ ดร. สมใจ จิตพิทักษ์
ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

1. บทนำ (Introduction) มัชฌิม (mean) ของจำนวนจริงบวกสองจำนวน a, b มีหลายรูปแบบ อาทิ $(a+b)/2$, $\sqrt{ab}$, $2\Big/\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, $(b-a)\big/\ln\left(b/a\right)$ และ $\sqrt{\left(a^2+b^2\right)/2}$ เป็นต้น มัชฌิมเหล่านี้มีชื่อเรียกตามลำดับคือ มัชฌิมเลขคณิต (arithmetic mean : A.M.) มัชฌิมเรขาคณิต (geometric mean : G.M.) มัชฌิมฮาร์มอนิก (harmonic mean : H.M.) มัชฌิมลอการิทึม (logarithmic mean : L.M.) และมัชฌิมกำลังสอง (quadratic mean : Q.M.) กรณีมัชฌิมลอการิทึมนิยามได้ก็ต่อเมื่อ $a \neq b$ ความสัมพันธ์ระหว่างมัชฌิมที่กล่าวแล้วนี้คือ เมื่อ $a, b > 0, a \neq b$

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \qquad \text{(a)}$$

หรือ

$$H(a,b) < G(a,b) < L(a,b) < A(a,b) < Q(a,b) \qquad \text{(a}'\text{)}$$

กรณีมีจำนวนจริงบวกมากกว่าสองจำนวน มัชฌิมที่กล่าวข้างต้นนิยามได้ ยกเว้นมัชฌิมลอการิทึม ดังนั้นนัยทั่วไปของอสมการ (a) คือ เมื่อ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก จะได้

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}} \qquad \text{(b)}$$

หรือ

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n \qquad \text{(b}'\text{)}$$

การเท่ากันเกิดขึ้นเมื่อ $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

สารัตถะสำคัญของอสมการ (b) อยู่ที่คู่กลางคือ

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = A_n \qquad (c)$$

หรือสั้น ๆ

$$G \leq A \qquad (c')$$

อสมการ (c) รู้จักกันในชื่อ **อสมการมัชฌิมเลขคณิต-เรขาคณิต** (arithmetic-geometric mean inequality : A.M.-G.M. inequality)

การพิสูจน์อสมการมัชฌิมเลขคณิต-เรขาคณิตทำได้หลายวิธี ในบทความเชิงปริทัศน์ (expository review article) นี้ได้รวบรวมนำเสนอการพิสูจน์หกวิธี เริ่มที่วิธีคลาสสิกที่โคชี (A. L. Cauchy1789-1857)ได้พิสูจน์ไว้เมื่อร้อยกว่าปีที่แล้วจนถึงวิธีใหม่ ๆ ที่เพิ่งเผยแพร่ในวารสารวิชาการต่างประเทศ โดยบางวิธีน่าจะยังไม่เป็นที่รู้จักกันแพร่หลาย

2. พื้นฐานเบื้องต้น (Preliminaries) อสมการพื้นฐานที่สำคัญที่สุดในคณิตศาสตร์คือ $x^2 \geq 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x ดังนั้นสำหรับ $a, b > 0$ จะได้ $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ หรือ

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad (d)$$

นั่นคือ

$$A(a,b) \geq G(a,b) \qquad (d')$$

การเท่ากันเกิดขึ้นเมื่อ a = b

โดยประยุกต์ (d) เข้ากับ $1/a$, $1/b$ จะได้

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\Big/2 \geq \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}}$$

หรือ

$$\sqrt{ab} \geq 2\Big/\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \qquad (e)$$

นั่นคือ

$$G(a,b) \geq H(a,b) \qquad (e')$$

จาก (d) จะได้ $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ดังนั้น

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \frac{a^2+2ab+b^2}{4}$$

หรือ

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \tag{f}$$

นั่นคือ

$$Q(a,b) \geq A(a,b) \tag{f'}$$

ในการพิสูจน์อสมการ

$$G(a,b) < L(a,b) < A(a,b) \tag{g}$$

เมื่อ $0 < a < b$ วิธีหนึ่ง (ในหลาย ๆ วิธี) คือ ใช้อสมการ

$$\tanh x < x < \sinh x \tag{h}$$

โดยที่

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{และ} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{h'}$$

แทน $x = \ln\left(b/a\right)$ ใน (h) จะได้ (g)

ในการพิสูจน์ตอนต่อไปบางวิธี ต้องใช้ความรู้พื้นฐานจากแคลคูลัสบางประการต่อไปนี้

ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง $f(x) = e^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มแท้บน $\mathbb{R}$ (เซตจำนวนจริง) นั่นคือ

$$e^\alpha < e^\beta \text{ ก็ต่อเมื่อ } \alpha < \beta \tag{i}$$

สำหรับทุก $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

อนุกรมแมคลอริน (Maclaurin's series) สำหรับ e^x คือ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \quad |x| < \infty \tag{j}$$

ดังนั้น

$$e^x \geq 1 + x \tag{j'}$$

ฟังก์ชัน $f : I \to \mathbb{R}$ โดยที่ I เป็นช่วงและ $I \subseteq \mathbb{R}$ และ f หาอนุพันธ์ได้ถึงอนุพันธ์อันดับสองบน I จะได้ $f(x_0)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ (absolute maximum) ของ f บน I ก็ต่อเมื่อ $f'(x_0) = 0$ และ $f''(x_0) < 0$

3. ผลลัพธ์หลัก (Main Results) จุดหมายสำคัญของหัวข้อนี้คือ การพิสูจน์ทฤษฎีบทอสมการมัชฌิมเลขคณิต-เรขาคณิต จากหลากหลายวิธีรวมหกวิธี

ทฤษฎีบท (อสมการมัชฌิมเลขคณิต-เรขาคณิต : A.M.-G.M. inequality) ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก จะได้

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \tag{1}$$

หรือ

$$G_n \leq A_n \tag{1'}$$

การเท่ากันเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อ $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

การพิสูจน์

(I) การพิสูจน์ (1) โดยวิธี**อุปนัยเชิงอนันต์** (transfinite induction) เครดิตเบื้องต้นได้แก่ โคชี (A. L. Cauchy 1789-1857) แนวการพิสูจน์ต่อไปนี้ได้จาก คาซารินอฟ (Kazarinoff, 1961)

เราพิสูจน์ (1) หรือ

$$a_1 \cdots a_n \leq \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}\right)^n \tag{1''}$$

เมื่อ n อยู่ในรูปกำลังของ 2 ก่อน นั่นคือเมื่อ $n = 2^k$, k เป็นจำนวนเต็มบวก

เมื่อ $k = 1$ นั่นคือ $n = 2$ จะได้

$$a_1 a_2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2$$

ดังนั้น

$$a_1 a_2 \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2$$

ในทำนองเดียวกัน

$$a_3 a_4 \leq \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2$$

เมื่อ $k = 2$ นั่นคือ $n = 4$ จะได้

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \leq \left[\left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)\right]^2 \leq \left[\left(\frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2}\right)\right]^2$$

$$= \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4$$

สมมติให้ อสมการ $A_n \geq G_n$ เป็นจริงเมื่อ $n = 2^k$, $k \geq 2$ ต้องการพิสูจน์ว่า $A_n \geq G_n$ เป็นจริงเมื่อ $n = 2^{k+1}$ นั่นคือ

$$a_1 \cdots a_{2^{k+1}} = (a_1 \cdots a_{2^k})(a_{2^k+1} \cdots a_{2^{k+1}}) \leq \left(\frac{a_1 + \ldots + a_{2^k}}{2^k}\right)^{2^k} \left(\frac{a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^k}\right)^{2^k}$$

แต่

$$\left(\frac{a_1 + \ldots + a_{2^k}}{2^k}\right)\left(\frac{a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^k}\right) \leq \left(\frac{a_1 + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^2$$

เพราะฉะนั้น

$$a_1 \cdots a_{2^{k+1}} \leq \left(\frac{a_1 + \ldots + a_{2^{k+1}}}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}$$

นั่นคือ $A_n \geq G_n$ เป็นจริงเมื่อ $n = 2^{k+1}$ โดยหลักการอุปนัย จะได้ $A_n \geq G_n$ เป็นจริงเมื่อ $n = 2^k$ ทุก $k \in \mathbb{N}$

ถ้า n ไม่อยู่ในรูป 2^k ให้ 2^m คือจำนวนเต็มบวกจำนวนแรกที่มากกว่า n และให้ $2^m - n = k$ ดังนั้นโดยการประยุกต์ของการพิสูจน์ข้างต้นเข้ากับ $a_1, \ldots, a_n, \underbrace{A_n, \ldots, A_n}_{k \text{ terms}}$,

จะได้

$$(a_1 \cdots a_n)A_n^k \leq \left(\frac{a_1 + \ldots + a_n + kA_n}{2^m}\right)^{2^m} = \left(\frac{nA_n + kA_n}{2^m}\right)^{2^m} = A_n^{2^m}$$

รือ $G_n^n A_n^k \leq A_n^{2^m}$ ซึ่งจะได้ $G_n^n \leq A_n^n$ ดังนั้น

$$G_n \leq A_n$$

าะ $G_n = A_n$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = \ldots = a_n$

) การพิสูจน์ (1) โดยวิธี**อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์** (mathematical induction) ต่อไปนี้ แนวคิดหลักได้ ก ฮิลแมน และอเล็กซานเดอร์สัน (Hillman and Alexanderson, 1966)

กรณี $n = 1$ จะได้ว่า $A_1 = a_1$ และ $G_1 = a_1$ ดังนั้น

$$A_1 = a_1 \geq a_1 = G_1$$

กรณี $n = 2$ จาก $\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \geq 0$ จะได้

$$A_2 = \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2} = G_2$$

และ $A_2 = G_2$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = a_2$

สมมติให้ อสมการ $A_n \geq G_n$ เป็นจริงเมื่อ $n = k$ ต้องการพิสูจน์ว่า $A_{k+1} \geq G_{k+1}$ ถ้า $a_1 = \ldots = a_k = a_{k+1} = a$ แล้ว $A_{k+1} = \dfrac{(k+1)a}{k+1} = \sqrt[k+1]{a^{k+1}} = G_{k+1}$ นั่นคือ $A_{k+1} \geq G_{k+1}$ ในกรณี $0 < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_{k+1}$ และ $a_1 < a_{k+1}$ จะได้ว่า

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k < a_{k+1} + \ldots + a_{k+1} = ka_{k+1}$$

ดังนั้น

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} < a_{k+1}$$

นั่นคือ $A_k < a_{k+1}$ เพราะฉะนั้น

$$A_{k+1} = \frac{a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1}}{k+1} = \frac{kA_k + a_{k+1}}{k+1}$$

$$= \frac{(k+1)A_k + (a_{k+1} - A_k)}{k+1} = A_k + \frac{a_{k+1} - A_k}{k+1}$$

ให้ $(a_{k+1} - A_k)/(k+1) = p$ จาก $a_{k+1} > A_k$ จะได้ว่า $\dfrac{a_{k+1} - A_k}{k+1} > 0$ หรือ $p > 0$

ดังนั้น จาก $A_{k+1} = A_k + p$ จะได้ว่า

$$(A_{k+1})^{k+1} = (A_k + p)^{k+1} = (A_k)^{k+1} + (k+1)(A_k)^k p + \ldots + p^{k+1}$$

จาก $p > 0$ และ $A_k > 0$ จะได้ว่า แต่ละพจน์ทางขวามีค่าเป็นบวก และ

$$(A_{k+1})^{k+1} > (A_k)^{k+1} + (k+1)p(A_k)^k$$

แทน $(k+1)p = a_{k+1} - A_k$ จะได้ว่า

$$(A_{k+1})^{k+1} > (A_k)^{k+1} + a_{k+1}(A_k)^k - (A_k)^{k+1}$$

$$(A_{k+1})^{k+1} > a_{k+1}(A_k)^k$$

จากสมมติฐาน $A_k \geq G_k$ จะได้ว่า

$$(A_{k+1})^{k+1} > a_{k+1}(A_k)^k \geq a_{k+1}(G_k)^k = a_{k+1}(a_1 a_2 \ldots a_k) = (G_{k+1})^{k+1}$$

นั่นคือ

$$(A_{k+1})^{k+1} > (G_{k+1})^{k+1}$$

ซึ่งจะได้ว่า $A_{k+1} > G_{k+1}$ โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $A_n \geq G_n$ ทุก $n \in \mathbb{N}$

(III) การพิสูจน์ (1) วิธีที่สาม แนวคิดหลักได้จาก สตรอมเบอร์ก (Stromberg, 1980) โดยอาศัยบทตั้ง (lemma) ต่อไปนี้

บทตั้ง ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และให้ $b_1, \ldots, b_n$ เป็นจำนวนจริงบวกที่ไม่เท่ากันทั้งหมด โดยที่ผลคูณ $b_1 b_2 \ldots b_n = 1$ จะได้ $b_1 + b_2 + \ldots + b_n > n$

การพิสูจน์ กรณี $n = 2$ เนื่องจาก $b_1 \neq b_2$ จะได้

$$0 < \left(\sqrt{b_1} - \sqrt{b_2}\right)^2 = b_1 + b_2 - 2\sqrt{b_1 b_2} = b_1 + b_2 - 2$$

ดังนั้นบทตั้งเป็นจริงเมื่อ $n = 2$

สมมติบทตั้งเป็นจริงที่ $n = k,\ k > 1$ เราจะพิสูจน์ว่าบทตั้งเป็นจริงที่ $n = k + 1$ เนื่องจาก b_j ไม่เท่ากันทั้งหมด สมมติให้ $b_1 \leq b_j \leq b_{k+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, k+1)$ และ $b_1 < b_{k+1}$ ดังนั้น

$$b_1 < 1 < b_{k+1} \tag{2}$$

เพราะมิฉะนั้นจะได้ $b_1 b_2 \ldots b_{k+1} \neq 1$ จากสมมติฐานบทตั้งเป็นจริงที่ $n = k$ และ $\left(b_1 b_{k+1}\right) b_2 \ldots b_k = 1$ จะได้

$$b_1 b_{k+1} + b_2 + \ldots + b_k \geq k \tag{3}$$

โดยที่สมการเกิดได้เมื่อแต่ละพจน์ทางซ้ายของ (3) เท่ากัน และต่างเท่ากับ 1 จาก (2) จะได้

$$\left(b_{k+1} - 1\right)\left(1 - b_1\right) > 0 \tag{4}$$

จาก (3) และ (4) จะได้

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \ldots + b_k + b_{k+1} &= \left(b_1 b_{k+1} + b_2 + \ldots + b_k\right) \\ &\quad + 1 + \left(b_{k+1} - 1\right)\left(1 - b_1\right) \\ &\geq k + 1 + \left(b_{k+1} - 1\right)\left(1 - b_1\right) > k + 1 \end{aligned}$$

ดังนั้นบทตั้งเป็นจริงเมื่อ $n = k + 1$ โดยการอุปนัยจะได้บทตั้งเป็นจริงทุก $n > 1$

□

ในการพิสูจน์ (1) สมมติ $n > 1$ และ $a_1 < a_n$ ให้ $G = G_n$ จะได้ $G > 0$ ให้ $b_j = a_j/G,\ j = 1, 2, \ldots, n$ จะได้

$$b_1 b_2 \ldots b_n = a_1 a_2 \ldots a_n / G^n = 1$$

โดยที่ $b_j > 0$ ทุก j และ $b_1 < b_n$ ดังนั้นโดยบทตั้ง จะได้

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n > n$$

หรือ

$$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)\Big/G > n$$

นั่นคือ

$$A_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} > G = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} = G_n$$

(IV) การพิสูจน์ (1) วิธีที่สี่ พอลยา (G. Polya, 1887-1985) ได้พิสูจน์อสมการมัชฌิมเลขคณิต-เรขาคณิต (ราวปี 1934) โดยใช้สองพจน์แรกของอนุกรมแมคลอรินสำหรับ e^x นับเป็น "very ingenious proof" (Alexanderson, 2000) รายละเอียดมีดังนี้

Given that $A = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$, $G = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n}$, $e^x \geq 1 + x$, $a_i \geq 0$, consider the inequalities $e^{\frac{a_i}{A}-1} \geq \frac{a_i}{A}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Then $\prod_{i=1}^{n} e^{\frac{a_i}{A}-1} \geq \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A}$ so $e^{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A}\right)-n} \geq \frac{G^n}{A^n}$, $e^{\frac{nA}{A}-n} \geq \frac{G^n}{A^n}$. Then $A^n \geq G^n$ and $A \geq G$.

(V) การพิสูจน์ (1) วิธีที่ห้า แนวคิดหลักได้จาก ชุมเบอร์เกอร์ (Schaumberger, 1989) โดยอาศัยบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง ถ้า $x > 0$ แล้ว $e^x \geq x^e$

การพิสูจน์ ให้ $x > 0$ และ $f(x) = x^{1/x}$ หาอนุพันธ์ (ใส่ ln แล้วหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย) จะได้

$$f'(x) = x^{1/x}\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right) = f(x)\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)$$

ซึ่ง $f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\ln x = 1$ หรือ $x = e$ และ

$$f''(x) = f'(x)\left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right) + f(x)\left(\frac{-3 + 2\ln x}{x^3}\right)$$

ซึ่ง $f''(e) < 0$ ดังนั้น $f(x) = x^{1/x}$ มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ที่ $x = e$ ซึ่งจะได้

$$e^{1/e} \geq x^{1/x}$$

หรือ

$$e^x \geq x^e \tag{5}$$

การเท่ากันเกิดได้ก็ต่อเมื่อ $x = e$

□

ในการพิสูจน์ (1) แทน $x = a_1e/G,\ x = a_2e/G, \ldots, x = a_ne/G$ ใน (5) ในบทตั้งและคูณอสมการที่ได้เข้าด้วยกัน จะได้

$$e^{\left(a_1e/G+\ldots+a_ne/G\right)} \geq \left(\frac{a_1e}{G}\cdots\frac{a_ne}{G}\right)^e \tag{6}$$

หรือ

$$e^{nAe/G} \geq \left(\frac{e^nG^n}{G^n}\right)^e = e^{ne} \tag{7}$$

จากสมบัติของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง จะได้

$$nAe/G \geq ne$$

หรือ $A \geq G$ นั่นคือ

$$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}$$

(VI) การพิสูจน์ (1) โดยวิธีที่หก แนวคิดได้จากบทความของ Pecaric และ Varosanec (1997) ซึ่งอ้างบทความของ Sandor และ Szabo (1996) (ต่างมาจากประเทศโครเอเชีย) ว่าได้พบอสมการ

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{b_i}{a_i}\right)^{b_i} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i}\right)^{\sum_{i=1}^{n} b_i} \tag{8}$$

และ

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n} \leq \prod_{i=1}^{n} b_i^{b_i/\sum_{i=1}^{n} b_i} \tag{9}$$

โดยที่ $a_i, b_i > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ เป็นอสมการใหม่

อสมการ (8) สมมูลกับอสมการ (10):

$$G_n = \prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i/\sum_{i=1}^{n} p_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} p_ia_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = A_n \tag{10}$$

กล่าวคือ เมื่อแทนใน (8) ด้วย $b_i := p_i,\ a_i := p_ia_i$ จะได้ (10) และในทางกลับกัน แทนใน (10) ด้วย $a_i := a_i/b_i,\ p_i := b_i$ จะได้ (8)

□

[หมายเหตุ ใน(10) ถ้า p_i ทุกตัวเท่ากับ 1 จะได้ $G_n \leq A_n$ แต่ถ้า p_i ไม่เท่ากับ 1 ทั้งหมด (10) จะเป็น Weighted A.M.-G.M.]

4. สรุปและเสนอแนะ (Conclusion and Recommendations) ในบทความนี้ได้นำเสนอการพิสูจน์อสมการมัชฌิมเลขคณิต-เรขาคณิต วิธีต่าง ๆ รวมหกวิธี โดยเริ่มที่วิธีคลาสสิกของโคชี ซึ่งให้แนวพิสูจน์ไว้เมื่อเกือบสองศตวรรษก่อน จนถึงวิธีพิสูจน์ใหม่ ๆ ในช่วงทศวรรษนี้ ยังมีวิธีพิสูจน์วิธีอื่นอีก ซึ่งอาจค้นได้จากเอกสารอ้างอิง ผู้อ่านอาจลองพิสูจน์อสมการ

$$H_n \leq G_n \text{ และ } A_n \leq Q_n$$

เป็นผลสืบเนื่องจาก $G_n \leq A_n$ หรือดัดแปลงการพิสูจน์จากบางแนวทางที่ได้นำเสนอมาแล้ว

5. คำขอบคุณ (Acknowledgement) ขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิที่บรรณาธิการเชิญเป็นผู้อ่านและประเมินคุณภาพบทความ (referee) และให้คำแนะนำในการปรับปรุงแก้ไข และขอขอบคุณภาควิชคณิตศาสตร์ที่เอื้อเฟื้ออุปกรณ์และสิ่งอำนวยความสะดวกในการเตรียมบทความ

6. เอกสารอ้างอิง (References)

(1) Alexanderson, G. L. 2000. *The Random Walks of George Polya.* Washington DC. : The Mathematical Association of America.

(2) Hillman, A. P. and Alexanderson, G. L. 1966. *Algebra Through Problem Solving.* Boston : Allyn and Bacon, Inc.

(3) Kazarinoff, N. D. 1961. *Analytic Inequalities.* New York : Holt, Rinehart and Winston.

(4) Pecaric, J. and Varosanec, S. 1997. A New Proof of the Arithmetic Mean –The Geometric Mean Inequality. *J. Math. Anal. Appl.* 215 : 577-578.

(5) Schaumberger, N. 1989. The A.M.-G.M. Inequality via $x^{1/x}$. *College Math. Journal.* 20(4):320.

(6) Stromberg, K. 1980. *An Introduction to Classical Real Analysis.* California : Wadsworth.