รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

ชื่อโครงการวิจัย

การพัฒนาทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไปพร้อมการประยุกต์

Development of Fixed Point Theory for Solving Generalized Variational Inequality Problems with Applications

โดย สุวิชา อิ่มนาง
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากมหาวิทยาลัยทักษิณ
ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2557

สัญญาเลขที่ R01-2557A10502049

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

ชื่อโครงการวิจัย

การพัฒนาทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไปพร้อมการประยุกต์

Development of Fixed Point Theory for Solving Generalized Variational Inequality Problems with Applications

โดย สุวิชา อิ่มนาง

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากมหาวิทยาลัยทักษิณ

ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2557

คำรับรองคุณภาพ

รายงานวิจัยเรื่อง **การพัฒนาทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไปพร้อมการประยุกต์**

ผู้วิจัย **สุวิชา อิ่มนาง**

สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยทักษิณ ขอรับรองว่ารายงานวิจัยฉบับนี้ได้ผ่านการประเมินจากผู้ทรงคุณวุฒิแล้ว มีความเห็นว่าผลงานวิจัยฉบับนี้มีคุณภาพอยู่ในเกณฑ์

- [x] ดีมาก
- [ ] ดี
- [ ] ปานกลาง
- [ ] พอใช้
- [ ] ต่ำ

....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พรพันธุ์ เขมคุณาศัย)

ผู้อำนวยการสถาบันวิจัยและพัฒนา

7 กันยายน 2558

มหาวิทยาลัยทักษิณ

ชื่อโครงการวิจัย (ภาษาไทย) การพัฒนาทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไปพร้อมการประยุกต์

(ภาษาอังกฤษ) Development of Fixed Point Theory for Solving Generalized Variational Inequality Problems with Applications

ชื่อผู้วิจัย อาจารย์ ดร. สุวิชา อิ่มนาง สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ โทรศัพท์ 074-693972 ต่อ 2579

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากงบประมาณแผ่นดิน มหาวิทยาลัยทักษิณ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2557 จำนวนเงิน 150,000 บาท ระยะเวลาทำการวิจัย 1 ปี ตั้งแต่ 1 พฤศจิกายน พ.ศ. 2556 ถึง 31 ตุลาคม พ.ศ. 2557

บทคัดย่อ

ในโครงการวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาขั้นตอนวิธีทำซ้ำแบบใหม่เพื่อหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของปัญหาอสมการการแปรผันสำหรับฟังก์ชัน relaxed cocoercive และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชัน nonexpansive ในปริภูมิ 2- uniformly smooth และ uniformly convex Banach space นอกจากนี้ผู้วิจัยพิสูจน์การลู่เข้าแบบเข้มของขั้นตอนวิธีทำซ้ำสู่เฉลยร่วมของปัญหาดังกล่าวโดยไม่ใช้เงื่อนไข weakly sequentially continuous duality mapping ดังนั้นผลงานที่ได้จากโครงการวิจัยนี้จึงเป็นการพัฒนาและขยายองค์ความรู้ของงานวิจัยเป็นจำนวนมาก

Abstract

In this research project, we study a new iterative method for finding a common element of the set of solutions of a new general system of variational inequalities problem for two different relaxed cocoercive mappings and the set of fixed points of a nonexpansive mapping in a real 2- uniformly smooth and uniformly convex Banach spaces. We prove the strong convergence of the proposed iterative method without the condition of weakly sequentially continuous duality mapping. Our result improves and extends the corresponding results announced by many others.

ประกาศคุณูปการ

โครงการวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากงบประมาณแผ่นดิน มหาวิทยาลัยทักษิณ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2557 ทั้งนี้ผู้เขียนขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิที่อ่าน และวิพากษ์เอกสารต้นฉบับ พร้อมทั้งแนะนำข้อบกพร่องของรายงานวิจัยฉบับนี้ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

สุวิชา อิ่มนาง

สิงหาคม 2558

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

การพัฒนาทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไปพร้อมการประยุกต์ เป็นการวิจัยเบื้องต้น (basic research) ที่มุ่งแสวงหาข้อเท็จจริงเกี่ยวกับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย (nonexpansive) ซึ่งจำเป็นอย่างยิ่งต้องอาศัยความรู้ของทฤษฎีจุดตรึง (fixed point theory) ทฤษฎีการลู่เข้า (convergence theory) และทฤษฎีการประมาณค่า (approximation theory) เพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับปัญหาวิจัย รวมถึงสาระสำคัญอื่นๆที่เกี่ยวข้อง ดังนั้นในบทนี้จะให้รายละเอียดที่สำคัญของที่มาและความสำคัญของปัญหาวิจัย วัตถุประสงค์ของการวิจัย ขอบเขตของการวิจัย และประโยชน์ของการวิจัย โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญ ดังต่อไปนี้

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหาวิจัย

ปัจจุบันความก้าวหน้าทางวิชาการด้านคณิตศาสตร์โดยเฉพาะอย่างยิ่งการพัฒนาทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ๆนั้น นับว่ามีบทบาทและสำคัญมากต่อการพัฒนาเทคโนโลยีสมัยใหม่ ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นและสำคัญอย่างยิ่งต่อการพัฒนาประเทศ โดยเฉพาะทฤษฎีบทที่ได้จากการศึกษาปัญหาในทางคณิตศาสตร์นั้น สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างกว้างขวาง อาทิ นักเศรษฐศาสตร์ได้นำทฤษฎีของ"ปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุด (optimization problem)" มาประยุกต์ใช้กับการหาจุดที่ทำให้ได้กำไรสูงสุดหรือเพื่อหาจุดคุ้มทุน รวมถึงการใช้ทรัพยากรให้เกิดประโยชน์สูงสุด นักบัญชีนำมาประยุกต์ใช้กับการคำนวณทิศทางการขนส่งเพื่อให้เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องพบว่าทฤษฎีของปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุด เป็นส่วนหนึ่งของปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า "**ปัญหาอสมการการแปรผัน** (variational inequality problem)" นอกจากนี้จากการศึกษาพบว่า ปัญหาอสมการการแปรผันสามารถประยุกต์ใช้เพื่อแก้ไขปัญหาอีกหลายปัญหา เช่น ปัญหาดุลยภาพการจราจรทางเครือข่าย (traffic network equilibrium problem) ปัญหาดุลยภาพราคาเชิงพื้นที่ (spatial price equilibrium problem) ปัญหาดุลยภาพตลาดผู้ขายน้อยราย (oligopolistic market equilibrium problem) ปัญหาดุลยภาพทางการเงิน (financial equilibrium problem) ปัญหาดุลยภาพการอพยพ (migration equilibrium problem) ปัญหาเครือข่ายเกี่ยวกับสิ่งแวดล้อม (environmental network problem) และปัญหาเครือข่ายความรู้ (knowledge network problem) ทำให้ในช่วง 10 ปีที่ผ่านมามีนักวิจัยจำนวนมาก ได้พัฒนาระบบปัญหาอสมการการแปรผัน และสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่า (approximation) หาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert space) และปริภูมิบานาค (Banach space)

ปัญหาอสมการการแปรผัน คือ การหาสมาชิก $u \in C$ ที่ทำให้

$$\langle Au, v - u\rangle \geq 0, \quad \forall v \in C$$

เมื่อ C เป็นเซตย่อยของปริภูมิฮิลเบิร์ต H และ A เป็นฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้นที่ส่งจาก C ไปยัง H จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องพบว่าการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน มีความเกี่ยวข้องกับการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาจุดตรึง ทำให้นักวิจัยจำนวนมากศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำแบบต่างๆ เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน รวมทั้งพัฒนาระบบใหม่ของปัญหาอสมการการแปรผัน อาทิ ในปี ค.ศ. 2006 Aoyama และคณะ [ ] เป็นนักวิจัยกลุ่มแรกที่เริ่มศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค โดยพิจารณาปัญหาการหาสมาชิก $x^* \in C$ ที่ทำให้

$$\langle Ax^*, j(x - x^*)\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C$$

โดยที่ C เป็นเซตย่อยของปริภูมิบานาค X และ $A : C \to X$ เป็นฟังก์ชัน accretive operator ต่อมาในปี ค.ศ. 2010 Yao และคณะ [ ] พิจารณาระบบปัญหาแบบใหม่ที่ครอบคลุมระบบปัญหาที่ศึกษาโดย Aoyama และคณะ [ ] และเรียกระบบปัญหาแบบใหม่นี้ว่า **ระบบของอสมการการแปรผันทั่วไปในปริภูมิบานาค** (system of general variational inequalities in a real Banach space) ซึ่งเป็นปัญหาการหาสมาชิก $(x^*, y^*) \in C \times C$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle Ay^* + x^* - y^*, j(x - x^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle Bx^* + y^* - x^*, j(x - y^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \end{cases}$$

เมื่อ $A, B : C \to X$ เป็นสองฟังก์ชันใดๆ สำหรับการประมาณค่าหาผลเฉลยของระบบปัญหาทั่วไปของอสมการการแปรผัน Yao และคณะ Ceng ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาดังกล่าวกรณีที่ A และ B เป็นฟังก์ชัน α และ β-inverse strongly accretive ตามลำดับ ในปีเดียวกัน Imnang และ Suantai [ ] ศึกษาระบบใหม่ของปัญหาอสมการการแปรผันซึ่งครอบคลุมระบบปัญหาที่ศึกษาโดย Yao และคณะ และเรียกระบบปัญหาแบบใหม่นี้ว่า **ระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค** (new general system of variational inequalities in a Banach space) ซึ่งเป็นปัญหาการหาสมาชิก $(x^*, y^*, z^*) \in C \times C \times C$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle \lambda_1 A_1 y^* + x^* - y^*, j(x - x^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \lambda_2 A_2 z^* + y^* - z^*, j(x - y^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \lambda_3 A_3 x^* + z^* - x^*, j(x - z^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \end{cases}$$

เมื่อ $A_i : C \to X$ เป็นสามฟังก์ชันใดๆ และ $\lambda_i > 0$ สำหรับ $i = 1, 2, 3$ สำหรับการประมาณค่าหาผลเฉลยของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค Imnang และ Suantai ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาดังกล่าว กรณีที่ A_i เป็นฟังก์ชัน α_i-inverse strongly accretive สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3$ ตามลำดับ

จากงานวิจัยดังกล่าวยังเป็นที่สงสัยกันว่ากรณีที่ A_i เป็นฟังก์ชัน relaxed (c_i, d_i)-cocoercive สำหรับ $i = 1, 2, 3$ ตามลำดับ เราจะประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาคและปัญหาจุดตรึงได้อย่างไร จึงเป็นที่มาของการศึกษาโครงการวิจัยเรื่อง"การพัฒนาทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไปพร้อมการประยุกต์" ดังนั้นเพื่อจะได้มาซึ่งข้อสรุปดังกล่าว ผู้วิจัยจึงได้ศึกษาเพื่อหาข้อเท็จจริงซึ่งสามารถจะนำความรู้ไปใช้เป็นหลักการหรือทฤษฎีบทเพื่อการอ้างอิงและประยุกต์ใช้ให้เกิดความก้าวหน้าทางวิชาการต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

โครงการวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ที่สำคัญ 3 ประการ คือ **ประการแรก** เพื่อสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค กรณีที่ A_i $(i = 1, 2, 3)$ เป็นฟังก์ชัน relaxed (c_i, d_i)-cocoercive และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชัน nonexp -ansive **ประการที่สอง** เพื่อหาเงื่อนไขการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นสำหรับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค กรณีที่ A_i $(i = 1, 2, 3)$ เป็นฟังก์ชัน relaxed (c_i, d_i)-cocoercive และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันnonexpansive และ**ประการสุดท้าย** เพื่อพิสูจน์ทฤษฎีการลู่เข้าของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค กรณีที่ A_i $(i = 1, 2, 3)$ เป็นฟังก์ชัน relaxed (c_i, d_i)-cocoercive และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชัน nonexpansive

1.3 ขอบเขตการวิจัย

โครงการวิจัยนี้ได้ศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค และปัญหาจุดตรึง โดยที่ระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค ศึกษากรณีที่ A_i เป็นฟังก์ชัน relaxed (c_i, d_i)-cocoercive สำหรับ $i = 1, 2, 3$ ตามลำดับ และปัญหาจุดตรึงได้ศึกษาการประมาณค่าหาจุดตรึงของฟังก์ชัน noxexpansive

1.4 ประโยชน์ที่ได้รับ

โครงการวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค กับปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชัน noexpansive โดยประโยชน์ที่จะได้รับ 5 ประการ คือ **ประการแรก** ได้ระเบียบวิธีทำซ้ำใหม่เพื่อใช้ในการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค กับปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชัน noexpansive **ประการสอง** ทราบเงื่อนไขการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นสู่ผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค กับปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชัน noexpansive **ประการสาม** ได้ทฤษฎีบทการลู่เข้าซึ่งสามารถนำไปใช้เป็นทฤษฎีในการอ้างอิงเพื่อให้เกิดความก้าวหน้าทางวิชาการ **ประการสี่** ได้องค์ความรู้ไปตีพิมพ์เผยแพร่ในวารสารวิชาการ อีกทั้งสร้างความเข้มแข็งและความก้าวหน้าทางวิชาการของนักวิจัยคณิตศาสตร์ไทย และ**ประการสุดท้าย** ช่วยเสริมสร้างความมั่นใจให้แก่นักวิชาการโดยเฉพาะอาจารย์ทางคณิตศาสตร์เพื่อการเรียนการสอนที่มีคุณภาพ

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เนื้อหาในบทนี้จะให้รายละเอียดที่สำคัญของงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการประมาณค่าจุดตรึง ปัญหาอสมการการแปรผันและระบบทั่วไปของอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ต ปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค รวมถึงทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องที่จำเป็นต้องใช้ในการวิจัย โดยมีรายละเอียดและเนื้อหาสาระสำคัญดังต่อไปนี้

2.1 การประมาณค่าจุดตรึง

กำหนดให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต พร้อมด้วยผลคูณภายใน $\langle .,. \rangle$ และให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของ H จะเรียกฟังก์ชัน $T : C \to C$ ว่า nonexpansive ถ้า $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ สำหรับแต่ละ $x, y \in C$ เซตจุดตรึง (fixed point set) ของ T นิยามโดย $F(T) = \{x \in C : Tx = x\}$ ปัญหาการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาจุดตรึงเริ่มศึกษาในปี ค.ศ. 1967 โดย Halpern [ ] ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาจุดตรึงของฟังก์ชัน T โดยที่ T เป็นฟังก์ชัน nonexpansive บนเซต C และศึกษาลำดับ $\{x_n\}$ ดังนี้: ให้ $x_1 \in C$,

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n)Tx_n, \quad n \geq 1 \tag{2.1.1}$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ในช่วง $[0, 1]$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข ดังต่อไปนี้

$$C1 : \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0; \quad C2 : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

Halpern ศึกษาการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำ ( ) ในกรณีที่ $\alpha_n = n^{-\sigma}$, $\sigma \in (0, 1)$ และ $u = 0$ และได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ได้ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงของฟังก์ชัน T ต่อมาในปี ค.ศ. 1977 Lions [ ] ได้พัฒนาผลงานของ Halpern ซึ่งศึกษาเพียงกรณีที่ลำดับ $\alpha_n = n^{-\sigma}$, $\sigma \in (0, 1)$ เท่านั้น โดย Lions ศึกษากรณีที่ $\{\alpha_n\}$ เป็นลำดับใดๆ ในช่วง $[0, 1]$ โดยที่ $\{\alpha_n\}$ สอดคล้องเงื่อนไข ดังต่อไปนี้

$$C1 : \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0; \quad C2 : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty; \quad C3 : \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha_{n+1} - \alpha_n|}{\alpha_{n+1}^2} = 0$$

Lions พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ที่กำหนดโดยสมการ ( ) ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงของฟังก์ชัน T ในปริภูมิฮิลเบิร์ต H ต่อจากนั้น ในปี ค.ศ. 1994 Reich [ ] ได้พัฒนาผลงานของ Halpern จากที่ศึกษาการลู่

เข้าในปริภูมิฮิลเบิร์ต H มาศึกษาในปริภูมิ uniformly smooth ภายใต้เงื่อนไขเดียวกันของลำดับ $\{\alpha_n\}$ Reich พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงของฟังก์ชัน T นอกจากนี้ Reich ให้ข้อสังเกตุที่สำคัญว่า ลำดับของจำนวนจริง $\{\alpha_n\}$ ที่ศึกษาทั้งในผลงานของ Halpern และ Lions นั้น ยังไม่ครอบคลุม กรณีที่ $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$ ดังนั้นปัญหาที่นักวิจัยต้องการศึกษาเพิ่มเติม คือ จะวางเงื่อนไขอย่างไรลำดับ $\{\alpha_n\}$ ถึงจะครอบคลุมกรณี $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$ ด้วย เพื่อตอบปัญหาดังกล่าว Wittmann [ ] ได้ศึกษาทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำ ( ) ในปริภูมิฮิลเบิร์ต H โดย Wittmann พิสูจน์ว่า ถ้า $\{\alpha_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$C1: \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0; \quad C2: \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty; \quad C3: \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$$

แล้วลำดับ $\{x_n\}$ จะลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงของฟังก์ชัน nonexpansive T

2.2 ปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ต

เนื้อหานี้จะให้รายละเอียดที่สำคัญของการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผันและการประมาณค่าหาผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน โดยมีสาระสำคัญดังต่อไปนี้

2.2.1 ปัญหาอสมการการแปรผัน

ปัญหาอสมการการแปรผัน เริ่มศึกษาในปีค.ศ. 1964 โดย Stampacchi [ ] โดยศึกษาปัญหาที่เรียกว่า "**อสมการการแปรผันแบบดั้งเดิม** (*classical variational inequality*)" คือ ปัญหาการหาสมาชิก $x^* \in C$ ที่ทำให้

$$\langle Ax^*, y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \tag{2.2.1}$$

เซตของผลเฉลยทั้งหมดของปัญหา ( ) เขียนแทนด้วย $VI(C, A)$ จากระบบปัญหา ( ) เป็นที่ทราบว่า x^* เป็นผลเฉลยของระบบปัญหา ( ) ก็ต่อเมื่อ $x^* = P_C(x^* - \lambda Ax^*)$ เมื่อ $\lambda > 0$ และ P_C เป็นภาพฉายระยะทาง (metric projection) นั่นแสดงให้เห็นว่า ปัญหาอสมการการแปรผันมีความเกี่ยวข้องกับปัญหาจุดตรึง นอกจากนี้มีปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งเกี่ยวข้องกับปัญหาอสมการการแปรผัน อาทิ ปัญหาอสมการการแปรผันแบบไม่คอนเวกซ์ ปัญหาอสมการการแปรผันแบบผสม โดยสามารถศึกษารายละเอียดเพิ่มเติมได้จากเอกสาร ดังต่อไปนี้ Yao et al. [ ] Ceng et al. [--] Chang et al. [ ] Noor [--] Peng และ Yao [--] Plubtieng และ Punpaeng [ ] Zeng และ Yao [ ] Zhao และ He [ ] สำหรับการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผันนั้น เริ่มศึกษาจากปริภูมิยูคลิดมีมิติจำกัด ($H = \mathbb{R}^n$) เป็นปริภูมิแรก โดยศึกษาภายใต้สมมุติฐาน C เป็นเซตย่อยปิด และคอนเวกซ์ของ $\mathbb{R}^n$ ต่อมาในปี ค.ศ. 1976 Korpelevich [ ] สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำที่เรียกว่า **วิธีเอกซตราเกรเดียนต์** (extragradient method) โดยกำหนดลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ดังนี้:

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda Ax_n), \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda Ay_n) \end{cases}$$

สำหรับทุกค่า $n = 0, 1, 2, \ldots$ เมื่อ $A : C \to \mathbb{R}^n$ เป็นฟังก์ชัน monotone และ k-Lipschitz continuous และ $\lambda \in (0, 1/k)$ ภายใต้สมมุติฐาน $VI(C, A) \neq \emptyset$ Korpelevich ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$

ลู่เข้าสู่ผลเฉลยค่าเดียวกันของปัญหาอสมการการแปรผัน ( ) จากนั้นในปี ค.ศ. 2003 Takahashi และ Toyoda [ ] สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมสำหรับปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชัน nonexpansive และปัญหาอสมการการแปรผัน โดยสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ $\{x_n\}$ ดังนี้:

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)SP_C(x_n - \lambda_n Ax_n)$$

เมื่อ $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$, $\{\lambda_n\} \subset (0,2\alpha)$ และ $S : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน nonexpansive P_C เป็นภาพฉายระยะทาง และ $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน $\alpha-$inverse strongly monotone โดยที่ Takahashi และToyoda ได้พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่งกำหนดโดย (8) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่สมาชิกร่วมของปัญหาจุดตรึง และปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ต ต่อมาในปี ค.ศ. 2006 Nadezhkina และ Takahashi [ ] สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาสมาชิกร่วมของปัญหาจุดตรึงสำหรับฟังก์ชัน nonexpansive และผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน สำหรับฟังก์ชัน monotone และ k-Lipschitz continuous ศึกษาลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ดังนี้:

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n Ax_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)SP_C(x_n - \lambda_n Ay_n) \end{cases} \tag{2.2.2}$$

เมื่อ $\{\lambda_n\} \subset [a,b]$ และ $\{\alpha_n\} \subset [c,d]$ สำหรับบางจำนวนจริง $c,d \in (0,1)$ นอกจากนี้ Nadezhkina และTakahashi ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ซึ่งนิยามโดย ( ) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่สมาชิก $z \in F(S) \cap VI(C,A)$ เมื่อ $z = \lim_{n\to\infty} P_{F(S)\cap VI(C,A)} x_n$ ต่อจากนั้นในปี ค.ศ. 2007 Yao และ Yao [ ] สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาสมาชิกร่วมของเซต $F(S) \cap VI(C,A)$ ภายใต้สมมุติฐาน $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α-inverse strongly monotone และ $S : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน nonexpansive โดยที่ $F(S) \cap VI(C,A) \neq \emptyset$ โดยนิยามลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ดังนี้:

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_n x_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n SP_C(y_n - \lambda_n Ay_n) \end{cases} \tag{2.2.3}$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ $\{\gamma_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ในช่วงปิด $[0,1]$ และ $\{\lambda_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วงปิด $[0,2\alpha]$ นอกจากนี้ Yao และ Yao ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ที่กำหนดโดย ( ) ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิก $z \in F(S) \cap VI(C,A)$ เมื่อ $z = P_{F(S)\cap VI(C,A)} u$

2.2.2 ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน

รายละเอียดของปัญหาอสมการการแปรผัน ผู้วิจัยได้ให้รายละเอียดไว้ในหัวข้อ ในหัวข้อนี้ผู้วิจัยจะให้รายละเอียดของปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ครอบคลุมปัญหาอสมการการแปรผัน นั่นคือ"**ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน** (general system of variational inequalities)" โดยในปี ค.ศ. 2008 Ceng et al. [ ] ศึกษาปัญหาการหาสมาชิก $(x^*, y^*) \in C \times C$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle \lambda Ay^* + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \mu Bx^* + y^* - x^*, x - y^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \end{cases} \tag{2.2.4}$$

เมื่อ λ และ μ เป็นสองจำนวนจริงบวก และ $A, B : C \to H$ เป็นสองฟังก์ชันใดๆ กรณีเฉพาะของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน จะเห็นว่า ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน $A = B$ แล้วระบบปัญหา ( ) จะลดรูปเป็นระบบปัญหาการหาสมาชิก $(x^*, y^*) \in C \times C$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle \lambda Ay^* + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \mu Ax^* + y^* - x^*, x - y^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C \end{cases}$$

ซึ่งเป็นระบบที่ศึกษาโดย Verma [ ] และเรียกระบบใหม่นี้ว่า "**ระบบใหม่ของอสมการการแปรผัน** (new system of variational inequalities)" นอกจากนี้ ถ้าเพิ่มเงื่อนไข ให้ $x^* = y^*$ แล้วระบบปัญหา ( ) จะลดรูปเป็นการหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน ในหัวข้อ ในการประมาณค่าหาผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน Ceng et al. [ ] ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาสมาชิกร่วมของผลเฉลยระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน สำหรับฟังก์ α และ β-inverse strongly monotone และเซตของจุดตรึงของฟังก์ชัน nonexpansive ในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำดังนี้: ให้ $x_1 = v \in C$ และ $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \mu B x_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda \in (0, 2\alpha), \mu \in (0, 2\beta)$ และ $\{a_n\}, \{b_n\} \subset [0, 1]$ ภายใต้การวางเงื่อนไขของลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ Ceng et al. พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิกร่วมของเซตของจุดตรึงของฟังก์ชัน nonexpansive S และผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ( ) ต่อมาในปี ค.ศ. 2010 Yao Liou และ Kang [ ] ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบปัญหา ( ) และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชัน nonexpansive S ในกรณีที่ $A, B : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α และ β-inverse strongly monotone ตามลำดับ โดย Yao Liou และ Kang สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ และ $\{z_n\}$ ดังนี้:

$$\begin{cases} z_n = P_C(x_n - \mu B x_n), \\ y_n = \alpha_n Q x_n + (1 - \alpha_n) P_C(z_n - \lambda A z_n), \\ x_{n+1} = \beta_n x_n + \gamma_n P_C(z_n - \lambda A z_n) + \delta_n S y_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda \in (0, 2\alpha), \mu \in (0, 2\beta)$ และ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ $\{\gamma_n\}$ $\{\delta_n\} \subset [0, 1]$ ภายใต้การวางเงื่อนไขของลำดับ$\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ $\{\gamma_n\}$ และ $\{\delta_n\}$ Yao Liou และ Kang พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิกร่วมของเซตของจุดตรึงของฟังก์ชัน nonexpansive S และผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ( )

2.3 ปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค

ให้ X เป็นปริภูมิบานาคเชิงจริง และ X^* เป็นปริภูมิคู่กัน (dual space) ของ X กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยของ X และ $T : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน นิยามฟังก์ชัน $J : X \to 2^{X^*}$ กำหนดโดย $J(x) = \{x^* \in X^* | \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2, \|x^*\| = \|x\|\}, \forall x \in X$ และเรียก J ว่าฟังก์ชันภาวะคู่กัน (duality mapping) สังเกตุว่า ถ้า X เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต แล้ว $J = I$ เมื่อ I เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ นอกจากนี้เรารู้ว่า ถ้า X เป็นปริภูมิ smooth แล้ว J จะเป็นฟังก์ชันค่าเดียว (single -valued) และเขียนแทนด้วย j

สำหรับฟังก์ชัน $f : C \to C$ จะกล่าวว่าเป็น *contraction* บน C ถ้ามีค่าคงที่ $\alpha \in (0, 1)$ ที่ทำให้ $\|f(x) - f(y)\| \leq \alpha\|x - y\|, \quad \forall x, y \in C$ และกำหนดให้ Π_C แทนเซตของทุก contractions บน C กล่าวคือ $\Pi_C = \{f | f : C \to C \text{ contraction}\}$ กำหนดให้ $A : C \to X$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้น จะเรียกฟังก์ชัน A ว่า

(i) *L-Lipschitz continuous* (หรือ *Lipschitzian*) ถ้ามีค่าคงที่ $L \geq 0$ ที่ทำให้
$\|Ax - Ay\| < L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in C;$

(ii) *accretive* ถ้ามี $j(x - y) \in J(x - y)$ ที่ทำให้
$\langle Ax - Ay, j(x - y) \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in C;$

(iii) α- *inverse strongly accretive* ถ้ามี $j(x-y) \in J(x-y)$ และ $\alpha > 0$ ที่ทำให้ $\langle Ax - Ay, j(x-y)\rangle \geq \alpha\|Ax - Ay\|^2, \quad \forall x, y \in C$;

(iv) *relaxed* (c,d)- *cocoercive* ถ้ามี $j(x-y) \in J(x-y)$ และค่าคงที่ $c, d \geq 0$ ที่ทำให้ $\langle Ax - Ay, j(x-y)\rangle \geq (-c)\|Ax - Ay\|^2 + d\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C$

เนื้อหาในหัวข้อ ได้ให้ความรู้ของปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ต ดังนั้นในหัวข้อนี้จะให้รายละเอียดที่สำคัญของปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค ดังนี้ ในปีค.ศ. 2006, Aoyama et al. [ ] เป็นผู้ริเริ่มศึกษาปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปในปริภูมิบานาค โดยกำหนดให้ $A : C \to X$ เป็นฟังก์ชัน accretive ปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปในปริภูมิบานาค คือการหาสมาชิก $x^* \in C$ ที่ทำให้

$$\langle Ax^*, j(x - x^*)\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C \tag{2.3.1}$$

ปัญหา ( ) เป็นปัญหาที่น่าสนใจมาก เนื่องจากมีความเชื่อมโยงกับปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้น และปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของฟังก์ชัน accretive ในปริภูมิบานาค ซึ่งสามารถหาข้อมูลเพิ่มเติมได้จากเอกสาร [--]

ในปีค.ศ. 2010, Yao et al. [ ] ศึกษาระบบของอสมการการแปรผันทั่วไปในปริภูมิบานาค ดังนี้ ให้ $A, B : C \to X$ เป็นฟังก์ชัน ปัญหาระบบของอสมการการแปรผันทั่วไปในปริภูมิบานาค คือ การหาสมาชิก $(x^*, y^*) \in C \times C$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle Ay^* + x^* - y^*, j(x - x^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle Bx^* + y^* - x^*, j(x - y^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

และเซตของผลเฉลยของปัญหา ( ) เขียนแทนด้วย Ω_1 นอกจากนี้ Yao et al ได้ศึกษาทฤษฎีการลู่เข้าของปัญหา ( ) ดังนี้

Theorem YNNLY. กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิ uniformly convex และ 2-uniformly smooth Banach space X ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข weakly sequentially continuous duality mapping ให้ Q_C เป็นฟังก์ชัน sunny nonexpansive retraction จาก X ไปทั่วถึง C กำหนดให้ $A, B : C \to X$ เป็นฟังก์ชัน α-inverse-strongly accretive และ β-inverse-strongly accretive ตามลำดับ โดยที่ $\alpha \geq K^2$ และ $\beta \geq K^2$ สมมุติให้ $\Omega_1 \neq \emptyset$ และ $x_0 \in C$ กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่เกิดจากขั้นตอนทำซ้ำดังนี้

$$\begin{cases} y_n = Q_C(x_n - Bx_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n Q_C(y_n - Ay_n), \quad n \geq 0. \end{cases}$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ และ $\{\gamma_n\}$ เป็นลำดับใน $(0, 1)$ ถ้าลำดับ $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ และ $\{\gamma_n\}$ สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1, \forall n \geq 0$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$;

(iii) $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty} \beta_n \leq 1$

แล้วลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $Q'u$ เมื่อ Q' เป็นฟังก์ชัน sunny nonexpansive retraction จาก C ไปทั่วถึง Ω_1

ต่อมาปี ค.ศ. 2011, Katchang และ Kumam [ ] ศึกษาระบบของอสมการการแปรผันทั่วไปในปริภูมิบานาคดังนี้ กำหนดให้ $A, B : C \to X$ เป็นสองฟังก์ชัน Katchang และ Kumam พิจารณาปัญหาการหาสมาชิก $(x^*, y^*) \in C \times C$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle \lambda A y^* + x^* - y^*, j(x - x^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \mu B x^* + y^* - x^*, j(x - y^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

และเซตผลเฉลยของปัญหา ( ) เขียนแทนด้วย Ω_2 นอกจากนี้ Katchang และ Kumam ได้พิสูจน์ทฤษฎีการลู่เข้าดังนี้

Theorem KK. ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิ uniformly convex และ 2-uniformly smooth Banach space X ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข weakly sequentially continuous duality mapping กำหนดให้ $S : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน nonexpansive และ Q_C เป็นฟังก์ชัน sunny nonexpansive retraction จาก X ไปทั่วถึง C กำหนดให้ $A, B : C \to X$ เป็นฟังก์ชัน β-inverse-strongly accretive และ γ-inverse-strongly accretive ตามลำดับ โดยที่ $\beta \geq \lambda K^2$ และ $\gamma \geq \mu K^2$ เมื่อ K เป็น 2-uniformly smooth constant of X ให้ f เป็นฟังก์ชัน contraction บน C พร้อมค่าสัมประสิทธิ์ $\alpha \in [0, 1)$ สมมุติให้ $F := \Omega_2 \bigcap F(S) \neq \emptyset$ และ $x_0 = x \in C$ กำหนดให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่เกิดจากขั้นตอนวิธีทำซ้ำ ดังนี้

$$\begin{cases} y_n = Q_C(x_n - \mu B x_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n S Q_C(y_n - \lambda A y_n), & n \geq 0. \end{cases}$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ และ $\{\gamma_n\}$ เป็นลำดับใน $(0, 1)$ ถ้าลำดับ $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ และ $\{\gamma_n\}$ สอดคล้องเงื่อนไข

(i) $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1, \forall n \geq 0;$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty;$

(iii) $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1$

แล้วลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\bar{x} = Q_F f(\bar{x})$ และ $(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นผลเฉลยของปัญหา ( ) เมื่อ $\bar{y} = Q_C(\bar{x} - \mu B \bar{x})$ และ Q_F เป็นฟังก์ชัน sunny nonexpansive retraction จาก C ไปทั่วถึง F

การประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหา ( ) โดยใช้ขั้นตอนวิธีทำซ้ำมีนักวิจัยศึกษาอย่างต่อเนื่อง และสามารถศึกษาข้อมูลเพิ่มเติมได้จากเอกสาร [--]

โครงการวิจัยนี้เราสนใจศึกษาปัญหาการหาสมาชิก $(x^*, y^*, z^*) \in C \times C \times C$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle \lambda_1 A_1 y^* + x^* - y^*, j(x - x^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \lambda_2 A_2 z^* + y^* - z^*, j(x - y^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \lambda_3 A_3 x^* + z^* - x^*, j(x - z^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C. \end{cases} \tag{2.3.4}$$

ซึ่งเรียกระบบใหม่นี้ว่า"**ระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค**" เมื่อ $A_i : C \to X$ เป็นฟังก์ชัน และ $\lambda_i > 0$ สำหรับ $i = 1, 2, 3$ กรณีเฉพาะจะเห็นว่า ถ้า $A_3 = 0$ และ $z^* = x^*$ แล้วปัญหา ( ) จะลดรูปเป็นปัญหา ( ) นอกจากนี้ ถ้าเพิ่มเงื่อนไขให้ $\lambda_i = 1$ สำหรับ $i = 1, 2$ แล้วปัญหา ( ) ลดรูปสู่ปัญหา ( )

โครงการวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ที่สำคัญเพื่อสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาจุดตรึง กับผลเฉลยของปัญหา ( ) กรณีที่ A_i เป็นฟังก์ชัน relaxed (c_i, d_i)-cocoercive สำหรับ $i = 1, 2, 3$ ตามลำดับ โดยรายละเอียดจะแสดงไว้ในเนื้อหาของบทที่

2.4 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

เนื้อหานี้จะให้รายละเอียดที่สำคัญของนิยาม ทฤษฎีบท บทตั้ง (Lemma) และองค์ความรู้อื่นๆ ที่จำเป็นกับการพิสูจน์ทฤษฎีการลู่เข้าในบทที่ โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญดังต่อไปนี้

กำหนดให้ X เป็นปริภูมิบานาค และ $U = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ เป็น unit sphere ของ X จะเรียกปริภูมิ X ว่า *uniformly convex* ถ้าสำหรับแต่ละ $\epsilon \in (0, 2]$ จะมีค่าคงตัว $\delta > 0$ ที่ทำให้สำหรับแต่ละ $x, y \in U$ โดยที่

$$\|x - y\| \geq \epsilon \quad \text{แล้ว} \quad \|\frac{x + y}{2}\| \leq 1 - \delta$$

จะเรียกฟังก์ชันนอร์มบน X ว่า *Gâteaux differentiable* ถ้าค่าลิมิตของ

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.4.1}$$

หาค่าได้สำหรับแต่ละ $x, y \in U$ และในกรณีนี้จะเรียกปริภูมิ X ว่า *smooth*
จะเรียกฟังก์ชันนอร์มบน X ว่า *uniformly Frechet differentiable norm* ถ้าค่าลิมิตของ (2.4.1) หาค่าได้แบบเอกรูป (uniform) สำหรับ $x, y \in U$ และกรณีนี้จะเรียกปริภูมิ X ว่า *uniformly smooth* กำหนดฟังก์ชัน $\rho : [0, \infty) \to [0, \infty)$ ซึ่งนิยามโดย

$$\rho(\tau) = \sup\{\frac{1}{2}(\|x + y\| + \|x - y\|) - 1 : x, y \in X, \|x\| = 1, \|y\| = \tau\}$$

จะเรียกฟังก์ชัน ρ ว่า *modulus of smoothness* ของ X เป็นที่ทราบว่า X เป็น uniformly smooth ก็ต่อเมื่อ $\lim_{\tau \to 0} \rho(\tau)/\tau = 0$ นอกจากนี้ถ้ากำหนดให้ q เป็นจำนวนจริงโดยที่ $1 < q \leq 2$ จะเรียกปริภูมิบานาค X ว่า *q-uniformly smooth* ถ้ามีค่าคงที่ $c > 0$ ที่ทำให้ $\rho(\tau) \leq c\tau^q$ สำหรับทุกค่า $\tau > 0$ นอกจากนี้สำหรับ $q > 1$ นิยามฟังก์ชัน $J_q : X \to 2^{X^*}$ กำหนดโดย

$$J_q(x) = \{f \in X^* : \langle x, f\rangle = \|x\|^q, \|f\| = \|x\|^{q-1}\}, \quad \forall x \in X$$

และเรียกฟังก์ชัน J_q ว่าฟังก์ชันคู่กันที่ถูกวางนัยทั่วไป (generalized duality mapping) กรณีเฉพาะจะเห็นว่า ถ้า $q = 2$ แล้วฟังก์ชัน J_2 จะเป็น *normalized duality mapping* (หรือ *duality mapping*) และโดยทั่วไปจะเขียนแทนด้วย $J_2 = J$ และถ้า X เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต แล้ว $J = I$ นอกจากนี้สมบัติที่สำคัญของฟังก์ชัน generalized duality mapping J_q ควรทราบมีดังนี้

(1) $J_q(x) = \|x\|^{q-2}J_2(x)$ สำหรับทุก $x \in X$ โดยที่ $x \neq 0$
(2) $J_q(tx) = t^{q-1}J_q(x)$ สำหรับทุก $x \in X$ และ $t \in [0, \infty)$
(3) $J_q(-x) = -J_q(x)$ สำหรับทุก $x \in X$

เป็นที่ราบกันว่า ถ้า X เป็นปริภูมิ smooth แล้วฟังก์ชัน J เป็นฟังก์ชันค่าเดียว และเขียนแทนด้วย j และเงื่อนไขที่สำคัญของฟังก์ชัน j ที่ใช้ในการศึกษาทฤษฎีการลู่เข้า คือ weakly sequentially continuous ซึ่งนิยามดังนี้ จะเรียก duality mapping j ว่า *weakly sequentially continuous* ถ้าสำหรับแต่ละลำดับ $\{x_n\} \subset X$ โดยที่ $x_n \to x$ จะได้ว่า $j(x_n) \to j(x)$ weakly-$*$ นอกจากนี้สมบัติที่สำคัญของเงื่อนไขนี้ คือ ถ้า X สอดคล้องเงื่อนไข weakly sequentially continuous duality mapping แล้ว X เป็นปริภูมิ smooth และศึกษารายละเอียดเพิ่มเติมได้จาก [ ]

การพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นในบทที่ จำเป็นต้องอาศัยบทตั้งที่สำคัญดังต่อไปนี้

บทตั้ง 2.4.1. *([ ]) ให้ X เป็นปริภูมิ q-uniformly smooth Banach space พร้อมค่าคงที่ $1 \leq q \leq 2$ จะได้ว่า*

$$\|x + y\|^q \leq \|x\|^q + q\langle y, J_q(x)\rangle + 2\|Ky\|^q$$

สำหรับ $x, y \in X$ เมื่อ K เป็น q-uniformly smooth constant ของ X

บทตั้ง 2.4.2. *([ ]) ให้ X เป็นปริภูมิบานาค จะได้ว่า*

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, j(x + y)\rangle, \quad \forall x, y \in X$$

เมื่อ $j(x + y) \in J(x + y)$

บทตั้ง 2.4.3. *([ ]) ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวกโดยที่*

$$a_{n+1} \leq (1 - \gamma_n)a_n + \delta_n, \quad n \geq 1$$

เมื่อ $\{\gamma_n\}$ เป็นลำดับใน $(0, 1)$ และ $\{\delta_n\}$ เป็นลำดับที่ทำให้

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$;

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \delta_n/\gamma_n \leq 0$ *or* $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n| < \infty$

แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิ smooth Banach space X และ D เป็นเซตย่อยของ C จะเรียกฟังก์ชัน $Q : C \to D$ ว่า *sunny* ถ้า

$$Q(Qx + t(x - Qx)) = Qx$$

เมื่อ $Qx + t(x - Qx) \in C$ สำหรับ $x \in C$ และ $t \geq 0$ และจะเรียกฟังก์ชัน $Q : C \to D$ ว่า *retraction* ถ้า $Qx = x$ สำหรับแต่ละ $x \in D$ นอกจากนี้จะเรียกฟังก์ชัน Q ว่า *sunny nonexpansive retraction* จาก C ไปทั่วถึง D ถ้าฟังก์ชัน Q เป็นทั้งฟังก์ชัน retraction จาก C ไปทั่วถึง D รวมทั้งเป็นฟังก์ชัน sunny และ nonexpansive นอกจากนี้จะเรียกเซตย่อย D ของ C ว่า sunny nonexpansive retraction ของ C ถ้ามีฟังก์ชัน sunny nonexpansive retraction จาก C ไปทั่วถึง D

ในข้อเท็จจริงเป็นที่ทราบกันดีว่า ถ้า X เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต แล้วฟังก์ชัน sunny nonexpansive retraction Q_C คือ metric projection จาก X ทั่วถึง C นั่นเอง

บทตั้ง 2.4.4. *([ ]) ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ของปริภูมิ smooth Banach space X กำหนดให้ D เป็นเซตย่อยของ C และ $Q : C \to D$ เป็นฟังก์ชัน retraction จะได้แต่ละข้อต่อไปนี้สมมูลกัน:*

(a) Q เป็นฟังก์ชัน sunny และ nonexpansive

(b) $\|Qx - Qy\|^2 \leq \langle x - y, j(Qx - Qy)\rangle\ \forall x, y \in C$

(c) $\langle x - Qx, j(y - Qx)\rangle \leq 0,\ \forall x \in C, y \in D$

บทตั้ง 2.4.5. *([ ]) ให้ X เป็นปริภูมิ strictly convex และ uniformly smooth กำหนดให้ $T : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน nonexpansive โดยที่ $F(T) \neq \emptyset$ จะได้ว่า $F(T)$ เป็น sunny nonexpansive retraction ของ C*

บทตั้ง 2.4.6. *([ ]) ให้ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตในปริภูมิบานาค X และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับใน $[0, 1]$ โดยที่ $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$ กำหนดให้ $x_{n+1} = (1 - b_n)y_n + b_n x_n$ สำหรับ $n \geq 1$ และ $\limsup_{n\to\infty}(\|y_{n+1} - y_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \leq 0$ จะได้ $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0$*

บทตั้ง 2.4.7. *([ ]) ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ของปริภูมิ strictly convex Banach space X กำหนดให้ T_1 และ T_2 เป็นฟังก์ชัน nonexpansive จาก C ไปยัง C โดยที่ $F(T_1)\bigcap F(T_2)\neq\emptyset$ กำหนดฟังก์ชัน S โดย*

$$Sx=\lambda T_1x+(1-\lambda)T_2x,\quad \forall x\in C$$

เมื่อ λ เป็นค่าคงตัวใน $(0,1)$ จะได้ว่า S เป็นฟังก์ชัน nonexpansive และ $F(S)=F(T_1)\bigcap F(T_2)$

บทตั้ง 2.4.8. *([ ]) ให้ X เป็นปริภูมิ real smooth และ uniformly convex Banach space กำหนดให้ $r>0$ จะได้ว่ามี strictly increasing, continuous และ convex function $g:[0,2r]\to\mathbb{R}$ ที่ทำให้ $g(0)=0$ และ $g(\|x-y\|)\leq\|x\|^2-2\langle x,j(y)\rangle+\|y\|^2$ สำหรับ $x,y\in B_r$*

บทตั้ง 2.4.9. *([ ]) ให้ X เป็นปริภูมิ uniformly smooth Banach space และ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ของ X กำหนดให้ $T:C\to C$ เป็นฟังก์ชัน nonexpansive โดยที่ $F(T)\neq\emptyset$ และให้ $f\in\Pi_C$ จะได้ว่าลำดับ $\{x_t\}$ นิยามโดย $x_t=tf(x_t)+(1-t)Tx_t$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิกใน $F(T)$ เมื่อ $t\to 0$ นอกจากนี้ ถ้านิยามฟังก์ชัน $Q:\Pi_C\to F(T)$ โดย $Q(f):=\lim_{t\to 0}x_t,\quad\forall f\in\Pi_C$ แล้ว $Q(f)$ แก้ปัญหาอสมการการแปรผัน:*

$$\langle (I-f)Q(f),j(Q(f)-p)\rangle\leq 0,\quad\forall f\in\Pi_C,\ p\in F(T)$$

บทตั้ง 2.4.10. *([ ]) ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิ 2-uniformly smooth Banach space X กำหนดฟังก์ชัน $A:C\to X$ เป็น relaxed (c,d)- cocoercive และ L_A- Lipschitzian จะได้ว่า*

$$\|(I-\lambda A)x-(I-\lambda A)y\|^2\leq\|x-y\|^2+2(\lambda cL_A^2-\lambda d+K^2\lambda^2L_A^2)\|x-y\|^2$$

เมื่อ $\lambda>0$ และ K เป็น 2-uniformly smooth constant ของ X ในข้อเท็จจริงจะเห็นว่า ถ้า $0<\lambda\leq\frac{d-cL_A^2}{K^2L_A^2}$ แล้ว $I-\lambda A$ เป็นฟังก์ชัน nonexpansive

การพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าจำเป็นอย่างยิ่งต้องอาศัยบทตั้งที่สำคัญ ดังนี้

บทตั้ง 2.4.11. *ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิ 2-uniformly smooth Banach space X พร้อมค่าคงตัว 2-uniformly smooth constant K กำหนดให้ Q_C เป็นฟังก์ชัน sunny nonexpansive retraction จาก X ไปทั่วถึง C สำหรับแต่ละ $i=1,2,3$ กำหนดให้ $A_i:C\to X$ เป็นฟังก์ชัน relaxed (c_i,d_i)-cocoercive และ L_i-Lipschitzian ให้ $G:C\to C$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย*

$$\begin{aligned}G(x)=Q_C\big[&Q_C\big(Q_C(x-\lambda_3A_3x)-\lambda_2A_2Q_C(x-\lambda_3A_3x)\big)\\&-\lambda_1A_1Q_C\big(Q_C(x-\lambda_3A_3x)-\lambda_2A_2Q_C(x-\lambda_3A_3x)\big)\big],\quad\forall x\in C\end{aligned}$$

ถ้า $0<\lambda_i\leq\frac{d_i-c_iL_i^2}{K^2L_i^2}$ สำหรับ $i=1,2,3$ แล้ว $G:C\to C$ เป็นฟังก์ชัน nonexpansive

พิสูจน์. สำหรับ $x, y \in C$ โดยบทตั้ง จะได้

$$
\begin{aligned}
\|G(x) - G(y)\| &= \|Q_C[Q_C(Q_C(I - \lambda_3 A_3)x - \lambda_2 A_2 Q_C(I - \lambda_3 A_3)x) \\
&\quad - \lambda_1 A_1 Q_C(Q_C(I - \lambda_3 A_3)x - \lambda_2 A_2 Q_C(I - \lambda_3 A_3)x)] \\
&\quad - Q_C[Q_C(Q_C(I - \lambda_3 A_3)y - \lambda_2 A_2 Q_C(I - \lambda_3 A_3)y) \\
&\quad - \lambda_1 A_1 Q_C(Q_C(I - \lambda_3 A_3)y - \lambda_2 A_2 Q_C(I - \lambda_3 A_3)y)]\| \\
&\le \|Q_C(Q_C(I - \lambda_3 A_3)x - \lambda_2 A_2 Q_C(I - \lambda_3 A_3)x) \\
&\quad - \lambda_1 A_1 Q_C(Q_C(I - \lambda_3 A_3)x - \lambda_2 A_2 Q_C(I - \lambda_3 A_3)x) \\
&\quad - [Q_C(Q_C(I - \lambda_3 A_3)y - \lambda_2 A_2 Q_C(I - \lambda_3 A_3)y) \\
&\quad - \lambda_1 A_1 Q_C(Q_C(I - \lambda_3 A_3)y - \lambda_2 A_2 Q_C(I - \lambda_3 A_3)y)]\| \\
&= \|(I - \lambda_1 A_1)Q_C(I - \lambda_2 A_2)Q_C(I - \lambda_3 A_3)x \\
&\quad - (I - \lambda_1 A_1)Q_C(I - \lambda_2 A_2)Q_C(I - \lambda_3 A_3)y\| \\
&\le \|x - y\|
\end{aligned}
$$

ดังนั้น G เป็นฟังก์ชัน nonexpansive □

บทตั้ง 2.4.12. *([ ]) ให้ X เป็นปริภูมิ smooth Banach space และ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของ X กำหนดให้ Q_C เป็นฟังก์ชัน sunny nonexpansive retraction จาก X ทั่วถึง C และ $A_i : C \to X$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้นใดๆ กำหนดให้ $x^*, y^*, z^* \in C$ จะได้ว่า (x^*, y^*, z^*) เป็นผลเฉลยของปัญหา ( ) ก็ต่อเมื่อ $x^* \in F(G)$, $y^* = Q_C(z^* - \lambda_2 A_2 z^*)$ และ $z^* = Q_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)$ เมื่อ G เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยบทตั้ง .*

จากข้อเท็จจริงและแนวคิดของการประมาณค่าหาผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาคและปัญหาจุดตรึงสำหรับฟังก์ชัน nonexpansive ดังนั้นในโครงการวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาคและปัญหาจุดตรึงสำหรับฟังก์ชัน nonexpansive รวมทั้งได้พิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้น โดยรายละเอียดจะแสดงไว้ในเนื้อหาของบทที่

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

เนื้อหาในบทนี้ ผู้วิจัยนำเสนอระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อใช้ในการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชัน nonexpansive พร้อมทั้งพิสูจน์ทฤษฎีการลู่เข้าสำหรับระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาดังกล่าว นอกจากนี้ได้ให้ตัวอย่างที่สำคัญของฟังก์ชันซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของทฤษฎีบทหลัก รวมถึงบทแทรกที่จำเป็นสำหรับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาจุดตรึงกับระบบของอสมการการแปรผันทั่วไปในปริภูมิบานาค ซึ่งเป็นองค์ความรู้ที่จำเป็นและสำคัญอย่างยิ่งกับการนำไปประยุกต์ใช้ ทั้งทางวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์และวิทยาศาสตร์ประยุกต์

3.1 ระเบียบวิธีประมาณค่าแบบใหม่

ระเบียบวิธีทำซ้ำที่ใช้ในการการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชัน nonexpansive โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญดังนี้: ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิบานาค X กำหนดให้ $x_1 \in C$ และ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} z_n = Q_C(x_n - \lambda_3 A_3 x_n), \\ y_n = Q_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n), \\ x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

เมื่อ $A_i : C \to X, Q_C : X \to C$ และ $S, f : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน, $\lambda_i > 0$ สำหรับ $i = 1, 2, 3$ และ $\{a_n\}, \{b_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $[0, 1]$ สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้า จะกล่าวรายละเอียดในเนื้อหาต่อไป

3.2 ทฤษฎีการลู่เข้าแบบเข้ม

การศึกษาทฤษฎีการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำ (3.1.1) สู่ผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาคและปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย จากการวิจัยพบทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ที่สำคัญดังต่อไปนี้

***ทฤษฎีบท* 3.2.1.** *ให้ X เป็นปริภูมิ uniformly convex และ 2-uniformly smooth Banach space พร้อมค่าคงตัว 2-uniformly smooth constant K กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็น*

เซตว่างของ X และ Q_C เป็นฟังก์ชัน sunny nonexpansive retraction จาก X ไปทั่วถึง C สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3$ สมมุติ $A_i : C \to X$ เป็นฟังก์ชัน relaxed (c_i, d_i)-cocoercive และ L_i-Lipschitzian โดยที่ $0 < \lambda_i < \frac{d_i - c_i L_i^2}{K^2 L_i^2}$ ให้ f เป็นฟังก์ชัน contraction พร้อมค่าคงตัว $\alpha \in (0, 1)$ และ $S : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน nonexpansive ที่ทำให้ $\Omega = F(S) \bigcap F(G) \neq \emptyset$ เมื่อ G เป็นฟังก์ชันที่นิยามในบทตั้ง กำหนดให้ $x_1 \in C$ และ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} z_n = Q_C(x_n - \lambda_3 A_3 x_n), \\ y_n = Q_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n), \\ x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1 \end{cases} \tag{3.2.1}$$

เมื่อ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นสองลำดับใน $(0, 1)$ ที่ทำให้

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$

จะได้ว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $q \in \Omega$ ซึ่งแก้ปัญหาอสมการการแปรผัน:

$$\langle q - f(q), j(q - p)\rangle \leq 0, \quad \forall f \in \Pi_C, \ p \in \Omega$$

พิสูจน์. การพิสูจน์ได้แบ่งออกเป็น 5 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นตอน 1. จะแสดงว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

ให้ $x^* \in \Omega$ และ $t_n = Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n)$ จากบทตั้ง จะได้

$$\begin{aligned} x^* = Q_C\big[&Q_C(Q_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*) - \lambda_2 A_2 Q_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)) \\ &- \lambda_1 A_1 Q_C(Q_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*) - \lambda_2 A_2 Q_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*))\big] \end{aligned}$$

กำหนดให้ $y^* = Q_C(z^* - \lambda_2 A_2 z^*)$ และ $z^* = Q_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)$ จะได้ $x^* = Q_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)$ และ

$$x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S t_n$$

จากบทตั้ง จะได้ $I - \lambda_i A_i$ $(i = 1, 2, 3)$ เป็นฟังก์ชัน nonexpansive เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \|t_n - x^*\| &= \|Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - Q_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\| \leq \|y_n - y^*\| \\ &= \|Q_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n) - Q_C(z^* - \lambda_2 A_2 z^*)\| \leq \|z_n - z^*\| \\ &= \|Q_C(x_n - \lambda_3 A_3 x_n) - Q_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)\| \leq \|x_n - x^*\| \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

และ $\|St_n - x^*\| \leq \|t_n - x^*\|$ จากอสมการ ( ) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &= \|a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S t_n - x^*\| \\ &\leq a_n \|f(x_n) - x^*\| + b_n \|x_n - x^*\| + (1 - a_n - b_n)\|t_n - x^*\| \\ &\leq a_n \|f(x_n) - x^*\| + (1 - a_n)\|x_n - x^*\| \\ &\leq a_n \alpha \|x_n - x^*\| + a_n \|f(x^*) - x^*\| + (1 - a_n)\|x_n - x^*\| \\ &= a_n \|f(x^*) - x^*\| + (1 - a_n(1 - \alpha))\|x_n - x^*\| \end{aligned}$$

โดยการอุปนัยจะได้ว่า

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leq \max\{\frac{\|f(x^*) - x^*\|}{1-\alpha}, \|x_1 - x^*\|\}$$

เพราะฉะนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต ผลทำให้ $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, $\{t_n\}$, $\{A_1 y_n\}$, $\{A_2 z_n\}$, $\{St_n\}$, $\{f(x_n)\}$ และ $\{A_3 x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตด้วย

ขั้นตอน 2. จะแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$

เนื่องจากฟังก์ชัน Q_C และ $I - \lambda_i A_i$ $(i = 1, 2, 3)$ เป็นฟังก์ชัน nonexpansive ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\|t_{n+1} - t_n\| &= \|Q_C(y_{n+1} - \lambda_1 A_1 y_{n+1}) - Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n)\| \\
&\leq \|y_{n+1} - y_n\| = \|Q_C(z_{n+1} - \lambda_2 A_2 z_{n+1}) - Q_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n)\| \\
&\leq \|z_{n+1} - z_n\| = \|Q_C(x_{n+1} - \lambda_3 A_3 x_{n+1}) - Q_C(x_n - \lambda_3 A_3 x_n)\| \\
&\leq \|x_{n+1} - x_n\| \qquad (3.2.3)
\end{aligned}$$

ให้ $w_n = \frac{x_{n+1} - b_n x_n}{1-b_n}$, $n \in \mathbb{N}$ จะได้ $x_{n+1} = b_n x_n + (1-b_n) w_n$ สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ และ

$$\begin{aligned}
w_{n+1} - w_n &= \frac{x_{n+2} - b_{n+1} x_{n+1}}{1 - b_{n+1}} - \frac{x_{n+1} - b_n x_n}{1 - b_n} \\
&= \frac{a_{n+1} f(x_{n+1}) + (1 - a_{n+1} - b_{n+1}) St_{n+1}}{1 - b_{n+1}} - \frac{a_n f(x_n) + (1 - a_n - b_n) St_n}{1 - b_n} \\
&= \frac{a_{n+1}}{1 - b_{n+1}}(f(x_{n+1}) - St_{n+1}) + \frac{a_n}{1 - b_n}(St_n - f(x_n)) + St_{n+1} - St_n \qquad (3.2.4)
\end{aligned}$$

จาก ( ), ( ) และ S เป็นฟังก์ชัน nonexpansive จะได้

$$\|w_{n+1} - w_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{a_{n+1}}{1 - b_{n+1}}\|f(x_{n+1}) - St_{n+1}\| + \frac{a_n}{1 - b_n}\|St_n - f(x_n)\|$$

จากอสมการนี้ และเงื่อนไข (C1), (C2) จะได้

$$\limsup_{n\to\infty} \|w_{n+1} - w_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \leq 0$$

ดังนั้นโดยบทตั้ง ทำให้ได้ว่า $\|x_n - w_n\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ เพราะฉะนั้น

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n\to\infty} (1 - b_n)\|w_n - x_n\| = 0 \qquad (3.2.5)$$

ขั้นตอน 3. จะแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} \|Sx_n - x_n\| = 0$

เนื่องจาก

$$x_{n+1} - x_n = a_n(f(x_n) - x_n) + (1 - a_n - b_n)(St_n - x_n)$$

เพราะฉะนั้น

$$\|St_n - x_n\| \to 0 \quad \text{เมื่อ} \quad n \to \infty \qquad (3.2.6)$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\lim_{n\to\infty}\|x_n - t_n\| = 0$ จากบทตั้ง [illegible] และ Q_C เป็นฟังก์ชัน nonexpansive จะได้

$$\begin{aligned}
\|z_n - z^*\|^2 &= \|Q_C(x_n - \lambda_3 A_3 x_n) - Q_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)\|^2 \\
&\leq \|x_n - x^* - \lambda_3(A_3 x_n - A_3 x^*)\|^2 \\
&\leq \|x_n - x^*\|^2 - 2\lambda_3\langle A_3 x_n - A_3 x^*, j(x_n - x^*)\rangle \\
&\quad + 2K^2{\lambda_3}^2\|A_3 x_n - A_3 x^*\|^2 \\
&\leq \|x_n - x^*\|^2 - 2\lambda_3(-c_3\|A_3 x_n - A_3 x^*\|^2 + d_3\|x_n - x^*\|^2) \\
&\quad + 2K^2{\lambda_3}^2\|A_3 x_n - A_3 x^*\|^2 \\
&\leq \|x_n - x^*\|^2 + 2\lambda_3 c_3\|A_3 x_n - A_3 x^*\|^2 - \frac{2\lambda_3 d_3}{{L_3}^2}\|A_3 x_n - A_3 x^*\|^2 \\
&\quad + 2K^2{\lambda_3}^2\|A_3 x_n - A_3 x^*\|^2 \\
&= \|x_n - x^*\|^2 - 2\lambda_3\Big(\frac{d_3}{{L_3}^2} - c_3 - K^2\lambda_3\Big)\|A_3 x_n - A_3 x^*\|^2 \qquad (3.2.7)
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\|y_n - y^*\|^2 &= \|Q_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n) - Q_C(z^* - \lambda_2 A_2 z^*)\|^2 \\
&\leq \|z_n - z^* - \lambda_2(A_2 z_n - A_2 z^*)\|^2 \\
&\leq \|z_n - z^*\|^2 - 2\lambda_2\langle A_2 z_n - A_2 z^*, j(z_n - z^*)\rangle \\
&\quad + 2K^2{\lambda_2}^2\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 \\
&\leq \|z_n - z^*\|^2 - 2\lambda_2(-c_2\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 + d_2\|z_n - z^*\|^2) \\
&\quad + 2K^2{\lambda_2}^2\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 \\
&\leq \|z_n - z^*\|^2 + 2\lambda_2 c_2\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 - \frac{2\lambda_2 d_2}{{L_2}^2}\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 \\
&\quad + 2K^2{\lambda_2}^2\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 \\
&= \|z_n - z^*\|^2 - 2\lambda_2\Big(\frac{d_2}{{L_2}^2} - c_2 - K^2\lambda_2\Big)\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 \qquad (3.2.8)
\end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\|t_n - x^*\|^2 &= \|Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - Q_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\|^2 \\
&\leq \|y_n - y^* - \lambda_1(A_1 y_n - A_1 y^*)\|^2 \\
&\leq \|y_n - y^*\|^2 - 2\lambda_1\langle A_1 y_n - A_1 y^*, j(y_n - y^*)\rangle \\
&\quad + 2K^2{\lambda_1}^2\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2 \\
&\leq \|y_n - y^*\|^2 - 2\lambda_1(-c_1\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2 + d_1\|y_n - y^*\|^2) \\
&\quad + 2K^2{\lambda_1}^2\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2 \\
&\leq \|y_n - y^*\|^2 + 2\lambda_1 c_1\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2 - \frac{2\lambda_1 d_1}{{L_1}^2}\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2 \\
&\quad + 2K^2{\lambda_1}^2\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2 \\
&= \|y_n - y^*\|^2 - 2\lambda_1\Big(\frac{d_1}{{L_1}^2} - c_1 - K^2\lambda_1\Big)\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2 \qquad (3.2.9)
\end{aligned}$$

แทนสมการ ( ) และ ( ) ในอสมการ ( ) จะได้

$$\begin{aligned}\|t_n - x^*\|^2 \le \|x_n - x^*\|^2 &- 2\lambda_3(\frac{d_3}{{L_3}^2} - c_3 - K^2\lambda_3)\|A_3x_n - A_3x^*\|^2\\ &- 2\lambda_2(\frac{d_2}{{L_2}^2} - c_2 - K^2\lambda_2)\|A_2z_n - A_2z^*\|^2\\ &- 2\lambda_1(\frac{d_1}{{L_1}^2} - c_1 - K^2\lambda_1)\|A_1y_n - A_1y^*\|^2 \qquad (3.2.10)\end{aligned}$$

โดย convexity ของ $\|.\|^2$ จะได้

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x^*\|^2 &= \|a_nf(x_n) + b_nx_n + (1 - a_n - b_n)St_n - x^*\|^2\\ &\le a_n\|f(x_n) - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|St_n - x^*\|^2\\ &\le a_n\|f(x_n) - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|t_n - x^*\|^2 \qquad (3.2.11)\end{aligned}$$

แทนอสมการ ( ) ในอสมการ ( ) จะได้

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x^*\|^2 &\le a_n\|f(x_n) - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2\\ &+ (1 - a_n - b_n)(\|x_n - x^*\|^2 - 2\lambda_3(\frac{d_3}{{L_3}^2} - c_3 - K^2\lambda_3)\|A_3x_n - A_3x^*\|^2\\ &- 2\lambda_2(\frac{d_2}{{L_2}^2} - c_2 - K^2\lambda_2)\|A_2z_n - A_2z^*\|^2\\ &- 2\lambda_1(\frac{d_1}{{L_1}^2} - c_1 - K^2\lambda_1)\|A_1y_n - A_1y^*\|^2)\\ &= a_n\|f(x_n) - x^*\|^2 + (1 - a_n)\|x_n - x^*\|^2\\ &- (1 - a_n - b_n)2\lambda_3(\frac{d_3}{{L_3}^2} - c_3 - K^2\lambda_3)\|A_3x_n - A_3x^*\|^2\\ &- (1 - a_n - b_n)2\lambda_2(\frac{d_2}{{L_2}^2} - c_2 - K^2\lambda_2)\|A_2z_n - A_2z^*\|^2\\ &- (1 - a_n - b_n)2\lambda_1(\frac{d_1}{{L_1}^2} - c_1 - K^2\lambda_1)\|A_1y_n - A_1y^*\|^2\end{aligned}$$

ซึ่งทำให้

$$\begin{aligned}&(1 - a_n - b_n)2\lambda_3(\frac{d_3}{{L_3}^2} - c_3 - K^2\lambda_3)\|A_3x_n - A_3x^*\|^2\\ &+ (1 - a_n - b_n)2\lambda_2(\frac{d_2}{{L_2}^2} - c_2 - K^2\lambda_2)\|A_2z_n - A_2z^*\|^2\\ &+ (1 - a_n - b_n)2\lambda_1(\frac{d_1}{{L_1}^2} - c_1 - K^2\lambda_1)\|A_1y_n - A_1y^*\|^2\\ &\le a_n\|f(x_n) - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - x^*\|^2\\ &\le a_n\|f(x_n) - x^*\|^2 + \|x_n - x_{n+1}\|(\|x_n - x^*\| + \|x_{n+1} - x^*\|)\end{aligned}$$

โดยเงื่อนไข $(C1)$, $(C2)$, ( ) และ $0 < \lambda_i < \dfrac{d_i - c_i{L_i}^2}{K^2{L_i}^2}$ สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \|A_3x_n - A_3x^*\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|A_2z_n - A_2z^*\| = 0$$

$$\text{และ} \quad \lim_{n\to\infty} \|A_1y_n - A_1y^*\| = 0 \qquad (3.2.12)$$

ให้ $r = \sup_{n\geq 1}\{\|x_n - x^*\|, \|z_n - z^*\|, \|y_n - y^*\|, \|t_n - x^*\|\}$ โดยบทตั้ง [illegible] (b) และบทตั้ง [illegible] จะได้

$$
\begin{aligned}
\|t_n - x^*\|^2 &= \|Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - Q_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\|^2 \\
&\leq \langle y_n - \lambda_1 A_1 y_n - (y^* - \lambda_1 A_1 y^*), j(t_n - x^*)\rangle \\
&= \langle y_n - y^*, j(t_n - x^*)\rangle - \lambda_1\langle A_1 y_n - A_1 y^*, j(t_n - x^*)\rangle \\
&\leq \frac{1}{2}[\|y_n - y^*\|^2 + \|t_n - x^*\|^2 - g(\|y_n - y^* - (t_n - x^*)\|)] \\
&\quad + \lambda_1\langle A_1 y^* - A_1 y_n, j(t_n - x^*)\rangle
\end{aligned}
$$

ซึ่งทำให้

$$
\begin{aligned}
\|t_n - x^*\|^2 &\leq \|y_n - y^*\|^2 - g(\|y_n - y^* - (t_n - x^*)\|) \\
&\quad + 2\lambda_1\langle A_1 y^* - A_1 y_n, j(t_n - x^*)\rangle \\
&\leq \|y_n - y^*\|^2 - g(\|y_n - y^* - (t_n - x^*)\|) \\
&\quad + 2\lambda_1\|A_1 y^* - A_1 y_n\|\|t_n - x^*\|
\end{aligned} \tag{3.2.13}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
\|y_n - y^*\|^2 &= \|Q_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n) - Q_C(z^* - \lambda_2 A_2 z^*)\|^2 \\
&\leq \langle z_n - \lambda_2 A_2 z_n - (z^* - \lambda_2 A_2 z^*), j(y_n - y^*)\rangle \\
&= \langle z_n - z^*, j(y_n - y^*)\rangle - \lambda_2\langle A_2 z_n - A_2 z^*, j(y_n - y^*)\rangle \\
&\leq \frac{1}{2}[\|z_n - z^*\|^2 + \|y_n - y^*\|^2 - g(\|z_n - z^* - (y_n - y^*)\|)] \\
&\quad + \lambda_2\langle A_2 z^* - A_2 z_n, j(y_n - y^*)\rangle
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\|y_n - y^*\|^2 &\leq \|z_n - z^*\|^2 - g(\|z_n - z^* - (y_n - y^*)\|) \\
&\quad + 2\lambda_2\langle A_2 z^* - A_2 z_n, j(y_n - y^*)\rangle \\
&\leq \|z_n - z^*\|^2 - g(\|z_n - z^* - (y_n - y^*)\|) \\
&\quad + 2\lambda_2\|A_2 z^* - A_2 z_n\|\|y_n - y^*\|
\end{aligned} \tag{3.2.14}
$$

ทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\|z_n - z^*\|^2 &= \|Q_C(x_n - \lambda_3 A_3 x_n) - Q_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)\|^2 \\
&\leq \langle x_n - \lambda_3 A_3 x_n - (x^* - \lambda_3 A_3 x^*), j(z_n - z^*)\rangle \\
&= \langle x_n - x^*, j(z_n - z^*)\rangle - \lambda_3\langle A_3 x_n - A_3 x^*, j(z_n - z^*)\rangle \\
&\leq \frac{1}{2}[\|x_n - x^*\|^2 + \|z_n - z^*\|^2 - g(\|x_n - x^* - (z_n - z^*)\|)] \\
&\quad + \lambda_3\langle A_3 x^* - A_3 x_n, j(z_n - z^*)\rangle
\end{aligned}
$$

ซึ่งทำให้

$$\begin{aligned}\|z_n - z^*\|^2 &\leq \|x_n - x^*\|^2 - g(\|x_n - x^* - (z_n - z^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_3\langle A_3x^* - A_3x_n, j(z_n - z^*)\rangle \\ &\leq \|x_n - x^*\|^2 - g(\|x_n - x^* - (z_n - z^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_3\|A_3x^* - A_3x_n\|\|z_n - z^*\| \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

จากสมการ ( ), ( ), ( ) และ ( ) จะได้

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x^*\|^2 &\leq a_n\|f(x_n) - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|t_n - x^*\|^2 \\ &\leq a_n\|f(x_n) - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\ &\quad + (1 - a_n - b_n)[\|y_n - y^*\|^2 - g(\|y_n - y^* - (t_n - x^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_1\|A_1y^* - A_1y_n\|\|t_n - x^*\|] \\ &\leq a_n\|f(x_n) - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\ &\quad + (1 - a_n - b_n)[\|z_n - z^*\|^2 - g(\|z_n - z^* - (y_n - y^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_2\|A_2z^* - A_2z_n\|\|y_n - y^*\| - g(\|y_n - y^* - (t_n - x^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_1\|A_1y^* - A_1y_n\|\|t_n - x^*\|] \\ &\leq a_n\|f(x_n) - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\ &\quad + (1 - a_n - b_n)[\|x_n - x^*\|^2 - g(\|x_n - x^* - (z_n - z^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_3\|A_3x^* - A_3x_n\|\|z_n - z^*\| - g(\|z_n - z^* - (y_n - y^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_2\|A_2z^* - A_2z_n\|\|y_n - y^*\| - g(\|y_n - y^* - (t_n - x^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_1\|A_1y^* - A_1y_n\|\|t_n - x^*\|] \\ &= a_n\|f(x_n) - x^*\|^2 + (1 - a_n)\|x_n - x^*\|^2 \\ &\quad + (1 - a_n - b_n)(2\lambda_1\|A_1y^* - A_1y_n\|\|t_n - x^*\|) \\ &\quad + (1 - a_n - b_n)(2\lambda_2\|A_2z^* - A_2z_n\|\|y_n - y^*\|) \\ &\quad + (1 - a_n - b_n)(2\lambda_3\|A_3x^* - A_3x_n\|\|z_n - z^*\|) \\ &\quad - (1 - a_n - b_n)g(\|y_n - y^* - (t_n - x^*)\|) \\ &\quad - (1 - a_n - b_n)g(\|z_n - z^* - (y_n - y^*)\|) \\ &\quad - (1 - a_n - b_n)g(\|x_n - x^* - (z_n - z^*)\|) \end{aligned}$$

ซึ่งจะได้

$$
\begin{aligned}
&(1-a_n-b_n)g(\|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|)+(1-a_n-b_n)g(\|z_n-z^*-(y_n-y^*)\|)\\
&+(1-a_n-b_n)g(\|x_n-x^*-(z_n-z^*)\|)\\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2-\|x_{n+1}-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)(2\lambda_1\|A_1y^*-A_1y_n\|\|t_n-x^*\|)\\
&\quad+(1-a_n-b_n)(2\lambda_2\|A_2z^*-A_2z_n\|\|y_n-y^*\|)\\
&\quad+(1-a_n-b_n)(2\lambda_3\|A_3x^*-A_3x_n\|\|z_n-z^*\|)\\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2+\|x_n-x_{n+1}\|(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)\\
&\quad+(1-a_n-b_n)(2\lambda_1\|A_1y^*-A_1y_n\|\|t_n-x^*\|)\\
&\quad+(1-a_n-b_n)(2\lambda_2\|A_2z^*-A_2z_n\|\|y_n-y^*\|)\\
&\quad+(1-a_n-b_n)(2\lambda_3\|A_3x^*-A_3x_n\|\|z_n-z^*\|)
\end{aligned}
$$

โดยเงื่อนไข $(C1), (C2)$, ([illegible]) และ ([illegible]) จะได้

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} g(\|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|)=0,\quad \lim_{n\to\infty} g(\|z_n-z^*-(y_n-y^*)\|)=0\\
&\text{และ}\quad \lim_{n\to\infty} g(\|x_n-x^*-(z_n-z^*)\|)=0
\end{aligned}
$$

โดยสมบัติของฟังก์ชัน g ทำให้ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|=0,\quad \lim_{n\to\infty} \|z_n-z^*-(y_n-y^*)\|=0\\
&\text{และ}\quad \lim_{n\to\infty} \|x_n-x^*-(z_n-z^*)\|=0
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
\|x_n-t_n\| &\le \|x_n-z_n-(x^*-z^*)\|+\|z_n-y_n-(z^*-y^*)\|\\
&\quad+\|y_n-t_n-(y^*-x^*)\|\to 0 \quad \text{เมื่อ } n\to\infty
\end{aligned}
\tag{3.2.16}
$$

โดยสมการ ([illegible]) และ ([illegible]) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\|Sx_n-x_n\| &\le \|Sx_n-St_n\|+\|St_n-x_n\|\\
&\le \|x_n-t_n\|+\|St_n-x_n\|\to 0 \quad \text{เมื่อ } n\to\infty
\end{aligned}
\tag{3.2.17}
$$

กำหนดฟังก์ชัน $W: C\to C$ โดย

$$
Wx=\eta Sx+(1-\eta)Gx,\quad \forall x\in C
$$

เมื่อ η เป็นค่าคงตัวใน $(0,1)$ จากบทตั้ง [illegible] จะได้ว่า $F(W)=F(G)\bigcap F(S)$ และ W เป็นฟังก์ชัน nonexpansive และจากสมการ ([illegible]), ([illegible]) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\|x_n-Wx_n\| &= \|x_n-(\eta Sx_n+(1-\eta)Gx_n)\|\\
&= \|\eta(x_n-Sx_n)+(1-\eta)(x_n-Gx_n)\|\\
&\le \eta\|x_n-Sx_n\|+(1-\eta)\|x_n-Gx_n\|\\
&= \eta\|x_n-Sx_n\|+(1-\eta)\|x_n-t_n\|\to 0 \quad \text{เมื่อ } n\to\infty
\end{aligned}
\tag{3.2.18}
$$

ขั้นตอน 4 ในขั้นตอนนี้จะแสดงว่า

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f(q)-q, j(x_n-q)\rangle \le 0 \tag{3.2.19}$$

เมื่อ $q=\lim_{t\to 0} x_t$ โดยที่ x_t เป็นจุดตรึงของฟังก์ชัน contraction ซึ่งนิยามโดย

$$x \mapsto tf(x)+(1-t)Wx$$

จากบทตั้ง จะได้ $q\in F(W)=F(G)\bigcap F(S)=\Omega$ และ

$$\langle (I-f)q, j(q-p)\rangle \le 0, \quad \forall f\in \Pi_C,\ p\in\Omega$$

เนื่องจาก $x_t=tf(x_t)+(1-t)Wx_t$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}\|x_t-x_n\| &= \|tf(x_t)+(1-t)Wx_t-x_n\|\\ &= \|(1-t)(Wx_t-x_n)+t(f(x_t)-x_n)\|\end{aligned}$$

จากสมการ ( ) และบทตั้ง จะได้

$$\begin{aligned}\|x_t-x_n\|^2 &= \|(1-t)(Wx_t-x_n)+t(f(x_t)-x_n)\|^2\\ &\le (1-t)^2\|Wx_t-x_n\|^2+2t\langle f(x_t)-x_n, j(x_t-x_n)\rangle\\ &\le (1-t)^2(\|Wx_t-Wx_n\|+\|Wx_n-x_n\|)^2\\ &\quad +2t\langle f(x_t)-x_n, j(x_t-x_n)\rangle\\ &= (1-t)^2(\|Wx_t-Wx_n\|^2+2\|Wx_t-Wx_n\|\|Wx_n-x_n\|+\|Wx_n-x_n\|^2)\\ &\quad +2t\langle f(x_t)-x_t, j(x_t-x_n)\rangle+2t\langle x_t-x_n, j(x_t-x_n)\rangle\\ &\le (1-2t+t^2)\|x_t-x_n\|^2+(1-t)^2(2\|x_t-x_n\|\|Wx_n-x_n\|+\|Wx_n-x_n\|^2)\\ &\quad +2t\langle f(x_t)-x_t, j(x_t-x_n)\rangle+2t\|x_t-x_n\|^2\\ &= (1+t^2)\|x_t-x_n\|^2+f_n(t)+2t\langle f(x_t)-x_t, j(x_t-x_n)\rangle \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

เมื่อ $f_n(t)=(1-t)^2(2\|x_t-x_n\|+\|Wx_n-x_n\|)\|Wx_n-x_n\|\to 0$ เมื่อ $n\to\infty$ จาก (3.2.20) จะได้

$$\langle x_t-f(x_t), j(x_t-x_n)\rangle \le \frac{t}{2}\|x_t-x_n\|^2+\frac{f_n(t)}{2t} \tag{3.2.21}$$

ให้ $n\to\infty$ ใน ( ) จะได้ว่า

$$\limsup_{n\to\infty}\langle x_t-f(x_t), j(x_t-x_n)\rangle \le \frac{t}{2}M \tag{3.2.22}$$

เมื่อ $M>0$ เป็นค่าคงตัวที่ทำให้ $M\ge\|x_t-x_n\|^2$ สำหรับแต่ละ $t\in(0,1)$ และ $n\ge 1$ กำหนดให้ $t\to 0$ ใน ( ) จะได้

$$\limsup_{t\to 0}\limsup_{n\to\infty}\langle x_t-f(x_t), j(x_t-x_n)\rangle \le 0 \tag{3.2.23}$$

นอกจากนี้จะเห็นว่า

$$
\begin{aligned}
\langle f(q) - q, j(x_n - q)\rangle &= \langle f(q) - q, j(x_n - q)\rangle - \langle f(q) - q, j(x_n - x_t)\rangle \\
&\quad + \langle f(q) - q, j(x_n - x_t)\rangle - \langle f(q) - x_t, j(x_n - x_t)\rangle \\
&\quad + \langle f(q) - x_t, j(x_n - x_t)\rangle - \langle f(x_t) - x_t, j(x_n - x_t)\rangle \\
&\quad + \langle f(x_t) - x_t, j(x_n - x_t)\rangle \\
&= \langle f(q) - q, j(x_n - q) - j(x_n - x_t)\rangle + \langle x_t - q, j(x_n - x_t)\rangle \\
&\quad + \langle f(q) - f(x_t), j(x_n - x_t)\rangle + \langle f(x_t) - x_t, j(x_n - x_t)\rangle
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\langle f(q) - q, j(x_n - q)\rangle &\le \limsup_{n\to\infty}\langle f(q) - q, j(x_n - q) - j(x_n - x_t)\rangle \\
&\quad + \|x_t - q\| \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x_t\| + \alpha\|x_t - q\| \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x_t\| \\
&\quad + \limsup_{n\to\infty}\langle f(x_t) - x_t, j(x_n - x_t)\rangle
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก j เป็นฟังก์ชัน norm -to-norm uniformly continuous บนเซตย่อยที่มีขอบเขตของ C โดย ( ) และ $\lim_{t\to 0} x_t = q$ จะได้

$$
\limsup_{n\to\infty}\langle f(q) - q, j(x_n - q)\rangle = \limsup_{t\to 0}\limsup_{n\to\infty}\langle f(q) - q, j(x_n - q)\rangle \le 0
$$

ดังนั้น ( ) เป็นจริง

ขั้นตอน 5. ในขั้นตอนนี้จะแสดงว่า $x_n \to q$ เมื่อ $n \to \infty$

จาก ( ) จะได้

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - q\|^2 &= \langle x_{n+1} - q, j(x_{n+1} - q)\rangle \\
&= \langle a_n(f(x_n) - q) + b_n(x_n - q) + (1 - a_n - b_n)(St_n - q), j(x_{n+1} - q)\rangle \\
&= a_n\langle f(x_n) - f(q), j(x_{n+1} - q)\rangle + b_n\langle x_n - q, j(x_{n+1} - q)\rangle \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\langle St_n - q, j(x_{n+1} - q)\rangle + a_n\langle f(q) - q, j(x_{n+1} - q)\rangle \\
&\le a_n\alpha\|x_n - q\|\|x_{n+1} - q\| + b_n\|x_n - q\|\|x_{n+1} - q\| \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\|St_n - q\|\|x_{n+1} - q\| + a_n\langle f(q) - q, j(x_{n+1} - q)\rangle \\
&\le a_n\alpha\|x_n - q\|\|x_{n+1} - q\| + b_n\|x_n - q\|\|x_{n+1} - q\| \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\|x_n - q\|\|x_{n+1} - q\| + a_n\langle f(q) - q, j(x_{n+1} - q)\rangle \\
&= (1 - a_n(1 - \alpha))\|x_n - q\|\|x_{n+1} - q\| + a_n\langle f(q) - q, j(x_{n+1} - q)\rangle \\
&\le \frac{1 - a_n(1 - \alpha)}{2}(\|x_n - q\|^2 + \|x_{n+1} - q\|^2) + a_n\langle f(q) - q, j(x_{n+1} - q)\rangle \\
&\le \frac{1 - a_n(1 - \alpha)}{2}\|x_n - q\|^2 + \frac{1}{2}\|x_{n+1} - q\|^2 + a_n\langle f(q) - q, j(x_{n+1} - q)\rangle
\end{aligned}
$$

ซึ่งทำให้

$$
\|x_{n+1} - q\|^2 \le (1 - a_n(1 - \alpha))\|x_n - q\|^2 + a_n(1 - \alpha)\frac{2\langle f(q) - q, j(x_{n+1} - q)\rangle}{1 - \alpha}
$$

ดังนั้นโดยบทตั้ง , ( ) และเงื่อนไข $(C1)$ จะได้ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ q □

ตัวอย่าง 1. ให้ $X = \mathbb{R}$ และ $C = [0, 1]$ กำหนดฟังก์ชัน $S, f : C \to C$ และ $A_1, A_2, A_3 : C \to X$ ดังต่อไปนี้:

$$S(x) = \frac{x}{3}, \quad f(x) = \frac{x}{2} + 3, \quad A_1(x) = x, \quad A_2(x) = 2x \ \text{ และ } \ A_3(x) = 3x$$

เห็นได้ชัดว่า S เป็นฟังก์ชัน nonexpansive, f เป็นฟังก์ชัน contractive โดยค่าคงตัวคือ $\alpha = \frac{1}{2}$, A_1 เป็นฟังก์ชัน relaxed ($\frac{1}{2}$,1)-cocoercive และ 1-Lipschitzian, A_2 เป็นฟังก์ชัน relaxed ($\frac{1}{4}$,2)-cocoercive และ 2-Lipschitzian และ A_3 เป็นฟังก์ชัน relaxed ($\frac{1}{9}$,3)-cocoercive และ 3-Lipschitzian ในกรณีนี้จะเห็นว่า $\Omega = F(S) \bigcap F(G) = \{0\}$ ถ้าเลือก $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ตรงกับเงื่อนไขของทฤษฎีบท จะได้ว่าลำดับ $\{x_n\}$ กำหนดโดย ( ) ลู่เข้าสู่ $q = 0 \in \Omega$ ซึ่งแก้ปัญหาอสมการการแปรผัน:

$$\langle q - f(q), j(q - p) \rangle \leq 0, \quad \forall p \in \Omega$$

ในทฤษฎีบท ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน $A_3 = 0$ จะได้องค์ความรู้ที่สำคัญดังนี้

***บทแทรก* 3.2.2.** *ให้ X เป็นปริภูมิ uniformly convex และ 2-uniformly smooth Banach space พร้อมค่าคงตัว 2-uniformly smooth constant K กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของ X และ Q_C เป็นฟังก์ชัน sunny nonexpansive retraction จาก X ทั่วถึง C สำหรับแต่ละ $i = 1, 2$ สมมุติ $A_i : C \to X$ เป็นฟังก์ชัน relaxed (c_i, d_i)-cocoercive และ L_i-Lipschitzian โดยที่ $0 < \lambda_i < \frac{d_i - c_i L_i^2}{K^2 L_i^2}$ ให้ f เป็นฟังก์ชัน contraction พร้อมค่าคงตัว $\alpha \in (0, 1)$ และ $S : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน nonexpansive ที่ทำให้ $F = F(S) \bigcap \Omega_2 \neq \emptyset$ โดยที่ Ω_2 เป็นเซตผลเฉลยของปัญหา ( ) กำหนดให้ $x_1 \in C$ และ $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย*

$$\begin{cases} y_n = Q_C(x_n - \lambda_2 A_2 x_n), \\ x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นสองลำดับใน $(0, 1)$ ที่ทำให้

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$

จะได้ว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $q \in F$ ซึ่งแก้ปัญหาอสมการการแปรผันดังนี้:

$$\langle q - f(q), j(q - p) \rangle \leq 0, \quad \forall f \in \Pi_C, \ p \in \Omega$$

หมายเหตุ 1. (i) เนื่องจาก L^p สำหรับแต่ละ $p \geq 2$ เป็นปริภูมิ uniformly convex และ 2-uniformly smooth ดังนั้นโดยทฤษฎีบท จึงใช้ได้กับปริภูมิ L^p สำหรับแต่ละ $p \geq 2$

(ii) การประมาณค่าหาผลเฉลยสำหรับจำนวนจำกัดของปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค สามารถใช้แนวคิดเดียวกันจากการศึกษาปัญหาวิจัยในโครงการนี้ได้

บทที่ 4

ผลดำเนินการวิจัย

การพัฒนาทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไปพร้อมการประยุกต์ เป็นการวิจัยที่มุ่งแสวงหาข้อเท็จจริงเกี่ยวกับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาคและปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชัน nonexpansive ผลจากการวิจัยได้ข้อเท็จจริงที่สำคัญโดยมีเนื้อหาสาระดังต่อไปนี้

4.1 ระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาวิจัย

ระเบียบวิธีทำซ้ำที่ใช้ในการการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาคและปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชัน nonexpansive โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญดังนี้

ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิบานาค X กำหนดให้ $x_1 \in C$ และ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} z_n = Q_C(x_n - \lambda_3 A_3 x_n), \\ y_n = Q_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n), \\ x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $A_i : C \to X, Q_C : X \to C$ และ $f : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน, $\lambda_i > 0$ สำหรับ $i = 1, 2, 3$ และ $\{a_n\}, \{b_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $[0, 1]$

4.2 ผลดำเนินการวิจัย

ผลจากการวิจัยการพัฒนาทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไปพร้อมการประยุกต์ได้ทฤษฎีบทและองค์ความรู้ใหม่ที่สำคัญ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

บทตั้ง 1. ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิ 2-uniformly smooth Banach space X พร้อมค่าคงตัว 2-uniformly smooth constant K กำหนดให้ Q_C เป็นฟังก์ชัน sunny nonexpansive retraction จาก X ไปทั่วถึง C สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3$ กำหนดให้ $A_i : C \to X$ เป็นฟังก์ชัน relaxed (c_i, d_i)-cocoercive และ L_i-Lipschitzian ให้ $G : C \to C$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$\begin{aligned} G(x) = Q_C\big[&Q_C\big(Q_C(x - \lambda_3 A_3 x) - \lambda_2 A_2 Q_C(x - \lambda_3 A_3 x)\big) \\ &- \lambda_1 A_1 Q_C\big(Q_C(x - \lambda_3 A_3 x) - \lambda_2 A_2 Q_C(x - \lambda_3 A_3 x)\big)\big], \quad \forall x \in C \end{aligned}$$

ถ้า $0 < \lambda_i \leq \frac{d_i - c_i L_i^2}{K^2 L_i^2}$ สำหรับ $i = 1, 2, 3$ แล้ว $G : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน nonexpansive

ทฤษฎีบท 2. ให้ X เป็นปริภูมิ uniformly convex และ 2-uniformly smooth Banach space พร้อมค่าคงตัว 2-uniformly smooth constant K กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของ X และ Q_C เป็นฟังก์ชัน sunny nonexpansive retraction จาก X ไปทั่วถึง C สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3$ สมมุติ $A_i : C \to X$ เป็นฟังก์ชัน relaxed (c_i, d_i)-cocoercive และ L_i-Lipschitzian โดยที่ $0 < \lambda_i < \frac{d_i - c_i L_i^2}{K^2 L_i^2}$ ให้ f เป็นฟังก์ชัน contraction พร้อมค่าคงตัว $\alpha \in (0, 1)$ และ $S : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน nonexpansive ที่ทำให้ $\Omega = F(S) \bigcap F(G) \neq \emptyset$ เมื่อ G เป็นฟังก์ชันที่นิยามในบทตั้ง
กำหนดให้ $x_1 \in C$ และ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} z_n = Q_C(x_n - \lambda_3 A_3 x_n), \\ y_n = Q_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n), \\ x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นสองลำดับใน $(0, 1)$ ที่ทำให้

(C1) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n \to \infty} b_n \leq \limsup_{n \to \infty} b_n < 1$

จะได้ว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $q \in \Omega$ ซึ่งแก้ปัญหาอสมการการแปรผัน:

$$\langle q - f(q), j(q - p) \rangle \leq 0, \quad \forall f \in \Pi_C, \ p \in \Omega$$

นอกจากนี้ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน $A_3 = 0$ ในทฤษฎีบท จะได้องค์ความรู้ที่สำคัญดังนี้

บทแทรก 3. ให้ X เป็นปริภูมิ uniformly convex และ 2-uniformly smooth Banach space พร้อมค่าคงตัว 2-uniformly smooth constant K กำหนดให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของ X และ Q_C เป็นฟังก์ชัน sunny nonexpansive retraction จาก X ไปทั่วถึง C สำหรับแต่ละ $i = 1, 2$ สมมุติ $A_i : C \to X$ เป็นฟังก์ชัน relaxed (c_i, d_i)-cocoercive และ L_i-Lipschitzian โดยที่ $0 < \lambda_i < \frac{d_i - c_i L_i^2}{K^2 L_i^2}$ ให้ f เป็นฟังก์ชัน contraction พร้อมค่าคงตัว $\alpha \in (0, 1)$ และ $S : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน nonexpansive ที่ทำให้ $F = F(S) \bigcap \Omega_2 \neq \emptyset$ โดยที่ Ω_2 เป็นเซตผลเฉลยของปัญหา ( )
กำหนดให้ $x_1 \in C$ และ $\{x_n\}, \{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} y_n = Q_C(x_n - \lambda_2 A_2 x_n), \\ x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นสองลำดับใน $(0, 1)$ ที่ทำให้

(C1) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n \to \infty} b_n \leq \limsup_{n \to \infty} b_n < 1$

จะได้ว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $q \in F$ ซึ่งแก้ปัญหาอสมการการแปรผันดังนี้:

$$\langle q - f(q), j(q - p) \rangle \leq 0, \quad \forall f \in \Pi_C, \ p \in \Omega$$

การพัฒนาทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไปพร้อมการประยุกต์ ทำให้ได้ทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการอ้างอิงทางวิชาการ รวมทั้งนำไปประยุกต์ใช้กับวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์ และวิทยาศาสตร์ประยุกต์

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชัน nonexpansive จากการศึกษาวิจัยทำให้ได้องค์ความรู้ใหม่ที่สำคัญยิ่ง สำหรับเนื้อหาในบทนี้ผู้วิจัยจะให้รายละเอียดเกี่ยวกับ ข้อสรุปของการวิจัย อภิปรายผลการวิจัย และข้อเสนอแนะที่สำคัญ ดังต่อไปนี้

5.1 สรุปผลการวิจัย

การพัฒนาทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไปพร้อมการประยุกต์ เป็นการวิจัยพื้นฐาน (basic research) เพื่อมุ่งแสวงหาข้อเท็จจริงเกี่ยวกับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชัน nonexpansive ผลจากการวิจัยได้ข้อสรุปที่สำคัญ 3 ประการ คือ **ประการแรก** ได้ระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค กรณีที่ A_i $(i = 1, 2, 3)$ เป็นฟังก์ชัน relaxed (c_i, d_i)-cocoercive และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชัน nonexpansive **ประการที่สอง** ได้เงื่อนไขการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นสำหรับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค กรณีที่ A_i $(i = 1, 2, 3)$ เป็นฟังก์ชัน relaxed (c_i, d_i)-cocoercive และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชัน nonexpansive และ**ประการสุดท้าย** ได้ทฤษฎีการลู่เข้าของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค กรณีที่ A_i $(i = 1, 2, 3)$ เป็นฟังก์ชัน relaxed (c_i, d_i)-cocoercive และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชัน nonexpansive

5.2 อภิปรายผล

จากการศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาจุดตรึง กับผลเฉลยของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค จำเป็นอย่างยิ่งต้องอาศัยระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อใช้ในการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมดังกล่าว โดยระเบียบวิธีทำซ้ำที่ใช้ในการศึกษากำหนดดังนี้ กำหนดให้ $x_1 \in C$, $\{x_n\}, \{y_n\}$ และ $\{z_n\}$ เป็นสามลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} z_n = Q_C(x_n - \lambda_3 A_3 x_n), \\ y_n = Q_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n), \\ x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

โดยที่ สำหรับ $i = 1, 2, 3$ $A_i : C \to X$ เป็นฟังก์ชัน relaxed (c_i, d_i)-cocoercive, $Q_C : X \to C$ เป็นฟังก์ชัน sunny nonexpansive retraction, $f : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน contraction และ $S : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน nonexpansive และ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $[0, 1]$ สังเกตุว่า ถ้ากำหนดเงื่อนไขบางอย่างบนลำดับนี้ แล้วระเบียบวิธีทำซ้ำนี้จะลดรูปเป็นระเบียบวิธีทำซ้ำที่ได้ศึกษามาก่อน อาทิ เช่น

1. ถ้า $A_3 = 0$ แล้วระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษานี้จะลดรูปเป็นระเบียบวิธีทำซ้ำ

$$\begin{cases} y_n = Q_C(x_n - \lambda_2 A_2 x_n), \\ x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

   ซึ่งศึกษาโดย Katchang และ Kumam [ ]

2. ถ้า $A_3 = 0$, $f(x_n) = u$ และ $S = I$ แล้วระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษานี้จะลดรูปเป็นระเบียบวิธีทำซ้ำ

$$\begin{cases} y_n = Q_C(x_n - \lambda_2 A_2 x_n), \\ x_{n+1} = a_n u + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

   ซึ่งศึกษาโดย Yao et al. [ ]

นอกจากนี้ทฤษฎีการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นนี้ ผู้วิจัยได้ตัดเงื่อนไข weakly sequentially continuous duality mapping ซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของการพัฒนาองค์ความรู้ของปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาคอีกด้วย

5.3 ข้อเสนอแนะ

การประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค ในโครงการวิจัยนี้ได้ศึกษากรณีฟังก์ชัน relaxed (c, d)-cocoercive และปัญหาจุดตรึงศึกษาฟังก์ชัน nonexpansive ดังนั้นสำหรับนักวิจัยที่สนใจจะศึกษาวิจัยต่อพอสรุปแนวทางดำเนินการวิจัย ดังต่อไปนี้

1. ผู้ดำเนินวิจัย สามารถศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาค สำหรับฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้นอื่น อาทิ เช่น ฟังก์ชัน accretive operator, $\alpha-$inverse strongly accretive, maximal monotone ฯลฯ

2. ผู้สนใจสามารถศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาคกับปัญหาจุดตรึง สำหรับฟังก์ชันที่โตกว่า (คลาสใหญ่กว่า) ฟังก์ชัน nonexpansive เช่น ฟังก์ชัน strictly pseudo contractive mapping, quasai nonexpansive mapping, asymptoti -cally nonexpansive mapping ฯลฯ

3. ผู้สนใจสามารถศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาคกับปัญหาอื่นๆ เช่น generalized mixed equilibrium problems [ ]

4. ผู้สนใจสามารถศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันในปริภูมิบานาคกับปัญหาจุดตรึง จากปริภูมิบานาคสู่ปริภูมิที่ใหญ่ขึ้น อาทิ เช่น ปริภูมิเมตริก

บรรณานุกรม

[1] Aoyama, K, Iiduka, H, Takahashi, W: Weak convergence of an iterative sequence for accretive operators in Banach spaces. Fixed Point Theory Appl. 2006, 1-13 (2006)

[2] Yao, Y, Noor, MA, Noor, KI, Liou, YC, Yaqoob, H: Modified extragradient method for a system of variational inequalities in Banach spaces. Acta Appl. Math. 110, 1211-1224 (2010)

[3] Imnang, S, Suantai, S: Strong convergence theorem for a new general system of variational inequalities in Banach spaces. Fixed Point Theory Appl. (2010). doi: 10.1155/2010/246808

[4] B. Halpern, Fixed points of nonexpansive maps, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967) 957--961.

[5] P. L. Lion, Approximation de points fixed de contractions, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 284 (1977) A1357--A1359.

[6] S. Reich, Approximating fixed points of nonexpansive mappings, PanAmer. Math. J. 4(2) (1994) 23--28.

[7] R. Wittmann, Approximation of fixed points of nonexpansive mappings, Arch. Math. (Basel) 58 (1992) 486--491.

[8] G. Stampacchi, Formes bilineaires coercivites sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sci. Paris. 258 (1964) 4413-4416.

[9] L. C. Ceng, Q. H. Ansari and J. C. Yao, Mann type steepest and modified hybrid steepest-descent methods for variational inequalities in Banach spaces, Numerical Functional Analysis and Optimization, 29 (2008) 987--1033.

[10] L. C. Ceng, Q. H. Ansari and J. C. Yao, On relaxed viscosity iterative methods for variational inequalities in Banach spaces, J. Comput. App. Math. 230 (2009) 813--822.

[11] L. C. Ceng, G. Y. Chen, X. X. Huang and J. C. Yao, Existence theorems for generalized vector variational inequalities with pseudomonotonicity and their applications, Taiwanese Journal of Mathematics 12 (2008) 151--172.

[12] L. C. Ceng, C. Lee and J. C. Yao, Strong weak convergence theorems of implicit hybrid steepest-descent methods for variational inequalities, Taiwanese Journal of Mathematics 12 (2008) 227--244.

[13] L. C. Ceng, A. Petrusel and J. C. Yao, Iterative approaches to solving equilibrium problems and fixed point problems of infinitely many nonexpansive mappings, Journal of Optimization Theory and Applications 143 (2009) 37--58.

[14] L. C. Ceng, A. Petrusel and J. C. Yao, Weak convergence theorem by a modified extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings, Fixed Point Theory 9 (2008) 73--87.

[15] L. C. Ceng, S. Schaible and J. C. Yao, Hybrid steepest descent methods for zeros of nonlinear operator with applictions to variational inequalities, Journal of Optimization Theory and Applications 141 (2009) 75--91.

[16] L. C. Ceng, C. Y. Wang and J. C. Yao, Strong convergence theorems by a relaxed extragradient method for a general system of variational inequalities, Math Meth Oper Res 67 (2008) 375--390.

[17] L. C. Ceng, J. C. Yao, A hybrid iterative scheme for mixed equilibrium problems and fixed point problems, J. Comput. App. Math. 214 (2008) 186--201.

[18] L. C. Ceng, J. C. Yao, Relaxed viscosity approximation methods for fixed point problems and variational inequality problems, Nonlinear analysis Series A: Theory, Methods & Applications 69 (2008) 3299--3309.

[19] S. S. Chang, H. W. Joseph Lee and C. K. Chan, A new method for solving equilibrium problem fixed point problem and variational inequality problem with application to optimization, Nonlinear Analysis 70 (2009) 3307--3319.

[20] M. A. Noor, On iterative methods for solving a system of mixed variational inequalities, Applicable Analysis 87(1) (2008) 99--108.

[21] M. A. Noor, Projection methods for nonconvex variational inequalities, Optimization Letters 3(3) (2009) 411--418.

[22] M. A. Noor, Some developments in general variational inequalities, Applied Mathematics and Computation 152 (2004) 199--277.

[23] J. W. Peng, J. C. Yao, A modified CQ method for equilibrium problems, fixed points and variational inequality, Fixed Point Theory, 9 (2008) 515--531.

[24] J. W. Peng, J. C. Yao, A new hybrid-extragradient method for generalized mixed equilibrium problems and fixed point problems and variational inequality problems, Taiwanese Journal of Mathematics 12 (2008) 1401--1433.

[25] J. W. Peng, J. C. Yao, Some new iterative algorithms for generalized mixed equilibrium problems with strict pseudo-contractions and monotone mappings, Taiwanese Journal of Mathematics 13 (2009) 1537--1582.

[26] S. Plubtieng, R. Punpaeng, A new iterative method for equilibrium problems and fixed point problems of nonexpansive mappings and monotone mappings, Applied Mathematics and Computation 197 (2008) 548--558.

[27] L. C. Zeng, J. C. Yao, A hybrid extragradient method for general variational inequalities, Mathematical Methods of Operations Research 69 (2009) 141--158.

[28] J. Zhao, S. He, A new iterative method for equilibrium problems and fixed point problems of infinitely nonexpansive mappings and monotone mappings, Appl. Math. Comput. 215 (2009) 670--680.

[29] G. M. Korpelevich, An extragradient method for finding saddle points and for other problems, Ekon. Mat. Metody 12 (1976) 747--756.

[30] W. Takahashi, M. Toyoda, Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings, J. Optim. Theory Appl. 118 (2003) 417-428.

[31] N. Nadezhkina, W. Takahashi, Weak convergence theorem by an extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings, Journal of optimization theory and applications 128 (2006) 191-201.

[32] Y. Yao, J. C. Yao, On modified iterative method for nonexpansive mappings and monotone mappings, Appl. Math. Comput. 186 (2007) 1551-1558.

[33] R. U. Verma, On a new system of nonlinear variational inequalities and associated iterative algorithms, Math Sci Res Hot-Line 3 (1999) 65--68.

[34] Y. Yao, Y. C. Liou and S. M. Kang. (2010). Approach to common elements of variational inequality problems and fixed point problems via a relaxed extragradient method. Computers and Mathematics with Applications. 59, 3472-3480.

[35] Goebel, K, Reich, S: Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings. Marcel Dekcer, New York and Basel (1984)

[36] Hao, Y: Strong convergence of an iterative method for inverse strongly accretive operators. J. Inequal. Appl. (2008). doi:10.1155/2008/42098

[37] Reich, S: Extension problems for accretive sets in Banach spaces. J. Functional Anal. **26**, 378-395 (1977)

[38] Reich, S: Product formulas, nonlinear semigroups, and accretive operators. J. Functional Anal. 36, 147-168 (1980)

[39] Katchang, P, Kumam, P: Convergence of iterative algorithm for finding common solution of fixed points and general system of variational inequalities for two accretive operators. Thai J. Math. 9, 343-360 (2011)

[40] Cai, G, Bu, S: Convergence analysis for variational inequality problems and fixed point problems in 2-uniformly smooth and uniformly convex Banach spaces. Math. Comput. Modelling. 55, 538-546 (2012)

[41] Cai, G, Bu, S: Strong convergence theorems based on a new modified extragradient method for variational inequality problems and fixed point problems in Banach spaces. Comput. Math. Appl. 62, 2567-2579 (2011)

[42] Katchang, P, Kumam, P: An iterative algorithm for finding a common solution of fixed points and a general system of variational inequalities for two inverse strongly accretive operators. Positivity. 15, 281-295 (2011)

[43] Qin, X, Cho, SY, Kang, SM: Convergence of an iterative algorithm for systems of variational inequalities and nonexpansive mappings with applications. J. Comput. Appl. Math. 233, 231-240 (2009)

[44] Gossez, J P, Lami Dozo, E: Some geometric properties related to the fixed point theory for nonexpansive mappings. Pac. J. Math 40, 565-573 (1972)

[45] Xu, HK: Inequalities in Banach spaces with applications. Nonlinear Anal. 16, 1127-1138 (1991)

[46] Chang, SS: On Chidumes open questions and approximate solutions of multivalued strongly accretive mapping equations in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. 216, 94-111 (1997)

[47] Xu, HK: Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl. 298, 279-291 (2004)

[48] Reich, S: Asymptotic behavior of contractions in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. 44, 57-70 (1973)

[49] Kitahara. S, Takahashi, W: Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions. Topol. Methods Nonlinear Anal. 2, 333-342 (1993)

[50] Suzuki, T: Strong convergence of Krasnoselskii and Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals. J. Math. Anal. Appl. 305, 227-239 (2005)

[51] Bruck, RE: Properties of fixed point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 179, 251-262 (1973)

[52] Kamimura, S, Takahashi, W: Strong convergence of a proximal-type algorithm in Banach space. SIAM J. Optim. 12, 938-945 (2002)

[53] J. U. Jeong, S. H. Kim, An iterative method for total quasi-image-asymptotically nonexpansive semi-groups and generalized mixed equilibrium problems in Banach spaces, Appl. Math. Comput. 254,39-48 (2015)

ภาคผนวก

ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์

เรื่อง Viscosity iterative method for a new general system of variational inequalities in Banach spaces

วารสาร Journal of Inequalities and Applications 2013, 2013:249

Imnang *Journal of Inequalities and Applications* 2013, 2013:249
http://www.journalofinequalitiesandapplications.com/content/2013/1/249

Journal of Inequalities and Applications

RESEARCH **Open Access**

Viscosity iterative method for a new general system of variational inequalities in Banach spaces

Suwicha Imnang*

*Correspondence: suwichan@hotmail.com
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, Thaksin University, Phatthalung Campus, Phatthalung, 93110, Thailand
Centre of Excellence in Mathematics, CHE, Si Ayutthaya Road, Bangkok, 10400, Thailand

Abstract

In this paper, we study a new iterative method for finding a common element of the set of solutions of a new general system of variational inequalities for two different relaxed cocoercive mappings and the set of fixed points of a nonexpansive mapping in real 2-uniformly smooth and uniformly convex Banach spaces. We prove the strong convergence of the proposed iterative method without the condition of weakly sequentially continuous duality mapping. Our result improves and extends the corresponding results announced by many others.

MSC: 46B10; 46B20; 47H10; 49J40

Keywords: a new general system of variational inequalities; relaxed cocoercive mapping; strong convergence

1 Introduction

Let X be a real Banach space and X^* be its dual space. Let C be a subset of X and let T be a self-mapping of C. We use $F(T)$ to denote the set of fixed points of T. The duality mapping $J : X \to 2^{X^*}$ is defined by $J(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2, \|x^*\| = \|x\|\}$, $\forall x \in X$. If X is a Hilbert space, then $J = I$, where I is the identity mapping. It is well-known that if X is smooth, then J is single-valued, which is denoted by j.

Recall that a mapping $f : C \to C$ is a *contraction* on C, if there exists a constant $\alpha \in (0,1)$ such that $\|f(x) - f(y)\| \le \alpha\|x - y\|$, $\forall x, y \in C$. We use Π_C to denote the collection of all contractions on C. This is $\Pi_C = \{f \mid f : C \to C \text{ a contraction}\}$. A mapping $T : C \to C$ is said to be *nonexpansive* if $\|T(x) - T(y)\| \le \|x - y\|$, $\forall x, y \in C$. Let $A : C \to X$ be a nonlinear mapping. Then A is called

(i) *L-Lipschitz continuous* (or *Lipschitzian*) if there exists a constant $L \ge 0$ such that

$$\|Ax - Ay\| \le L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in C;$$

(ii) *accretive* if there exists $j(x - y) \in J(x - y)$ such that

$$\langle Ax - Ay, j(x - y) \rangle \ge 0, \quad \forall x, y \in C;$$

(iii) *α-inverse strongly accretive* if there exist $j(x - y) \in J(x - y)$ and $\alpha > 0$ such that

$$\langle Ax - Ay, j(x - y) \rangle \ge \alpha\|Ax - Ay\|^2, \quad \forall x, y \in C;$$

(iv) *relaxed (c,d)-cocoercive* if there exist $j(x-y) \in J(x-y)$ and two constants $c, d \geq 0$ such that

$$\langle Ax - Ay, j(x-y)\rangle \geq (-c)\|Ax - Ay\|^2 + d\|x-y\|^2, \quad \forall x, y \in C.$$

Let C be a nonempty closed convex subset of a real Hilbert space H. Recall that the classical variational inequality is to find $x^* \in C$ such that

$$\langle Ax^*, x - x^*\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \tag{1.1}$$

where $A : C \to H$ is a nonlinear mapping. Variational inequality theory has emerged as an important tool in studying a wide class of obstacle, unilateral, free, moving, equilibrium problems arising in several branches of pure and applied sciences in a unified and general framework. The variational inequality problem has been extensively studied in the literature; see [1–8] and the references cited therein.

In 2006, Aoyama *et al.* [9] first considered the following generalized variational inequality problem in Banach spaces. Let $A : C \to X$ be an accretive operator. Find a point $x^* \in C$ such that

$$\langle Ax^*, j(x - x^*)\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C. \tag{1.2}$$

Problem (1.2) is very interesting as it is connected with the fixed point problem for a nonlinear mapping and the problem of finding a zero point of an accretive operator in Banach spaces; see [10–13] and the references cited therein.

In 2010, Yao *et al.* [14] introduced the following system of general variational inequalities in Banach spaces. For given two operators $A, B : C \to X$, they considered the problem of finding $(x^*, y^*) \in C \times C$ such that

$$\begin{cases} \langle Ay^* + x^* - y^*, j(x - x^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle Bx^* + y^* - x^*, j(x - y^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \end{cases} \tag{1.3}$$

which is called *the system of general variational inequalities in a real Banach space* and the set of solutions of problem (1.3) denoted by Ω_1. Yao *et al.* proved the following strong convergence theorem.

Theorem YNNLY *Let C be a nonempty closed convex subset of a uniformly convex and 2-uniformly smooth Banach space X which admits a weakly sequentially continuous duality mapping. Let Q_C be the sunny nonexpansive retraction from X onto C. Let the mappings $A, B : C \to X$ be α-inverse-strongly accretive with $\alpha \geq K^2$ and β-inverse-strongly accretive with $\beta \geq K^2$, respectively, with $\Omega_1 \neq \emptyset$. For a given $x_0 \in C$, let the sequence $\{x_n\}$ be generated iteratively by*

$$\begin{cases} y_n = Q_C(x_n - Bx_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n Q_C(y_n - Ay_n), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

where $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ and $\{\gamma_n\}$ are three sequences in $(0,1)$. Suppose that the sequences $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ and $\{\gamma_n\}$ satisfy the following conditions:

(i) $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$, $\forall n \geq 0$;
(ii) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
(iii) $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty} \beta_n \leq 1$.

Then $\{x_n\}$ *converges strongly to* $Q'u$ *where* Q' *is the sunny nonexpansive retraction of* C *onto* Ω_1.

In 2011, Katchang and Kumam [15] introduced the following system of general variational inequalities in Banach spaces. For given two operators $A, B : C \to X$, they considered the problem of finding $(x^*, y^*) \in C \times C$ such that

$$\begin{cases} \langle \lambda A y^* + x^* - y^*, j(x - x^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \mu B x^* + y^* - x^*, j(x - y^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \end{cases} \tag{1.4}$$

which is called *the system of general variational inequalities* in a real Banach space and the set of solutions of problem (1.4) denoted by Ω_2. Katchang and Kumam proved the following strong convergence theorem.

Theorem KK *Let* C *be a nonempty closed convex subset of a uniformly convex and* 2*-uniformly smooth Banach space* X *which admits a weakly sequentially continuous duality mapping. Let* $S : C \to C$ *be a nonexpansive mapping and* Q_C *be a sunny nonexpansive retraction from* X *onto* C. *Let the mappings* $A, B : C \to X$ *be* β*-inverse-strongly accretive with* $\beta \geq \lambda K^2$ *and* γ*-inverse-strongly accretive with* $\gamma \geq \mu K^2$, *respectively, and let* K *be the* 2*-uniformly smooth constant of* X. *Let* f *be a contraction of* C *into itself with coefficient* $\alpha \in [0,1)$. *Suppose that* $F := \Omega_2 \cap F(S) \neq \emptyset$. *For a given* $x_0 = x \in C$, *let the sequence* $\{x_n\}$ *be generated iteratively by*

$$\begin{cases} y_n = Q_C(x_n - \mu B x_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n S Q_C(y_n - \lambda A y_n), & n \geq 0, \end{cases}$$

where $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ *and* $\{\gamma_n\}$ *are three sequences in* $(0,1)$. *Suppose that the sequences* $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ *and* $\{\gamma_n\}$ *satisfy the following conditions*:
(i) $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$, $\forall n \geq 0$;
(ii) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
(iii) $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1$.

Then $\{x_n\}$ *converges strongly to* $\bar{x} = Q_F f(\bar{x})$ *and* $(\bar{x}, \bar{y})$ *is a solution of problem* (1.4), *where* $\bar{y} = Q_C(\bar{x} - \mu B\bar{x})$ *and* Q_F *is the sunny nonexpansive retraction of* C *onto* F.

The problem of finding solutions of (1.4) by using iterative methods has been studied by many others; see [16–19] and the references cited therein.

In this paper, we focus on the problem of finding $(x^*, y^*, z^*) \in C \times C \times C$ such that

$$\begin{cases} \langle \lambda_1 A_1 y^* + x^* - y^*, j(x - x^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \lambda_2 A_2 z^* + y^* - z^*, j(x - y^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \lambda_3 A_3 x^* + z^* - x^*, j(x - z^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \end{cases} \tag{1.5}$$

which is called *a new general system of variational inequalities in Banach spaces*, where $A_i : C \to X$ are three mappings, $\lambda_i > 0$ for all $i = 1, 2, 3$. In particular, if $A_3 = 0$ and $z^* = x^*$, then problem (1.5) reduces to problem (1.4). If we add up the requirement that $\lambda_i = 1$ for $i = 1, 2$, then problem (1.5) reduces to problem (1.3).

In this paper, motivated and inspired by the idea of Katchang and Kumam [15] and Yao *et al.* [14], we introduce a new iterative method for finding a common element of the set of solutions of a new general system of variational inequalities in Banach spaces for two different relaxed cocoercive mappings and the set of fixed points of a nonexpansive mapping in real 2-uniformly smooth and uniformly convex Banach spaces. We prove the strong convergence of the proposed iterative algorithm without the condition of weakly sequentially continuous duality mapping. Our result improves and extends the corresponding results announced by many others.

2 Preliminaries

In this section, we recall the well-known results and give some useful lemmas that are used in the next section.

Let X be a Banach space and let $U = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ be a unit sphere of X. X is said to be *uniformly convex* if for each $\epsilon \in (0, 2]$, there exists a constant $\delta > 0$ such that for any $x, y \in U$,

$$\|x - y\| \geq \epsilon \quad \text{implies} \quad \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

The norm on X is said to be *Gâteaux differentiable* if the limit

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

exists for each $x, y \in U$ and in this case X is said to be *smooth*. X is said to have a *uniformly Frechet differentiable norm* if the limit (2.1) is attained uniformly for $x, y \in U$ and in this case X is said to be *uniformly smooth*. We define a function $\rho : [0, \infty) \to [0, \infty)$, called the *modulus of smoothness* of X, as follows:

$$\rho(\tau) = \sup\left\{ \frac{1}{2}\big(\|x + y\| + \|x - y\|\big) - 1 : x, y \in X, \|x\| = 1, \|y\| = \tau \right\}.$$

It is known that X is uniformly smooth if and only if $\lim_{\tau \to 0} \rho(\tau)/\tau = 0$. Let q be a fixed real number with $1 < q \leq 2$. Then a Banach space X is said to be *q-uniformly smooth* if there exists a constant $c > 0$ such that $\rho(\tau) \leq c\tau^q$ for all $\tau > 0$. For $q > 1$, the generalized duality mapping $J_q : X \to 2^{X^*}$ is defined by

$$J_q(x) = \left\{ f \in X^* : \langle x, f \rangle = \|x\|^q, \|f\| = \|x\|^{q-1} \right\}, \quad \forall x \in X.$$

In particular, if $q = 2$, the mapping J_2 is called the *normalized duality mapping* (or *duality mapping*), and usually we write $J_2 = J$. If X is a Hilbert space, then $J = I$. Further, we have the following properties of the generalized duality mapping J_q.

(1) $J_q(x) = \|x\|^{q-2} J_2(x)$ for all $x \in X$ with $x \neq 0$.

(2) $J_q(tx) = t^{q-1} J_q(x)$ for all $x \in X$ and $t \in [0, \infty)$.

(3) $J_q(-x) = -J_q(x)$ for all $x \in X$.

It is known that if X is smooth, then J is a single-valued function, which is denoted by j. Recall that the duality mapping j is said to be *weakly sequentially continuous* if for each $\{x_n\} \subset X$ with $x_n \rightharpoonup x$, we have $j(x_n) \rightharpoonup j(x)$ weakly-$*$. We know that if X admits a weakly sequentially continuous duality mapping, then X is smooth. For details, see [20].

Lemma 2.1 [21] *Let X be a q-uniformly smooth Banach space with $1 \leq q \leq 2$. Then*

$$\|x + y\|^q \leq \|x\|^q + q\langle y, J_q(x)\rangle + 2\|Ky\|^q$$

for all $x, y \in X$, where K is the q-uniformly smooth constant of X.

Lemma 2.2 [22] *In a Banach space X, the following inequality holds:*

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, j(x + y)\rangle, \quad \forall x, y \in X,$$

where $j(x + y) \in J(x + y)$.

Lemma 2.3 [23] *Assume that $\{a_n\}$ is a sequence of nonnegative real numbers such that*

$$a_{n+1} \leq (1 - \gamma_n)a_n + \delta_n, \quad n \geq 1,$$

where $\{\gamma_n\}$ is a sequence in $(0, 1)$ and $\{\delta_n\}$ is a sequence such that

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$;

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \delta_n/\gamma_n \leq 0$ *or* $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n| < \infty$.

Then $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Let C be a nonempty closed convex subset of a smooth Banach space X and let D be a nonempty subset of C. A mapping $Q : C \to D$ is said to be *sunny* if

$$Q\big(Qx + t(x - Qx)\big) = Qx,$$

whenever $Qx + t(x - Qx) \in C$ for $x \in C$ and $t \geq 0$. A mapping $Q : C \to D$ is called a *retraction* if $Qx = x$ for all $x \in D$. Furthermore, Q is a *sunny nonexpansive retraction* from C onto D if Q is a retraction from C onto D, which is also sunny and nonexpansive. A subset D of C is called a sunny nonexpansive retraction of C if there exists a sunny nonexpansive retraction from C onto D.

It is well known that if X is a Hilbert space, then a sunny nonexpansive retraction Q_C is coincident with the metric projection from X onto C.

Lemma 2.4 [24] *Let C be a closed convex subset of a smooth Banach space X. Let D be a nonempty subset of C and $Q : C \to D$ be a retraction. Then the following are equivalent:*

(a) *Q is sunny and nonexpansive.*

(b) $\|Qx - Qy\|^2 \leq \langle x - y, j(Qx - Qy)\rangle$, $\forall x, y \in C$.

(c) $\langle x - Qx, j(y - Qx)\rangle \leq 0$, $\forall x \in C$, $y \in D$.

Lemma 2.5 [25] *If X is strictly convex and uniformly smooth and if $T : C \to C$ is a nonexpansive mapping having a nonempty fixed point set $F(T)$, then the set $F(T)$ is a sunny nonexpansive retraction of C.*

Lemma 2.6 [26] *Let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be bounded sequences in a Banach space X and let $\{b_n\}$ be a sequence in $[0,1]$ with $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$. Suppose that $x_{n+1} = (1-b_n)y_n + b_n x_n$ for all integers $n \ge 1$ and $\limsup_{n\to\infty}(\|y_{n+1} - y_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \le 0$. Then $\lim_{n\to\infty}\|y_n - x_n\| = 0$.*

Lemma 2.7 [27] *Let C be a closed convex subset of a strictly convex Banach space X. Let T_1 and T_2 be two nonexpansive mappings from C into itself with $F(T_1)\cap F(T_2) \neq \emptyset$. Define a mapping S by*

$$Sx = \lambda T_1 x + (1-\lambda)T_2 x, \quad \forall x \in C,$$

where λ is a constant in $(0,1)$. Then S is nonexpansive and $F(S) = F(T_1)\cap F(T_2)$.

Lemma 2.8 [28] *Let X be a real smooth and uniformly convex Banach space and let $r > 0$. Then there exists a strictly increasing, continuous and convex function $g : [0,2r] \to \mathbb{R}$ such that $g(0) = 0$ and $g(\|x-y\|) \le \|x\|^2 - 2\langle x, j(y)\rangle + \|y\|^2$ for all $x, y \in B_r$.*

Lemma 2.9 [23] *Let X be a uniformly smooth Banach space, let C be a closed convex subset of X, let $T : C \to C$ be a nonexpansive mapping with $F(T) \neq \emptyset$ and let $f \in \Pi_C$. Then the sequence $\{x_t\}$ defined by $x_t = tf(x_t) + (1-t)Tx_t$ converges strongly to a point in $F(T)$ as $t \to 0$. If we define a mapping $Q : \Pi_C \to F(T)$ by $Q(f) := \lim_{t\to 0} x_t$, $\forall f \in \Pi_C$, then $Q(f)$ solves the following variational inequality:*

$$\langle (I-f)Q(f), j(Q(f)-p)\rangle \le 0, \quad \forall f \in \Pi_C, p \in F(T).$$

Lemma 2.10 [17] *Let C be a nonempty closed convex subset of a real 2-uniformly smooth Banach space X. Let the mapping $A : C \to X$ be relaxed (c,d)-cocoercive and L_A-Lipschitzian. Then we have*

$$\|(I-\lambda A)x - (I-\lambda A)y\|^2 \le \|x-y\|^2 + 2(\lambda c L_A^2 - \lambda d + K^2\lambda^2 L_A^2)\|x-y\|^2,$$

where $\lambda > 0$ and K is the 2-uniformly smooth constant of X. In particular, if $0 < \lambda \le \frac{d - cL_A^2}{K^2 L_A^2}$, then $I - \lambda A$ is a nonexpansive mapping.

In order to prove our main result, the next lemma is crucial for proving the main theorem.

Lemma 2.11 *Let C be a nonempty closed convex subset of a real 2-uniformly smooth Banach space X with the 2-uniformly smooth constant K. Let Q_C be the sunny nonexpansive retraction from X onto C and let $A_i : C \to X$ be a relaxed (c_i, d_i)-cocoercive and L_i-Lipschitzian mapping for $i = 1,2,3$. Let $G : C \to C$ be a mapping defined by*

$$\begin{aligned} G(x) = Q_C\bigl[&Q_C\bigl(Q_C(x - \lambda_3 A_3 x) - \lambda_2 A_2 Q_C(x - \lambda_3 A_3 x)\bigr) \\ &- \lambda_1 A_1 Q_C\bigl(Q_C(x - \lambda_3 A_3 x) - \lambda_2 A_2 Q_C(x - \lambda_3 A_3 x)\bigr)\bigr], \quad \forall x \in C. \end{aligned}$$

If $0 < \lambda_i \le \frac{d_i - c_i L_i{}^2}{K^2 L_i{}^2}$ for all $i = 1,2,3$, then $G : C \to C$ is nonexpansive.

Proof For all $x, y \in C$, by Lemma 2.10, we have

$$\begin{aligned}
\|G(x) - G(y)\| &= \|Q_C[Q_C(Q_C(I - \lambda_3 A_3)x - \lambda_2 A_2 Q_C(I - \lambda_3 A_3)x) \\
&\quad - \lambda_1 A_1 Q_C(Q_C(I - \lambda_3 A_3)x - \lambda_2 A_2 Q_C(I - \lambda_3 A_3)x)] \\
&\quad - Q_C[Q_C(Q_C(I - \lambda_3 A_3)y - \lambda_2 A_2 Q_C(I - \lambda_3 A_3)y) \\
&\quad - \lambda_1 A_1 Q_C(Q_C(I - \lambda_3 A_3)y - \lambda_2 A_2 Q_C(I - \lambda_3 A_3)y)]\| \\
&\le \|Q_C(Q_C(I - \lambda_3 A_3)x - \lambda_2 A_2 Q_C(I - \lambda_3 A_3)x) \\
&\quad - \lambda_1 A_1 Q_C(Q_C(I - \lambda_3 A_3)x - \lambda_2 A_2 Q_C(I - \lambda_3 A_3)x) \\
&\quad - [Q_C(Q_C(I - \lambda_3 A_3)y - \lambda_2 A_2 Q_C(I - \lambda_3 A_3)y) \\
&\quad - \lambda_1 A_1 Q_C(Q_C(I - \lambda_3 A_3)y - \lambda_2 A_2 Q_C(I - \lambda_3 A_3)y)]\| \\
&= \|(I - \lambda_1 A_1)Q_C(I - \lambda_2 A_2)Q_C(I - \lambda_3 A_3)x \\
&\quad - (I - \lambda_1 A_1)Q_C(I - \lambda_2 A_2)Q_C(I - \lambda_3 A_3)y\| \\
&\le \|x - y\|,
\end{aligned}$$

which implies that G is nonexpansive. □

Lemma 2.12 [29] *Let C be a nonempty closed convex subset of a real smooth Banach space X. Let Q_C be the sunny nonexpansive retraction from X onto C. Let $A_i : C \to X$ be three possibly nonlinear mappings. For given $x^*, y^*, z^* \in C$, (x^*, y^*, z^*) is a solution of problem* (1.5) *if and only if $x^* \in F(G)$, $y^* = Q_C(z^* - \lambda_2 A_2 z^*)$ and $z^* = Q_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)$, where G is the mapping defined as in Lemma* 2.11.

3 Main results

We are now in a position to state and prove our main result.

Theorem 3.1 *Let X be a uniformly convex and 2-uniformly smooth Banach space with the 2-uniformly smooth constant K, let C be a nonempty closed convex subset of X and Q_C be a sunny nonexpansive retraction from X onto C. Let the mappings $A_i : C \to X$ be relaxed (c_i, d_i)-cocoercive and L_i-Lipschitzian with $0 < \lambda_i < \frac{d_i - c_i L_i^2}{K^2 L_i^2}$ for all $i = 1, 2, 3$. Let f be a contractive mapping with the constant $\alpha \in (0,1)$ and let $S : C \to C$ be a nonexpansive mapping such that $\Omega = F(S) \cap F(G) \neq \emptyset$, where G is the mapping defined as in Lemma* 2.11. *For a given $x_1 \in C$, let $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ and $\{z_n\}$ be the sequences generated by*

$$\begin{cases} z_n = Q_C(x_n - \lambda_3 A_3 x_n), \\ y_n = Q_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n), \\ x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \ge 1, \end{cases} \tag{3.1}$$

where $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ are two sequences in $(0,1)$ such that

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$.

Then $\{x_n\}$ converges strongly to $q \in \Omega$, which solves the following variational inequality:

$$\langle q - f(q), j(q - p)\rangle \le 0, \quad \forall f \in \Pi_C, p \in \Omega.$$

Proof *Step 1.* We show that $\{x_n\}$ is bounded.

Let $x^* \in \Omega$ and $t_n = Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n)$. It follows from Lemma 2.12 that

$$\begin{aligned}x^* = Q_C\bigl[&Q_C\bigl(Q_C\bigl(x^* - \lambda_3 A_3 x^*\bigr) - \lambda_2 A_2 Q_C\bigl(x^* - \lambda_3 A_3 x^*\bigr)\bigr)\\ &- \lambda_1 A_1 Q_C\bigl(Q_C\bigl(x^* - \lambda_3 A_3 x^*\bigr) - \lambda_2 A_2 Q_C\bigl(x^* - \lambda_3 A_3 x^*\bigr)\bigr)\bigr].\end{aligned}$$

Put $y^* = Q_C(z^* - \lambda_2 A_2 z^*)$ and $z^* = Q_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)$. Then $x^* = Q_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)$ and

$$x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S t_n.$$

From Lemma 2.10, we have $I - \lambda_i A_i$ $(i = 1, 2, 3)$ is nonexpansive. Therefore

$$\begin{aligned}\|t_n - x^*\| &= \|Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - Q_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\| \le \|y_n - y^*\|\\ &= \|Q_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n) - Q_C(z^* - \lambda_2 A_2 z^*)\| \le \|z_n - z^*\|\\ &= \|Q_C(x_n - \lambda_3 A_3 x_n) - Q_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)\| \le \|x_n - x^*\|\end{aligned} \tag{3.2}$$

and $\|St_n - x^*\| \le \|t_n - x^*\|$. It follows from (3.2) that

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x^*\| &= \|a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S t_n - x^*\|\\ &\le a_n \|f(x_n) - x^*\| + b_n \|x_n - x^*\| + (1 - a_n - b_n)\|t_n - x^*\|\\ &\le a_n \|f(x_n) - x^*\| + (1 - a_n)\|x_n - x^*\|\\ &\le a_n \alpha \|x_n - x^*\| + a_n \|f(x^*) - x^*\| + (1 - a_n)\|x_n - x^*\|\\ &= a_n \|f(x^*) - x^*\| + \bigl(1 - a_n(1 - \alpha)\bigr)\|x_n - x^*\|.\end{aligned}$$

By induction, we have

$$\|x_{n+1} - x^*\| \le \max\left\{\frac{\|f(x^*) - x^*\|}{1 - \alpha}, \|x_1 - x^*\|\right\}.$$

Therefore, $\{x_n\}$ is bounded. Hence $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, $\{t_n\}$, $\{A_1 y_n\}$, $\{A_2 z_n\}$, $\{St_n\}$, $\{f(x_n)\}$ and $\{A_3 x_n\}$ are also bounded.

Step 2. We show that $\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$.

By nonexpansiveness of Q_C and $I - \lambda_i A_i$ $(i = 1, 2, 3)$, we have

$$\begin{aligned}\|t_{n+1} - t_n\| &= \|Q_C(y_{n+1} - \lambda_1 A_1 y_{n+1}) - Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n)\|\\ &\le \|y_{n+1} - y_n\|\\ &= \|Q_C(z_{n+1} - \lambda_2 A_2 z_{n+1}) - Q_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n)\|\\ &\le \|z_{n+1} - z_n\|\\ &= \|Q_C(x_{n+1} - \lambda_3 A_3 x_{n+1}) - Q_C(x_n - \lambda_3 A_3 x_n)\|\\ &\le \|x_{n+1} - x_n\|.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Let $w_n = \frac{x_{n+1}-b_n x_n}{1-b_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Then $x_{n+1} = b_n x_n + (1-b_n)w_n$ for all $n \in \mathbb{N}$ and

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{x_{n+2} - b_{n+1}x_{n+1}}{1-b_{n+1}} - \frac{x_{n+1} - b_n x_n}{1-b_n} \\ &= \frac{a_{n+1}f(x_{n+1}) + (1-a_{n+1}-b_{n+1})St_{n+1}}{1-b_{n+1}} - \frac{a_n f(x_n) + (1-a_n-b_n)St_n}{1-b_n} \\ &= \frac{a_{n+1}}{1-b_{n+1}}\big(f(x_{n+1}) - St_{n+1}\big) + \frac{a_n}{1-b_n}\big(St_n - f(x_n)\big) + St_{n+1} - St_n. \end{aligned} \tag{3.4}$$

By (3.3), (3.4) and nonexpansiveness of S, we have

$$\|w_{n+1} - w_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \le \frac{a_{n+1}}{1-b_{n+1}}\|f(x_{n+1}) - St_{n+1}\| + \frac{a_n}{1-b_n}\|St_n - f(x_n)\|.$$

By this together with (C1) and (C2), we obtain that

$$\limsup_{n\to\infty} \|w_{n+1} - w_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \le 0.$$

Hence, by Lemma 2.6, we get $\|x_n - w_n\| \to 0$ as $n \to \infty$. Consequently,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n\to\infty} (1-b_n)\|w_n - x_n\| = 0. \tag{3.5}$$

Step 3. We show that $\lim_{n\to\infty} \|Sx_n - x_n\| = 0$.

Since

$$x_{n+1} - x_n = a_n\big(f(x_n) - x_n\big) + (1-a_n-b_n)(St_n - x_n),$$

therefore

$$\|St_n - x_n\| \to 0 \quad \text{as } n \to \infty. \tag{3.6}$$

Next, we prove that $\lim_{n\to\infty} \|x_n - t_n\| = 0$. From Lemma 2.1 and nonexpansiveness of Q_C, we have

$$\begin{aligned} \|z_n - z^*\|^2 &= \|Q_C(x_n - \lambda_3 A_3 x_n) - Q_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)\|^2 \\ &\le \|x_n - x^* - \lambda_3(A_3x_n - A_3x^*)\|^2 \\ &\le \|x_n - x^*\|^2 - 2\lambda_3\langle A_3x_n - A_3x^*, j(x_n - x^*)\rangle \\ &\quad + 2K^2\lambda_3^2\|A_3x_n - A_3x^*\|^2 \\ &\le \|x_n - x^*\|^2 - 2\lambda_3\big(-c_3\|A_3x_n - A_3x^*\|^2 + d_3\|x_n - x^*\|^2\big) \\ &\quad + 2K^2\lambda_3^2\|A_3x_n - A_3x^*\|^2 \\ &\le \|x_n - x^*\|^2 + 2\lambda_3c_3\|A_3x_n - A_3x^*\|^2 - \frac{2\lambda_3 d_3}{L_3^2}\|A_3x_n - A_3x^*\|^2 \\ &\quad + 2K^2\lambda_3^2\|A_3x_n - A_3x^*\|^2 \\ &= \|x_n - x^*\|^2 - 2\lambda_3\left(\frac{d_3}{L_3^2} - c_3 - K^2\lambda_3\right)\|A_3x_n - A_3x^*\|^2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

and

$$\begin{aligned}
\|y_n - y^*\|^2 &= \|Q_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n) - Q_C(z^* - \lambda_2 A_2 z^*)\|^2 \\
&\le \|z_n - z^* - \lambda_2(A_2 z_n - A_2 z^*)\|^2 \\
&\le \|z_n - z^*\|^2 - 2\lambda_2\langle A_2 z_n - A_2 z^*, j(z_n - z^*)\rangle \\
&\quad + 2K^2\lambda_2^2\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 \\
&\le \|z_n - z^*\|^2 - 2\lambda_2\left(-c_2\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 + d_2\|z_n - z^*\|^2\right) \\
&\quad + 2K^2\lambda_2^2\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 \\
&\le \|z_n - z^*\|^2 + 2\lambda_2 c_2\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 - \frac{2\lambda_2 d_2}{L_2^2}\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 \\
&\quad + 2K^2\lambda_2^2\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 \\
&= \|z_n - z^*\|^2 - 2\lambda_2\left(\frac{d_2}{L_2^2} - c_2 - K^2\lambda_2\right)\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Similarly, we have

$$\begin{aligned}
\|t_n - x^*\|^2 &= \|Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - Q_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\|^2 \\
&\le \|y_n - y^* - \lambda_1(A_1 y_n - A_1 y^*)\|^2 \\
&\le \|y_n - y^*\|^2 - 2\lambda_1\langle A_1 y_n - A_1 y^*, j(y_n - y^*)\rangle \\
&\quad + 2K^2\lambda_1^2\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2 \\
&\le \|y_n - y^*\|^2 - 2\lambda_1\left(-c_1\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2 + d_1\|y_n - y^*\|^2\right) \\
&\quad + 2K^2\lambda_1^2\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2 \\
&\le \|y_n - y^*\|^2 + 2\lambda_1 c_1\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2 - \frac{2\lambda_1 d_1}{L_1^2}\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2 \\
&\quad + 2K^2\lambda_1^2\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2 \\
&= \|y_n - y^*\|^2 - 2\lambda_1\left(\frac{d_1}{L_1^2} - c_1 - K^2\lambda_1\right)\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Substituting (3.7) and (3.8) into (3.9), we have

$$\begin{aligned}
\|t_n - x^*\|^2 \le{}& \|x_n - x^*\|^2 - 2\lambda_3\left(\frac{d_3}{L_3^2} - c_3 - K^2\lambda_3\right)\|A_3 x_n - A_3 x^*\|^2 \\
&- 2\lambda_2\left(\frac{d_2}{L_2^2} - c_2 - K^2\lambda_2\right)\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 \\
&- 2\lambda_1\left(\frac{d_1}{L_1^2} - c_1 - K^2\lambda_1\right)\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

By the convexity of $\|\cdot\|^2$, we obtain

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 &= \|a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n - b_n)St_n - x^*\|^2 \\
&\le a_n\|f(x_n) - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|St_n - x^*\|^2 \\
&\le a_n\|f(x_n) - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|t_n - x^*\|^2. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Substituting (3.10) into (3.11), we have

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2 &\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\&\quad+(1-a_n-b_n)\biggl(\|x_n-x^*\|^2-2\lambda_3\Bigl(\frac{d_3}{L_3^2}-c_3-K^2\lambda_3\Bigr)\|A_3x_n-A_3x^*\|^2\\&\quad-2\lambda_2\Bigl(\frac{d_2}{L_2^2}-c_2-K^2\lambda_2\Bigr)\|A_2z_n-A_2z^*\|^2\\&\quad-2\lambda_1\Bigl(\frac{d_1}{L_1^2}-c_1-K^2\lambda_1\Bigr)\|A_1y_n-A_1y^*\|^2\biggr)\\&=a_n\|f(x_n)-x^*\|^2+(1-a_n)\|x_n-x^*\|^2\\&\quad-(1-a_n-b_n)2\lambda_3\Bigl(\frac{d_3}{L_3^2}-c_3-K^2\lambda_3\Bigr)\|A_3x_n-A_3x^*\|^2\\&\quad-(1-a_n-b_n)2\lambda_2\Bigl(\frac{d_2}{L_2^2}-c_2-K^2\lambda_2\Bigr)\|A_2z_n-A_2z^*\|^2\\&\quad-(1-a_n-b_n)2\lambda_1\Bigl(\frac{d_1}{L_1^2}-c_1-K^2\lambda_1\Bigr)\|A_1y_n-A_1y^*\|^2,\end{aligned}$$

which implies

$$\begin{aligned}&(1-a_n-b_n)2\lambda_3\Bigl(\frac{d_3}{L_3^2}-c_3-K^2\lambda_3\Bigr)\|A_3x_n-A_3x^*\|^2\\&\quad+(1-a_n-b_n)2\lambda_2\Bigl(\frac{d_2}{L_2^2}-c_2-K^2\lambda_2\Bigr)\|A_2z_n-A_2z^*\|^2\\&\quad+(1-a_n-b_n)2\lambda_1\Bigl(\frac{d_1}{L_1^2}-c_1-K^2\lambda_1\Bigr)\|A_1y_n-A_1y^*\|^2\\&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2-\|x_{n+1}-x^*\|^2\\&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2+\|x_n-x_{n+1}\|\bigl(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|\bigr).\end{aligned}$$

By the conditions (C1), (C2), (3.5) and $0<\lambda_i<\frac{d_i-c_iL_i^2}{K^2L_i^2}$ for each $i=1,2,3$, we obtain

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\|A_3x_n-A_3x^*\|=0,\qquad\lim_{n\to\infty}\|A_2z_n-A_2z^*\|=0\quad\text{and}\\&\lim_{n\to\infty}\|A_1y_n-A_1y^*\|=0.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Let $r=\sup_{n\ge1}\{\|x_n-x^*\|,\|z_n-z^*\|,\|y_n-y^*\|,\|t_n-x^*\|\}$. By Lemma 2.4(b) and Lemma 2.8, we obtain

$$\begin{aligned}\|t_n-x^*\|^2&=\|Q_C(y_n-\lambda_1A_1y_n)-Q_C(y^*-\lambda_1A_1y^*)\|^2\\&\le\bigl\langle y_n-\lambda_1A_1y_n-(y^*-\lambda_1A_1y^*),j(t_n-x^*)\bigr\rangle\\&=\bigl\langle y_n-y^*,j(t_n-x^*)\bigr\rangle-\lambda_1\bigl\langle A_1y_n-A_1y^*,j(t_n-x^*)\bigr\rangle\\&\le\frac12\bigl[\|y_n-y^*\|^2+\|t_n-x^*\|^2-g\bigl(\|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|\bigr)\bigr]\\&\quad+\lambda_1\bigl\langle A_1y^*-A_1y_n,j(t_n-x^*)\bigr\rangle,\end{aligned}$$

which implies

$$\begin{aligned}\|t_n - x^*\|^2 &\le \|y_n - y^*\|^2 - g(\|y_n - y^* - (t_n - x^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_1\langle A_1y^* - A_1y_n, j(t_n - x^*)\rangle \\ &\le \|y_n - y^*\|^2 - g(\|y_n - y^* - (t_n - x^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_1\|A_1y^* - A_1y_n\|\|t_n - x^*\|. \end{aligned} \tag{3.13}$$

And

$$\begin{aligned}\|y_n - y^*\|^2 &= \|Q_C(z_n - \lambda_2A_2z_n) - Q_C(z^* - \lambda_2A_2z^*)\|^2 \\ &\le \langle z_n - \lambda_2A_2z_n - (z^* - \lambda_2A_2z^*), j(y_n - y^*)\rangle \\ &= \langle z_n - z^*, j(y_n - y^*)\rangle - \lambda_2\langle A_2z_n - A_2z^*, j(y_n - y^*)\rangle \\ &\le \frac{1}{2}\big[\|z_n - z^*\|^2 + \|y_n - y^*\|^2 - g(\|z_n - z^* - (y_n - y^*)\|)\big] \\ &\quad + \lambda_2\langle A_2z^* - A_2z_n, j(y_n - y^*)\rangle, \end{aligned}$$

which implies

$$\begin{aligned}\|y_n - y^*\|^2 &\le \|z_n - z^*\|^2 - g(\|z_n - z^* - (y_n - y^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_2\langle A_2z^* - A_2z_n, j(y_n - y^*)\rangle \\ &\le \|z_n - z^*\|^2 - g(\|z_n - z^* - (y_n - y^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_2\|A_2z^* - A_2z_n\|\|y_n - y^*\|. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Similarly, we have

$$\begin{aligned}\|z_n - z^*\|^2 &= \|Q_C(x_n - \lambda_3A_3x_n) - Q_C(x^* - \lambda_3A_3x^*)\|^2 \\ &\le \langle x_n - \lambda_3A_3x_n - (x^* - \lambda_3A_3x^*), j(z_n - z^*)\rangle \\ &= \langle x_n - x^*, j(z_n - z^*)\rangle - \lambda_3\langle A_3x_n - A_3x^*, j(z_n - z^*)\rangle \\ &\le \frac{1}{2}\big[\|x_n - x^*\|^2 + \|z_n - z^*\|^2 - g(\|x_n - x^* - (z_n - z^*)\|)\big] \\ &\quad + \lambda_3\langle A_3x^* - A_3x_n, j(z_n - z^*)\rangle, \end{aligned}$$

which implies

$$\begin{aligned}\|z_n - z^*\|^2 &\le \|x_n - x^*\|^2 - g(\|x_n - x^* - (z_n - z^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_3\langle A_3x^* - A_3x_n, j(z_n - z^*)\rangle \\ &\le \|x_n - x^*\|^2 - g(\|x_n - x^* - (z_n - z^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_3\|A_3x^* - A_3x_n\|\|z_n - z^*\|. \end{aligned} \tag{3.15}$$

From (3.11), (3.13), (3.14) and (3.15), we have

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2 &\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)\|t_n-x^*\|^2\\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\big[\|y_n-y^*\|^2-g\big(\|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|\big)\\
&\quad+2\lambda_1\|A_1y^*-A_1y_n\|\|t_n-x^*\|\big]\\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\big[\|z_n-z^*\|^2-g\big(\|z_n-z^*-(y_n-y^*)\|\big)\\
&\quad+2\lambda_2\|A_2z^*-A_2z_n\|\|y_n-y^*\|-g\big(\|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|\big)\\
&\quad+2\lambda_1\|A_1y^*-A_1y_n\|\|t_n-x^*\|\big]\\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\big[\|x_n-x^*\|^2-g\big(\|x_n-x^*-(z_n-z^*)\|\big)\\
&\quad+2\lambda_3\|A_3x^*-A_3x_n\|\|z_n-z^*\|-g\big(\|z_n-z^*-(y_n-y^*)\|\big)\\
&\quad+2\lambda_2\|A_2z^*-A_2z_n\|\|y_n-y^*\|-g\big(\|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|\big)\\
&\quad+2\lambda_1\|A_1y^*-A_1y_n\|\|t_n-x^*\|\big]\\
&= a_n\|f(x_n)-x^*\|^2+(1-a_n)\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\big(2\lambda_1\|A_1y^*-A_1y_n\|\|t_n-x^*\|\big)\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\big(2\lambda_2\|A_2z^*-A_2z_n\|\|y_n-y^*\|\big)\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\big(2\lambda_3\|A_3x^*-A_3x_n\|\|z_n-z^*\|\big)\\
&\quad-(1-a_n-b_n)g\big(\|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|\big)\\
&\quad-(1-a_n-b_n)g\big(\|z_n-z^*-(y_n-y^*)\|\big)\\
&\quad-(1-a_n-b_n)g\big(\|x_n-x^*-(z_n-z^*)\|\big),
\end{aligned}$$

which implies

$$\begin{aligned}
&(1-a_n-b_n)g\big(\|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|\big)+(1-a_n-b_n)g\big(\|z_n-z^*-(y_n-y^*)\|\big)\\
&\qquad+(1-a_n-b_n)g\big(\|x_n-x^*-(z_n-z^*)\|\big)\\
&\quad\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2-\|x_{n+1}-x^*\|^2\\
&\qquad+(1-a_n-b_n)\big(2\lambda_1\|A_1y^*-A_1y_n\|\|t_n-x^*\|\big)\\
&\qquad+(1-a_n-b_n)\big(2\lambda_2\|A_2z^*-A_2z_n\|\|y_n-y^*\|\big)\\
&\qquad+(1-a_n-b_n)\big(2\lambda_3\|A_3x^*-A_3x_n\|\|z_n-z^*\|\big)\\
&\quad\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2+\|x_n-x_{n+1}\|\big(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|\big)\\
&\qquad+(1-a_n-b_n)\big(2\lambda_1\|A_1y^*-A_1y_n\|\|t_n-x^*\|\big)\\
&\qquad+(1-a_n-b_n)\big(2\lambda_2\|A_2z^*-A_2z_n\|\|y_n-y^*\|\big)\\
&\qquad+(1-a_n-b_n)\big(2\lambda_3\|A_3x^*-A_3x_n\|\|z_n-z^*\|\big).
\end{aligned}$$

By the conditions (C1), (C2), (3.5) and (3.12), we obtain

$$\lim_{n\to\infty} g\big(\big\|y_n - y^* - (t_n - x^*)\big\|\big) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} g\big(\big\|z_n - z^* - (y_n - y^*)\big\|\big) = 0 \quad \text{and}$$
$$\lim_{n\to\infty} g\big(\big\|x_n - x^* - (z_n - z^*)\big\|\big) = 0.$$

It follows from the properties of g that

$$\lim_{n\to\infty} \big\|y_n - y^* - (t_n - x^*)\big\| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \big\|z_n - z^* - (y_n - y^*)\big\| = 0 \quad \text{and}$$
$$\lim_{n\to\infty} \big\|x_n - x^* - (z_n - z^*)\big\| = 0.$$

Therefore

$$\begin{aligned}\|x_n - t_n\| &\le \big\|x_n - z_n - (x^* - z^*)\big\| + \big\|z_n - y_n - (z^* - y^*)\big\| \\ &\quad + \big\|y_n - t_n - (y^* - x^*)\big\| \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.\end{aligned} \tag{3.16}$$

By (3.6) and (3.16), we have

$$\begin{aligned}\|Sx_n - x_n\| &\le \|Sx_n - St_n\| + \|St_n - x_n\| \\ &\le \|x_n - t_n\| + \|St_n - x_n\| \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Define a mapping $W : C \to C$ as

$$Wx = \eta Sx + (1-\eta)Gx, \quad \forall x \in C,$$

where η is a constant in $(0,1)$. Then it follows from Lemma 2.7 that $F(W) = F(G) \cap F(S)$ and W is nonexpansive. From (3.16) and (3.17), we have

$$\begin{aligned}\|x_n - Wx_n\| &= \big\|x_n - \big(\eta Sx_n + (1-\eta)Gx_n\big)\big\| \\ &= \big\|\eta(x_n - Sx_n) + (1-\eta)(x_n - Gx_n)\big\| \\ &\le \eta\|x_n - Sx_n\| + (1-\eta)\|x_n - Gx_n\| \\ &= \eta\|x_n - Sx_n\| + (1-\eta)\|x_n - t_n\| \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Step 4. We claim that

$$\limsup_{n\to\infty} \big\langle f(q) - q, j(x_n - q)\big\rangle \le 0, \tag{3.19}$$

where $q = \lim_{t\to 0} x_t$ with x_t being the fixed point of the contraction

$$x \mapsto tf(x) + (1-t)Wx.$$

From Lemma 2.9, we have $q \in F(W) = F(G) \cap F(S) = \Omega$ and

$$\big\langle (I-f)q, j(q-p)\big\rangle \le 0, \quad \forall f \in \Pi_C, p \in \Omega.$$

Since $x_t = tf(x_t) + (1-t)Wx_t$, we have

$$\begin{aligned}\|x_t - x_n\| &= \|tf(x_t) + (1-t)Wx_t - x_n\| \\ &= \|(1-t)(Wx_t - x_n) + t(f(x_t) - x_n)\|.\end{aligned}$$

It follows from (3.18) and Lemma 2.2 that

$$\begin{aligned}\|x_t - x_n\|^2 &= \|(1-t)(Wx_t - x_n) + t(f(x_t) - x_n)\|^2 \\ &\le (1-t)^2\|Wx_t - x_n\|^2 + 2t\langle f(x_t) - x_n, j(x_t - x_n)\rangle \\ &\le (1-t)^2\big(\|Wx_t - Wx_n\| + \|Wx_n - x_n\|\big)^2 \\ &\quad + 2t\langle f(x_t) - x_n, j(x_t - x_n)\rangle \\ &= (1-t)^2\big(\|Wx_t - Wx_n\|^2 + 2\|Wx_t - Wx_n\|\|Wx_n - x_n\| + \|Wx_n - x_n\|^2\big) \\ &\quad + 2t\langle f(x_t) - x_t, j(x_t - x_n)\rangle + 2t\langle x_t - x_n, j(x_t - x_n)\rangle \\ &\le (1 - 2t + t^2)\|x_t - x_n\|^2 + (1-t)^2\big(2\|x_t - x_n\|\|Wx_n - x_n\| + \|Wx_n - x_n\|^2\big) \\ &\quad + 2t\langle f(x_t) - x_t, j(x_t - x_n)\rangle + 2t\|x_t - x_n\|^2 \\ &= (1 + t^2)\|x_t - x_n\|^2 + f_n(t) + 2t\langle f(x_t) - x_t, j(x_t - x_n)\rangle, \end{aligned} \tag{3.20}$$

where $f_n(t) = (1-t)^2(2\|x_t - x_n\| + \|Wx_n - x_n\|)\|Wx_n - x_n\| \to 0$ as $n \to \infty$. It follows from (3.20) that

$$\langle x_t - f(x_t), j(x_t - x_n)\rangle \le \frac{t}{2}\|x_t - x_n\|^2 + \frac{f_n(t)}{2t}. \tag{3.21}$$

Let $n \to \infty$ in (3.21), we obtain that

$$\limsup_{n\to\infty}\langle x_t - f(x_t), j(x_t - x_n)\rangle \le \frac{t}{2}M, \tag{3.22}$$

where $M > 0$ is a constant such that $M \ge \|x_t - x_n\|^2$ for all $t \in (0,1)$ and $n \ge 1$. Let $t \to 0$ in (3.22), we obtain

$$\limsup_{t\to 0}\limsup_{n\to\infty}\langle x_t - f(x_t), j(x_t - x_n)\rangle \le 0. \tag{3.23}$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned}\langle f(q) - q, j(x_n - q)\rangle &= \langle f(q) - q, j(x_n - q)\rangle - \langle f(q) - q, j(x_n - x_t)\rangle \\ &\quad + \langle f(q) - q, j(x_n - x_t)\rangle - \langle f(q) - x_t, j(x_n - x_t)\rangle \\ &\quad + \langle f(q) - x_t, j(x_n - x_t)\rangle - \langle f(x_t) - x_t, j(x_n - x_t)\rangle \\ &\quad + \langle f(x_t) - x_t, j(x_n - x_t)\rangle \\ &= \langle f(q) - q, j(x_n - q) - j(x_n - x_t)\rangle + \langle x_t - q, j(x_n - x_t)\rangle \\ &\quad + \langle f(q) - f(x_t), j(x_n - x_t)\rangle + \langle f(x_t) - x_t, j(x_n - x_t)\rangle.\end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\langle f(q)-q,j(x_n-q)\rangle &\le \limsup_{n\to\infty}\langle f(q)-q,j(x_n-q)-j(x_n-x_t)\rangle \\ &\quad + \|x_t-q\|\limsup_{n\to\infty}\|x_n-x_t\| + \alpha\|x_t-q\|\limsup_{n\to\infty}\|x_n-x_t\| \\ &\quad + \limsup_{n\to\infty}\langle f(x_t)-x_t,j(x_n-x_t)\rangle.\end{aligned}$$

Noticing that j is norm-to-norm uniformly continuous on a bounded subset of C, it follows from (3.23) and $\lim_{t\to 0} x_t = q$ that

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f(q)-q,j(x_n-q)\rangle = \limsup_{t\to 0}\limsup_{n\to\infty}\langle f(q)-q,j(x_n-q)\rangle \le 0.$$

Hence (3.19) holds.

Step 5. Finally, we show that $x_n \to q$ as $n\to\infty$.

From (3.2), we have

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^2 &= \langle x_{n+1}-q,j(x_{n+1}-q)\rangle \\ &= \langle a_n(f(x_n)-q)+b_n(x_n-q)+(1-a_n-b_n)(St_n-q),j(x_{n+1}-q)\rangle \\ &= a_n\langle f(x_n)-f(q),j(x_{n+1}-q)\rangle + b_n\langle x_n-q,j(x_{n+1}-q)\rangle \\ &\quad + (1-a_n-b_n)\langle St_n-q,j(x_{n+1}-q)\rangle + a_n\langle f(q)-q,j(x_{n+1}-q)\rangle \\ &\le a_n\alpha\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\| + b_n\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\| \\ &\quad + (1-a_n-b_n)\|St_n-q\|\|x_{n+1}-q\| + a_n\langle f(q)-q,j(x_{n+1}-q)\rangle \\ &\le a_n\alpha\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\| + b_n\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\| \\ &\quad + (1-a_n-b_n)\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\| + a_n\langle f(q)-q,j(x_{n+1}-q)\rangle \\ &= (1-a_n(1-\alpha))\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\| + a_n\langle f(q)-q,j(x_{n+1}-q)\rangle \\ &\le \frac{1-a_n(1-\alpha)}{2}\left(\|x_n-q\|^2+\|x_{n+1}-q\|^2\right) + a_n\langle f(q)-q,j(x_{n+1}-q)\rangle \\ &\le \frac{1-a_n(1-\alpha)}{2}\|x_n-q\|^2 + \frac{1}{2}\|x_{n+1}-q\|^2 + a_n\langle f(q)-q,j(x_{n+1}-q)\rangle,\end{aligned}$$

which implies

$$\|x_{n+1}-q\|^2 \le (1-a_n(1-\alpha))\|x_n-q\|^2 + a_n(1-\alpha)\frac{2\langle f(q)-q,j(x_{n+1}-q)\rangle}{1-\alpha}.$$

It follows from Lemma 2.3, (3.19) and condition (C1) that $\{x_n\}$ converges strongly to q. This completes the proof. □

Example 3.2 Let $X=\mathbb{R}$ and $C=[0,1]$. Define the mappings $S,f:C\to C$ and $A_1,A_2,A_3:C\to X$ as follows:

$$S(x)=\frac{x}{3},\qquad f(x)=\frac{x}{2}+3,\qquad A_1(x)=x,\qquad A_2(x)=2x\quad\text{and}\quad A_3(x)=3x.$$

Then it is obvious that S is nonexpansive, f is contractive with a constant $\alpha = \frac{1}{2}$, A_1 is relaxed $(\frac{1}{2},1)$-cocoercive and 1-Lipschitzian, A_2 is relaxed $(\frac{1}{4},2)$-cocoercive and 2-Lipschitzian and A_3 is relaxed $(\frac{1}{9},3)$-cocoercive and 3-Lipschitzian. In this case, we have $\Omega = F(S) \cap F(G) = \{0\}$. In the terms of Theorem 3.1, we choose the parameters λ_1, λ_2, λ_3. Then the sequence $\{x_n\}$ generated by (3.1) converges to $q = 0 \in \Omega$, which solves the following variational inequality:

$$\langle q - f(q), j(q-p)\rangle \le 0, \quad \forall p \in \Omega.$$

Let $A_3 = 0$ in Theorem 3.1, we obtain the following result.

Corollary 3.3 *Let X be a uniformly convex and 2-uniformly smooth Banach space with the 2-uniformly smooth constant K, let C be a nonempty closed convex subset of X and Q_C a sunny nonexpansive retraction from X onto C. Let the mappings $A_i : C \to X$ be relaxed (c_i, d_i)-cocoercive and L_i-Lipschitzian with $0 < \lambda_i < \frac{d_i - c_i L_i^2}{K^2 L_i^2}$, for all $i = 1, 2$. Let f be a contractive mapping with the constant $\alpha \in (0,1)$ and let $S : C \to C$ be a nonexpansive mapping such that $F = F(S) \cap \Omega_2 \neq \emptyset$, where Ω_2 is the set of solutions of problem (1.4). For a given $x_1 \in C$, let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be the sequences generated by*

$$\begin{cases} y_n = Q_C(x_n - \lambda_2 A_2 x_n), \\ x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \ge 1, \end{cases}$$

where $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ are two sequences in $(0,1)$ such that

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$.

Then $\{x_n\}$ converges strongly to $q \in F$, which solves the following variational inequality:

$$\langle q - f(q), j(q-p)\rangle \le 0, \quad \forall f \in \Pi_C, p \in F.$$

Remark 3.4 (i) Since L^p for all $p > 2$ is uniformly convex and 2-uniformly smooth, we see that Theorem 3.1 is applicable to L^p for all $p \ge 2$.

(ii) The problem of finding solutions for a finite number of variational inequalities can use the same idea of a new general system of variational inequalities in Banach spaces.

Competing interests
The author declares that they have no competing interests.

Acknowledgements
The author would like to thank Professor Dr. Suthep Suantai and the reviewer for careful reading, valuable comment and suggestions on this paper. This research is partially supported by the Center of Excellence in Mathematics, the Commission on Higher Education, Thailand. The author also thanks the Thailand Research Fund and Thaksin university for their financial support.

Received: 19 November 2012 Accepted: 2 May 2013 Published: 17 May 2013

References
1. Imnang, S: Iterative method for a finite family of nonexpansive mappings in Hilbert spaces with applications. Appl. Math. Sci. 7, 103-126 (2013)
2. Imnang, S, Suantai, S: A hybrid iterative scheme for mixed equilibrium problems, general system of variational inequality problems, and fixed point problems in Hilbert spaces. ISRN Math. Anal. (2011). doi:10.5402/2011/837809

3. Piri, H: A general iterative method for finding common solutions of system of equilibrium problems, system of variational inequalities and fixed point problems. Math. Comput. Model. **55**, 1622-1638 (2012)
4. Qin, X, Shang, M, Su, Y: Strong convergence of a general iterative algorithm for equilibrium problems and variational inequality problems. Math. Comput. Model. **48**, 1033-1046 (2008)
5. Shehu, Y: Iterative method for fixed point problem, variational inequality and generalized mixed equilibrium problems with applications. J. Glob. Optim. **52**, 57-77 (2012)
6. Wangkeeree, R, Preechasilp, P: A new iterative scheme for solving the equilibrium problems, variational inequality problems, and fixed point problems in Hilbert spaces. J. Appl. Math. (2012). doi:10.1155/2012/154968
7. Yao, Y, Cho, YJ, Chen, R: An iterative algorithm for solving fixed point problems, variational inequalities problems and mixed equilibrium problems. Nonlinear Anal. **71**, 3363-3373 (2009)
8. Yao, Y, Liou, YC, Wong, MM, Yao, JC: Strong convergence of a hybrid method for monotone variational inequalities and fixed point problems. Fixed Point Theory Appl. (2011). doi:10.1186/1687-1812-2011-53
9. Aoyama, K, Iiduka, H, Takahashi, W: Weak convergence of an iterative sequence for accretive operators in Banach spaces. Fixed Point Theory Appl. **2006**, Article ID 35390 (2006)
10. Goebel, K, Reich, S: Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry, and Nonexpansive Mappings. Dekker, New York (1984)
11. Hao, Y: Strong convergence of an iterative method for inverse strongly accretive operators. J. Inequal. Appl. (2008). doi:10.1155/2008/420989
12. Reich, S: Extension problems for accretive sets in Banach spaces. J. Funct. Anal. **26**, 378-395 (1977)
13. Reich, S: Product formulas, nonlinear semigroups, and accretive operators. J. Funct. Anal. **36**, 147-168 (1980)
14. Yao, Y, Noor, MA, Noor, KI, Liou, YC, Yaqoob, H: Modified extragradient method for a system of variational inequalities in Banach spaces. Acta Appl. Math. **110**, 1211-1224 (2010)
15. Katchang, P, Kumam, P: Convergence of iterative algorithm for finding common solution of fixed points and general system of variational inequalities for two accretive operators. Thai J. Math. **9**, 343-360 (2011)
16. Cai, G, Bu, S: Convergence analysis for variational inequality problems and fixed point problems in 2-uniformly smooth and uniformly convex Banach spaces. Math. Comput. Model. **55**, 538-546 (2012)
17. Cai, G, Bu, S: Strong convergence theorems based on a new modified extragradient method for variational inequality problems and fixed point problems in Banach spaces. Comput. Math. Appl. **62**, 2567-2579 (2011)
18. Katchang, P, Kumam, P: An iterative algorithm for finding a common solution of fixed points and a general system of variational inequalities for two inverse strongly accretive operators. Positivity **15**, 281-295 (2011)
19. Qin, X, Cho, SY, Kang, SM: Convergence of an iterative algorithm for systems of variational inequalities and nonexpansive mappings with applications. J. Comput. Appl. Math. **233**, 231-240 (2009)
20. Gossez, JP, Lami Dozo, E: Some geometric properties related to the fixed point theory for nonexpansive mappings. Pac. J. Math. **40**, 565-573 (1972)
21. Xu, HK: Inequalities in Banach spaces with applications. Nonlinear Anal. **16**, 1127-1138 (1991)
22. Chang, SS: On Chidume's open questions and approximate solutions of multivalued strongly accretive mapping equations in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. **216**, 94-111 (1997)
23. Xu, HK: Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl. **298**, 279-291 (2004)
24. Reich, S: Asymptotic behavior of contractions in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. **44**, 57-70 (1973)
25. Kitahara, S, Takahashi, W: Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions. Topol. Methods Nonlinear Anal. **2**, 333-342 (1993)
26. Suzuki, T: Strong convergence of Krasnoselskii and Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals. J. Math. Anal. Appl. **305**, 227-239 (2005)
27. Bruck, RE: Properties of fixed point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces. Trans. Am. Math. Soc. **179**, 251-262 (1973)
28. Kamimura, S, Takahashi, W: Strong convergence of a proximal-type algorithm in Banach space. SIAM J. Optim. **12**, 938-945 (2002)
29. Imnang, S, Suantai, S: Strong convergence theorem for a new general system of variational inequalities in Banach spaces. Fixed Point Theory Appl. (2010). doi:10.1155/2010/246808

doi:10.1186/1029-242X-2013-249
Cite this article as: Imnang: Viscosity iterative method for a new general system of variational inequalities in Banach spaces. *Journal of Inequalities and Applications* 2013 2013:249