รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

ชื่อโครงการวิจัย

การประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไป

Applications of Fixed Point Theory to Solve Generalized Variational Inequality Problems

โดย สุวิชา อิ่มนาง

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้

ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2556

มหาวิทยาลัยทักษิณ

คำรับรองคุณภาพ

รายงานวิจัยเรื่อง การประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไป

ผู้วิจัย สุวิชา อิ่มนาง

สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยทักษิณ ขอรับรองว่ารายงานวิจัยฉบับนี้ได้ผ่านการประเมินจากผู้ทรงคุณวุฒิแล้ว มีความเห็นว่าผลงานวิจัยฉบับนี้มีคุณภาพอยู่ในเกณฑ์

- ☐ ดีมาก
- ☐ ดี
- ☐ ปานกลาง
- ☑ พอใช้
- ☐ ควรปรับปรุง

....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พรพันธุ์ เขมคุณาศัย)

ผู้อำนวยการสถาบันวิจัยและพัฒนา

วันที่ 20 เดือน พฤศจิกายน พ.ศ. 2557

มหาวิทยาลัยทักษิณ

ชื่อโครงการวิจัย (ภาษาไทย) การประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไป

(ภาษาอังกฤษ) Applications of Fixed Point Theory to Solve Generalized Variational Inequality Problems

ชื่อผู้วิจัย อาจารย์ ดร. สุวิชา อิ่มนาง สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ โทรศัพท์ 074-693972 ต่อ 2579

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้ กองทุนมหาวิทยาลัยทักษิณ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. ๒๕๕๖ จำนวนเงิน 100,000 บาท ระยะเวลาทำการวิจัย 1 ปี ตั้งแต่ 1 มิถุนายน พ.ศ. 2556 ถึง 31 พฤษภาคม พ.ศ. 2557

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัยนี้เพื่อมุ่งแสวงหาข้อเท็จจริงสำหรับปัญหาการหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของปัญหาอสมการการแปรผันสำหรับฟังก์ชัน α-inverse-strongly monotone ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต นอกจากนี้ได้ประยุกต์ทฤษฎีบทหลักจากการวิจัยเพื่อแก้ปัญหาการประมาณค่าหาสมาชิกศูนย์ของวงศ์จำกัดสำหรับฟังก์ชัน maximal monotone ในปริภูมิฮิลเบิร์ต และผลงานที่ได้จากการวิจัยนี้ได้ขยายและพัฒนาองค์ความรู้ผลงานของ Ceng Wang และ Yao [8] และผลงานนักวิจัยอื่นๆ

ABSTRACT

The purpose of this research project is to investigate the problem of finding a common element of the set of solutions of a general system of variational inequality problems for α-inverse-strongly monotone mappings, the set of solutions of mixed equilibrium problems and the set of common fixed points of a finite family of nonexpansive mappings in a real Hilbert space. Furthermore, we apply our main result with the problem of approximating a zero of a finite family of maximal monotone mappings in Hilbert spaces. Our main result extends and improves the recent results of Ceng, Wang and Yao [8] and many others.

ประกาศคุณูปการ

โครงการวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้ กองทุนวิจัยมหาวิทยาลัยทักษิณ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. ๒๕๕๖ ทั้งนี้ผู้เขียนขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิที่อ่าน และวิพากษ์เอกสารต้นฉบับ พร้อมทั้งแนะนำข้อบกพร่องของรายงานวิจัยฉบับนี้ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

สุวิชา อิ่มนาง

สิงหาคม 2557

สารบัญ

THAKSIN

บทที่ 1

บทนำ

การประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไป เป็นการวิจัยเบื้องต้น (basic research) ที่มุ่งแสวงหาข้อเท็จจริงเกี่ยวกับการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไป ซึ่งจำเป็นอย่างยิ่งต้องอาศัยความรู้ของทฤษฎีจุดตรึง (fixed point theory) ทฤษฎีการลู่เข้า (convergence theory) และทฤษฎีการประมาณค่า (approximation theory) เพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับปัญหาวิจัย รวมทั้งสาระสำคัญอื่นๆที่เกี่ยวข้อง ดังนั้น ในบทนี้จะให้รายละเอียดที่สำคัญของที่มาและความสำคัญของปัญหาวิจัย วัตถุประสงค์ของการวิจัย คำถามวิจัยหรือสมมุติฐาน ขอบเขตของการดำเนินการวิจัย และประโยชน์ของการวิจัย โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญ ดังต่อไปนี้

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหาวิจัย

ปัจจุบันความก้าวหน้าทางวิชาการด้านคณิตศาสตร์โดยเฉพาะอย่างยิ่งการพัฒนา ทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ๆนั้น นับว่ามีบทบาทและสำคัญมากต่อการพัฒนาเทคโนโลยีสมัยใหม่ ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นและสำคัญอย่างยิ่งต่อการพัฒนาประเทศ โดยเฉพาะทฤษฎีบทที่ได้จากการศึกษาปัญหาในทางคณิตศาสตร์นั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างกว้างขวาง อาทิ นักเศรษฐศาสตร์ได้นำทฤษฎีบทของปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุด (optimization problem) มาประยุกต์ใช้กับการหาจุดที่ทำให้ได้กำไรสูงสุดหรือเพื่อหาจุดคุ้มทุน รวมถึงการใช้ทรัพยากรให้เกิดประโยชน์สูงสุด นักบัญชีได้นำมาประยุกต์ใช้กับการคำนวณทิศทางการขนส่งเพื่อให้เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องพบว่า ทฤษฎีบทของปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุด เป็นส่วนหนึ่งของปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า "**ปัญหาอสมการการแปรผัน** (variational inequality problem)" นอกจากนี้จากการศึกษาพบว่า ปัญหาอสมการการแปรผันสามารถประยุกต์ใช้เพื่อแก้ไขปัญหาอีกหลายปัญหา เช่น ปัญหาดุลยภาพการจราจรทางเครือข่าย (traffic network equilibrium problem) ปัญหาดุลยภาพราคาเชิงพื้นที่ (spatial price equilibrium problem) ปัญหาดุลยภาพตลาดผู้ขายน้อยราย (oligopolistic market equilibrium problem) ปัญหาดุลยภาพทางการเงิน (financial equilibrium problem) ปัญหาดุลยภาพการอพยพ (migration equilibrium problem) ปัญหาเครือข่ายเกี่ยวกับสิ่งแวดล้อม (environmental network problem) และปัญหาเครือข่ายความรู้ (knowledge network problem) ทำให้ในช่วง 10 ปีที่ผ่านมามีนักวิจัยจำนวนมาก ได้พัฒนาระบบปัญหาอสมการการแปรผัน และสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่า (approximation) หาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert space)

ปัญหาอสมการการแปรผัน คือ การหาสมาชิก $u \in C$ ที่ทำให้

$$\langle Au, v-u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in C$$

เมื่อ C เป็นเซตย่อยของปริภูมิฮิลเบิร์ต H และ A เป็นฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้นที่ส่งจาก C ไปยัง H จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องพบว่าผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน เป็นผลเฉลยของปัญหาจุดตรึง ทำให้มีนักวิจัยจำนวนมากใช้ความรู้ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน และสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำแบบต่างๆ เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน รวมทั้งพัฒนาระบบใหม่ของปัญหาอสมการการแปรผัน ที่ให้คำตอบมากกว่าปัญหาอสมการการแปรผันเดิม ในปี ค.ศ. 2008 Ceng และคณะ [8] สร้าง"**ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน** (general system of variational inequality)" ซึ่งเป็นปัญหาการหาสมาชิก $(x^*, y^*) \in C \times C$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle \lambda Ay^* + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \mu Bx^* + y^* - x^*, x - y^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \end{cases}$$

เมื่อ λ และ μ เป็นสองจำนวนจริงบวก และ $A, B : C \to H$ เป็นสองฟังก์ชันใดๆ สำหรับการประมาณค่าหาผลเฉลยของระบบปัญหาทั่วไปของอสมการการแปรผัน Ceng และคณะได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาสมาชิกผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน สำหรับฟังก์ α และ β-inverse strongly monotone และผลเฉลยของปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต

จากงานวิจัยดังกล่าวยังเป็นที่สงสัยกันว่าจะมีระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบปัญหาทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึงร่วม (common fixed point problem) และปัญหาดุลยภาพผสม (mixed equilibrium problem) หรือไม่ รวมทั้งจะประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อใช้ในการประมาณหาค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดังกล่าวได้อย่างไร ดังนั้นเพื่อจะได้มาซึ่งข้อสรุปดังกล่าว ผู้วิจัยจึงได้ศึกษาเพื่อหาข้อเท็จจริง ซึ่งสามารถจะนำความรู้ไปใช้เป็นหลักการหรือทฤษฎีบทเพื่อการอ้างอิงและประยุกต์ใช้ให้เกิดความก้าวหน้าทางวิชาการต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

โครงการวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ที่สำคัญ 3 ประการ คือ **ประการแรก** เพื่อสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบปัญหาทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึงร่วม และปัญหาดุลยภาพผสมในปริภูมิฮิลเบิร์ต **ประการที่สอง** เพื่อประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบปัญหาทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึงร่วม และปัญหาดุลยภาพผสมในปริภูมิฮิลเบิร์ต และ**ประการสุดท้าย** เพื่อพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นตามวัตถุประสงค์แรก สำหรับฟังก์ชันประเภท α และ β-inverse strongly monotone

1.3 คำถามวิจัย หรือ สมมุติฐานวิจัย

การประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมจำเป็นอย่างยิ่งต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีจุดตรึงเข้ามาช่วยในการศึกษา ดังนั้นในหัวข้อนี้จะให้รายละเอียดที่สำคัญของทฤษฎีบท และสมมุติฐานของโครงการวิจัยที่จำเป็นอย่างยิ่งต่อการศึกษาวิจัย โดยที่ทฤษฎีบทแรก เป็นทฤษฎีที่สำคัญอย่างมากต่อการศึกษาการหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ต และทฤษฎีบทที่สอง เป็นทฤษฎีที่ศึกษาการลู่เข้าสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพ ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยมีสาระสำคัญดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 *ให้ C เป็นเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H P_C เป็นภาพฉายระยะทาง และ $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน monotone แล้วจะได้ว่า u เป็นผลเฉลยของปัญหา อสมการการแปรผัน ก็ต่อเมื่อ $u = P_C(u - \lambda Au)$ สำหรับ $\lambda > 0$*

ทฤษฎีบท 2 *ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ฟังก์ชัน $A, B : C \to H$ เป็น $\alpha-$inverse strongly monotone และ $\beta-$inverse strongly monotone ตามลำดับ และให้ $S : C \to C$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ที่ทำให้ $F(S) \cap \Omega \neq \emptyset$ เมื่อ Ω แทนเซตของผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน สมมุติให้ $x_1 = v \in C$ และ $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย*

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \mu Bx_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) SP_C(y_n - \lambda Ay_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda \in (0, 2\alpha)$ $\mu \in (0, 2\beta)$ และ $\{a_n\}$ $\{b_n\} \subset [0, 1]$ ที่ทำให้

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$
2. $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$

แล้ว $\{x_n\}$ จะลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\bar{x} = P_{F(S)\cap\Omega} v$ และ $(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน เมื่อ $\bar{y} = P_C(\bar{x} - \mu B\bar{x})$

คำถามวิจัย หรือ สมมุติฐานวิจัย

การประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบปัญหาทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึงร่วม และปัญหาดุลยภาพผสมในปริภูมิฮิลเบิร์ตต้องมีระเบียบวิธีทำซ้ำอื่นที่ใช้ศึกษา จำต้องพิสูจน์

1.4 ขอบเขตการวิจัย

โครงการวิจัยนี้ได้ศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบปัญหาทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึงร่วม และปัญหาดุลยภาพผสมในปริภูมิฮิลเบิร์ต สำหรับระบบปัญหาทั่วไปของอสมการการแปรผัน ศึกษากรณีที่ A และ B เป็นฟังก์ชัน α และ β-inverse strongly monotone ตามลำดับ สำหรับปัญหาจุดตรึงร่วมได้ศึกษากรณีจุดตรึงร่วมสำหรับวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย

1.5 ประโยชน์ที่ได้รับ

โครงการวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึงร่วม และปัญหาดุลยภาพผสมในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยประโยชน์ที่จะได้รับ 5 ประการ คือ **ประการแรก** ได้ระเบียบวิธีทำซ้ำใหม่เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึงร่วม และปัญหาดุลยภาพผสมในปริภูมิฮิลเบิร์ต **ประการสอง** ทราบเงื่อนไขการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นสู่ผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึงร่วม และปัญหาดุลยภาพผสมในปริภูมิฮิลเบิร์ต **ประการสาม** ได้ทฤษฎีบทการลู่เข้าซึ่งสามารถนำไปใช้เป็นทฤษฎีในการอ้างอิงเพื่อให้เกิดความก้าวหน้าทางวิชาการ **ประการสี่** ได้องค์ความรู้ไปตีพิมพ์เผยแพรในวารสารวิชาการ อีกทั้งสร้างความเข้มแข็งและความก้าวหน้าทางวิชาการของนักวิจัยคณิตศาสตร์ไทย และ**ประการสุดท้าย** ช่วยเสริมสร้างความมั่นใจให้แก่นักวิชาการโดยเฉพาะอาจารย์ทางคณิตศาสตร์เพื่อการเรียนการสอนที่มีคุณภาพ

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เนื้อหาในบทนี้จะให้รายละเอียดที่สำคัญของงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการประมาณค่าจุดตรึง ปัญหาอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพ ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผันและปัญหาดุลยภาพผสม รวมถึงทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องที่จำเป็นต้องใช้ในการวิจัย โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญดังต่อไปนี้

2.1 การประมาณค่าจุดตรึง

กำหนดให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต พร้อมกับผลคูณภายใน $\langle .,. \rangle$ และ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของ H จะเรียกฟังก์ชัน $T : C \to C$ ว่า **ฟังก์ชันแบบไม่ขยาย** (nonexpansive mapping) ถ้า $\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|$ สำหรับแต่ละ $x, y \in C$ เซตจุดตรึง (fixed point set) ของ T นิยามโดย $F(T) = \{x \in C : Tx = x\}$ ปัญหาการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาจุดตรึงเริ่มศึกษาในปี ค.ศ. 1967 โดย Halpern [13] ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาจุดตรึงของฟังก์ชัน T โดยที่ T เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายบนเซต C โดยศึกษาลำดับ $\{x_n\}$ ดังนี้: ให้ $x_1 \in C$ และ

$$x_{n+1} = \alpha_n v + (1 - \alpha_n)Tx_n, \quad n \ge 1 \tag{2.1.1}$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ในช่วง $[0, 1]$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข ดังต่อไปนี้

$$C1 : \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0; \quad C2 : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

Halpern ศึกษาการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำ (2.1.1) ในกรณีที่ $\alpha_n = n^{-\sigma}$, $\sigma \in (0, 1)$ และ $v = 0$ และได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ได้ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงของฟังก์ชัน T ต่อมาในปี ค.ศ. 1977 Lions [16] ได้พัฒนาผลงานของ Halpern ที่จำกัดการศึกษาเพียงกรณีที่ลำดับ $\alpha_n = n^{-\sigma}$, $\sigma \in (0, 1)$ เท่านั้น และ Lions ศึกษากรณีที่ $\{\alpha_n\}$ เป็นลำดับใดๆ ในช่วง $[0, 1]$ โดยที่ $\{\alpha_n\}$ สอดคล้องเงื่อนไข ดังต่อไปนี้

$$C1 : \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0; \quad C2 : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty; \quad C3 : \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha_{n+1} - \alpha_n|}{\alpha_{n+1}^2} = 0$$

Lions ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ที่กำหนดโดยสมการ (2.1.1) ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงของฟังก์ชัน T ในปริภูมิฮิลเบิร์ต H ต่อจากนั้น ในปี ค.ศ. 1994 Reich [30] ได้พัฒนาผลงานของ Halpern จากที่ศึกษาทฤษฎีบทการลู่เข้าในปริภูมิฮิลเบิร์ต H มาศึกษาในปริภูมิ uniformly smooth ภายใต้เงื่อนไขเดียวกันของลำดับ

$\{\alpha_n\}$ Reich พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงของฟังก์ชัน T นอกจากนี้ Reich ให้ข้อสังเกตุที่สำคัญว่า ลำดับของจำนวนจริง $\{\alpha_n\}$ ที่ศึกษาทั้งในผลงานของ Halpern และ Lions นั้น ยังไม่ครอบคลุม กรณีที่ $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$ ดังนั้นปัญหาที่นักวิจัยต้องการศึกษาเพิ่มเติม คือ จะวางเงื่อนไขอย่างไรของลำดับ $\{\alpha_n\}$ ถึงจะครอบคลุมกรณี $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$ ด้วย เพื่อตอบปัญหาดังกล่าว Wittmann [35] ได้ศึกษาทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำ (2.1.1) ในปริภูมิฮิลเบิร์ต H โดย Wittmann พิสูจน์ว่า ถ้า $\{\alpha_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$C1: \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0; \quad C2: \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty; \quad C3: \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$$

แล้วลำดับ $\{x_n\}$ จะลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย T

2.2 ปัญหาอสมการการแปรผัน

ปัญหาอสมการการแปรผัน เริ่มศึกษาในปีค.ศ. 1964 โดย Stampacchi [29] โดยศึกษาปัญหาที่เรียกว่า "**อสมการการแปรผันแบบดั้งเดิม** (classical variational inequality)" คือ ปัญหาการหาสมาชิก $x^* \in C$ ที่ทำให้

$$\langle Ax^*, y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \tag{2.2.1}$$

เซตของผลเฉลยทั้งหมดของปัญหา (2.2.1) เขียนแทนด้วย $VI(C, A)$ จากระบบปัญหา (2.2.1) เป็นที่ทราบว่า x^* เป็นผลเฉลยของระบบปัญหา (2.2.1) ก็ต่อเมื่อ $x^* = P_C(x^* - \lambda Ax^*)$ เมื่อ $\lambda > 0$ และ P_C เป็นภาพฉายระยะทาง (metric projection) นั่นแสดงให้เห็นว่า ปัญหาอสมการการแปรผันมีความเกี่ยวข้องกับปัญหาจุดตรึง นอกจากนี้มีปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งเกี่ยวข้องกับปัญหาอสมการการแปรผัน อาทิ ปัญหาอสมการการแปรผันแบบไม่คอนเวกซ์ ปัญหาอสมการการแปรผันแบบผสม โดยสามารถศึกษารายละเอียดเพิ่มเติมได้จากเอกสาร ดังต่อไปนี้ Ceng et al. [1--10] Chang et al. [11] Noor [19--21] Peng และ Yao [23--25] Plubtieng และ Punpaeng [27] Yao et al. [38] Zeng และ Yao [41] Zhao และ He [42] สำหรับการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผันนั้น เริ่มศึกษาจากปริภูมิยูคลิดมีมิติจำกัด ($H = \mathbb{R}^n$) เป็นปริภูมิแรก โดยศึกษาภายใต้สมมุติฐาน C เป็นเซตย่อย ปิด และคอนเวกซ์ของ $\mathbb{R}^n$ ต่อมาในปี ค.ศ. 1976 Korpelevich [15] สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำที่เรียกว่า **วิธีเอกซตราเกรเดียนต์** (extragradient method) โดยกำหนดลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ดังนี้:

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda Ax_n), \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda Ay_n) \end{cases}$$

สำหรับทุกค่า $n = 0, 1, 2, \ldots$ เมื่อ $A : C \to \mathbb{R}^n$ เป็นฟังก์ชัน monotone และ k-Lipschitz continuous และ $\lambda \in (0, 1/k)$ ภายใต้สมมุติฐาน $VI(C, A) \neq \emptyset$ Korpelevich ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ลู่เข้าสู่ผลเฉลยค่าเดียวกันของปัญหาอสมการการแปรผัน (2.2.1) จากนั้นในปี ค.ศ. 2003 Takahashi และ Toyoda [32] สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมสำหรับปัญหาจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย และปัญหาอสมการการแปรผัน โดยสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ $\{x_n\}$ ดังนี้:

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) SP_C(x_n - \lambda_n Ax_n)$$

เมื่อ $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$, $\{\lambda_n\} \subset (0, 2\alpha)$ และ $S : C \to C$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย P_C เป็นภาพฉายระยะทาง และ $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน $\alpha-$inverse strongly monotone โดยที่ Takahashi และToyoda

ได้พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่งนิยามโดย (8) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่สมาชิกร่วมของปัญหาจุดตรึง และปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ต ต่อมาในปี ค.ศ. 2006 Nadezhkina และ Takahashi [18] ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาสมาชิกร่วมของปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย และผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน สำหรับฟังก์ชัน monotone และ k-Lipschitz continuous โดยกำหนดลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ดังนี้:

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) S P_C(x_n - \lambda_n A y_n) \end{cases} \tag{2.2.2}$$

เมื่อ $\{\lambda_n\} \subset [a, b]$ และ $\{\alpha_n\} \subset [c, d]$ สำหรับบางจำนวนจริง $c, d \in (0, 1)$ นอกจากนี้ Nadezhkina และTakahashi ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ซึ่งนิยามโดย (2.2.2) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่สมาชิก $z \in F(S) \cap VI(C, A)$ เมื่อ $z = \lim_{n\to\infty} P_{F(S)\cap VI(C,A)} x_n$ ต่อจากนั้นในปี ค.ศ. 2007 Yao และ Yao [39] สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาสมาชิกร่วมของเซต $F(S) \cap VI(C, A)$ ภายใต้สมมุติฐาน $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α-inverse strongly monotone และ $S : C \to C$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย โดยที่ $F(S) \cap VI(C, A) \neq \emptyset$ โดยนิยามลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ดังนี้:

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_n x_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n S P_C(y_n - \lambda_n A y_n) \end{cases} \tag{2.2.3}$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ $\{\gamma_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ในช่วงปิด $[0, 1]$ และ $\{\lambda_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วงปิด $[0, 2\alpha]$ นอกจากนี้ Yao และ Yao ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ที่กำหนดโดย (2.2.3) ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิก $z \in F(S) \cap VI(C, A)$ เมื่อ $z = P_{F(S)\cap VI(C,A)} u$

2.3 ปัญหาดุลยภาพ

ต่อไปจะให้นิยามของ**ปัญหาดุลยภาพ** (equilibrium problem) ซึ่งเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญมาก โดยเฉพาะทางเศรษฐศาสตร์ได้นำไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวาง โดยกำหนดนิยามดังนี้ ให้ $F : C \times C \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง ปัญหาดุลยภาพ คือ ปัญหาการหาสมาชิก $x \in C$ ที่ทำให้

$$F(x, y) \geq 0, \quad \forall y \in C$$

เซตคำตอบทั้งหมดของปัญหาดุลยภาพ เขียนแทนด้วย $EP(F)$ การประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพ ปัญหาจุดตรึง และปัญหาอสมการการแปรผันนั้น ในปี ค.ศ. 2008 Plubtieng และ Punpaeng [27] ศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับการประมาณค่าหาสมาชิกร่วมของเซต $F(S) \cap VI(C, A) \cap EP(F)$ ภายใต้สมมุติฐาน $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน $\alpha-$inverse strongly monotone และ $S : C \to C$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย โดยที่ $F(S) \cap VI(C, A) \cap EP(F) \neq \emptyset$ และนิยามลำดับ $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ และ $\{z_n\}$ ดังนี้:

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C; \\ y_n = P_C(u_n - \lambda_n u_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n S P_C(y_n - \lambda_n A y_n) \end{cases} \tag{2.3.1}$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ และ $\{\gamma_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วงปิด $[0, 1]$ และ $\{\lambda_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วงปิด $[0, 2\alpha]$ นอกจากนี้ภายใต้การวางเงื่อนไขของฟังก์ชัน F ลำดับ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ และ $\{\gamma_n\}$ นั้น

Plubtieng และ Punpaeng พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ที่กำหนดโดย (2.3.1) ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิก $z \in F(S) \cap VI(C,A) \cap EP(F)$ เมื่อ $z = P_{F(S)\cap VI(C,A)\cap EP(F)}u$ ต่อจากนั้นในปี ค.ศ. 2009 Qin, Cho และ Kang [28] สร้างและศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาสมาชิกร่วมของปัญหาดุลยภาพ ปัญหาจุดตรึงร่วม และปัญหาอสมการการแปรผันพิจารณากรณีที่ $A_i : C \to H, \quad i = 1, 2$ เป็นฟังก์ชันประเภท $\alpha-$inverse strongly monotone และฟังก์ชัน $S_i : C \to C, \quad i = 1, 2$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย โดยกำหนดลำดับ $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ และ $\{z_n\}$ ดังนี้:

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C; \\ y_n = P_C(u_n - \lambda_n u_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n SP_C(y_n - \lambda_n Ay_n) \end{cases} \tag{2.3.2}$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ และ $\{\beta_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วงปิด $[0,1]$ และ $\{\lambda_n\}$ $\{\gamma_n\}$ และ $\{\mu_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วงปิด $[0, 2\alpha]$ ภายใต้การวางเงื่อนไขของลำดับ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ $\{\gamma_n\}$ $\{\lambda_n\}$ และ $\{\mu_n\}$ Qin, Cho และ Kang ได้พิสูจน์ว่าลำดับที่สร้างโดย (2.3.2) ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิกผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพ ปัญหาจุดตรึงร่วม และปัญหาอสมการการแปรผัน

2.4 ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผันและปัญหาดุลยภาพผสม

หัวข้อนี้ผู้วิจัยได้ให้รายละเอียดที่สำคัญมากของปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยจะแบ่งเนื้อหาออกเป็นสองส่วน คือ เนื้อหาส่วนแรกจะให้รายละเอียดของระบบปัญหาทั่วไปของปัญหาอสมการการแปรผัน และเนื้อหาส่วนที่สองจะให้รายละเอียดเกี่ยวกับปัญหาดุลยภาพผสม โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญดังต่อไปนี้

2.4.1 ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน

รายละเอียดของปัญหาอสมการการแปรผัน ผู้วิจัยได้ให้รายละเอียดไว้ในหัวข้อ 2.2 ในหัวข้อนี้ผู้วิจัยจะให้รายละเอียดของปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ครอบคลุมปัญหาอสมการการแปรผัน นั่นคือ"**ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน** (general system of variational inequalities)" โดยในปี ค.ศ. 2008 Ceng et al. [8] ศึกษาปัญหาการหาสมาชิก $(x^*, y^*) \in C \times C$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle \lambda Ay^* + x^* - y^*, x - x^*\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \\ \langle \mu Bx^* + y^* - x^*, x - y^*\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \end{cases} \tag{2.4.1}$$

เมื่อ λ และ μ เป็นสองจำนวนจริงบวก และ $A, B : C \to H$ เป็นสองฟังก์ชันใดๆ กรณีเฉพาะของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน จะเห็นว่า ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน $A = B$ แล้วระบบปัญหา (2.4.1) จะลดรูปเป็นระบบปัญหาการหาสมาชิก $(x^*, y^*) \in C \times C$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle \lambda Ay^* + x^* - y^*, x - x^*\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \\ \langle \mu Ax^* + y^* - x^*, x - y^*\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C \end{cases} \tag{2.4.2}$$

ซึ่งเป็นระบบที่ศึกษาโดย Verma [33] และเรียกระบบใหม่นี้ว่า "**ระบบใหม่ของอสมการการแปรผัน** (new system of variational inequalities)" นอกจากนี้ ถ้าเพิ่มเงื่อนไข ให้ $x^* = y^*$ แล้วระบบปัญหา (2.4.1) จะลดรูปเป็นการหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน $VI(C, A)$ ในหัวข้อ 2.2 ในการประมาณค่าหาผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน Ceng et al. [8] ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาสมาชิกร่วมของผลเฉลยระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน สำหรับฟังก์ α และ β-inverse strongly monotone และเซตของจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ ดังนี้: ให้ $x_1 = v \in C$ และ $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \mu B x_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda \in (0, 2\alpha), \mu \in (0, 2\beta)$ และ $\{a_n\}, \{b_n\} \subset [0,1]$ ภายใต้การวางเงื่อนไขของลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ Ceng et al. พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิกร่วมของเซตของจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย S และผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน (2.4.1) ต่อมาในปี ค.ศ. 2010 Yao Liou และ Kang [37] ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบปัญหา (2.4.1) และปัญหาจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย S ในกรณีที่ $A, B : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α และ β-inverse strongly monotone ตามลำดับ โดย Yao Liou และ Kang สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ และ $\{z_n\}$ ดังนี้:

$$\begin{cases} z_n = P_C(x_n - \mu B x_n), \\ y_n = \alpha_n Q x_n + (1 - \alpha_n) P_C(z_n - \lambda A z_n), \\ x_{n+1} = \beta_n x_n + \gamma_n P_C(z_n - \lambda A z_n) + \delta_n S y_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda \in (0, 2\alpha), \mu \in (0, 2\beta)$ และ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ $\{\gamma_n\}$ $\{\delta_n\} \subset [0,1]$ ภายใต้การวางเงื่อนไขของลำดับ$\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ $\{\gamma_n\}$ และ $\{\delta_n\}$ Yao Liou และ Kang พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิกร่วมของเซตของจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย S และผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน (2.4.1)

2.4.2 ปัญหาดุลยภาพผสม

หัวข้อ 2.3 ผู้วิจัยได้ให้รายละเอียดของปัญหาดุลยภาพซึ่งเป็นปัญหาที่สำคัญ และมีประโยชน์อย่างมากต่อวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์และวิทยาศาสตร์ประยุกต์ จากเหตุผลดังกล่าว จึงมีนักวิจัยกลุ่มหนึ่งพยายามคิดค้นหาปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่คลอบคลุมปัญหาดุลยภาพ และเรียกปัญหาใหม่นั้นว่า "**ปัญหาดุลยภาพผสม** (mixed equilibrium problem)" โดยมีเนื้อหาสาระดังนี้ ให้ $\varphi : C \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชัน และ F เป็นฟังก์ชันที่ส่งจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ เมื่อ $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริง ในปี ค.ศ. 2008 Ceng และ Yao [9] ได้ศึกษาปัญหาการหาสมาชิก $x \in C$ ที่ทำให้

$$F(x, y) + \varphi(y) \geq \varphi(x), \quad \forall y \in C \qquad (2.4.3)$$

เรียกปัญหา (2.4.3) ว่าปัญหาดุลยภาพผสม และเซตของผลเฉลยทั้งหมดของปัญหา (2.4.3) เขียนแทนด้วย $MEP(F, \varphi)$ จากปัญหา (2.4.3) จะเห็นว่าถ้า x เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4.3) แล้ว $x \in \mathrm{dom}\varphi = \{x \in C \mid \varphi(x) < +\infty\}$ จากปัญหา (2.4.3) จะเห็นว่าถ้า $\varphi = 0$ แล้วปัญหาดุลยภาพผสม (2.4.3) จะกลายเป็นปัญหาการหาสมาชิก $x \in C$ ที่ทำให้

$$F(x, y) \geq 0, \quad \forall y \in C$$

ซึ่งก็คือปัญหาดุลยภาพ (ปัญหาการหาสมาชิก $EP(F)$) ที่ศึกษาในหัวข้อ 2.3 นอกจากนี้จะเห็นว่าถ้า $F = 0$ แล้วปัญหาดุลยภาพผสม (2.4.3) จะลดรูปเป็นปัญหา convex minimization ซึ่งเป็นปัญหาการหาสมาชิก $x \in C$ ที่ทำให้

$$\varphi(y) \geq \varphi(x), \quad \forall y \in C \qquad (2.4.4)$$

นอกจากนี้ จะเห็นว่าถ้า $\varphi = 0$ และ $F(x,y) = \langle Ax, y-x\rangle$ สำหรับแต่ละสมาชิก $x, y \in C$ และ A เป็นฟังก์ชันที่ส่งจาก C ไปยัง H แล้วปัญหาดุลยภาพผสม (2.4.3) จะกลายเป็นปัญหาอสมการการแปรผันและพบว่า $EP(F) = VI(C,A)$ การประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาดุลยภาพผสมจึงเป็นปัญหาที่มีความสำคัญและจำเป็นอย่างยิ่ง ดังนั้นจึงมีนักวิจัยจำนวนมากได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาดังกล่าว อาทิ เช่น Peng และ Yao [26] สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำที่กำหนดโดย:

$$\begin{cases} x = x_1 \in C, \\ F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \gamma_n A u_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n v + \beta_n x_n + (1 - \alpha_n + \beta_n) W_n P_C(u_n - \gamma_n A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

ภายใต้การวางเงื่อนไขของฟังก์ชัน F ,φ, W_n และลำดับ $\{\alpha_n\}$ ลำดับ $\{\beta_n\}$ ลำดับ $\{\gamma_n\}$ และลำดับ $\{r_n\}$ Peng และ Yao ได้พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ และลำดับ $\{u_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาสมดุลผสม ปัญหาอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึง

2.5 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

เนื้อหานี้จะให้รายละเอียดที่สำคัญของนิยาม ทฤษฎีบท บทตั้ง (Lemma) และองค์ความรู้อื่นๆ ที่จำเป็นอย่างยิ่งต่อการพิสูจน์ทฤษฎีการลู่เข้าในบทที่ 3 โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญดังต่อไปนี้ กำหนดให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตพร้อมกับผลคูณภายใน $\langle .,. \rangle$ และ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของ H ให้ $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก A ว่า *monotone* ถ้า

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in C$$

และเรียกฟังก์ชัน A ว่า *α-strongly monotone* ถ้ามีจำนวนจริงบวก $\alpha > 0$ ที่ทำให้

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq \alpha\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C$$

จากอสมการนี้ ทำให้ได้ว่า $\|Ax - Ay\| \geq \alpha\|x - y\|$ นั่นคือ A เป็นฟังก์ชัน *α-expansive* นอกจากนี้ จะเห็นว่าถ้า $\alpha = 1$ แล้วฟังก์ชัน A จะเป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย จากนิยามของฟังก์ชัน monotone ฟังก์ชัน α-expansive และฟังก์ชันแบบไม่ขยาย สามารถตรวจสอบได้ง่ายถึงความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน ดังนี้

$$\begin{array}{ccc} \text{strong monotonicity} & \Rightarrow & \text{monotonicity} \\ \Downarrow & & \\ \text{expansiveness} & & \end{array}$$

จะเรียกฟังก์ชัน A ว่า *L-Lipschitz continuous* (หรือ *Lipschitzian*) ถ้ามีค่าคงที่ $L \geq 0$ ที่ทำให้

$$\|Ax - Ay\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in C$$

จะเรียกฟังก์ชัน A ว่า *α-inverse-strongly monotone* (หรือ *α-cocoercive*) ถ้ามีจำนวนจริงบวก $\alpha > 0$ ที่ทำให้

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq \alpha\|Ax - Ay\|^2, \quad \forall x, y \in C$$

จากนิยามดังกล่าวเห็นได้ชัดว่า ถ้า A เป็นฟังก์ชัน α-inverse-strongly monotone แล้ว A เป็นฟังก์ชัน monotone และ Lipschitz continuous ด้วย นอกจากนี้จะเห็นว่า ถ้า A เป็นฟังก์ชัน α-strongly และ

L-Lipschitz continuous แล้ว A เป็น (α/L^2)-inverse-strongly monotone แต่ฟังก์ชัน inverse-strongly monotone ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชัน strongly monotone จะเรียกฟังก์ชัน A ว่า *relaxed c-cocoercive* ถ้ามีค่าคงที่ $c > 0$ ที่ทำให้

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq (-c)\|Ax - Ay\|^2, \;\; \forall x, y \in C$$

และจะเรียกฟังก์ชัน A ว่า *relaxed (c,d)-cocoercive* ถ้ามีสองค่าคงที่ $c, d > 0$ ที่ทำให้

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq (-c)\|Ax - Ay\|^2 + d\|x - y\|^2, \;\; \forall x, y \in C$$

จะเห็นว่าถ้า $c = 0$ แล้ว A เป็นฟังก์ชัน d-strongly monotone ดังนั้นจะเห็นว่าคลาสของฟังก์ชัน relaxed (c,d)-cocoercive จะโตกว่าคลาสของฟังก์ชัน strongly monotone ผลทำให้ได้ความสัมพันธ์ที่สำคัญตามมาคือ d-strong monotonicity $\Rightarrow$ relaxed (c, d)-cocoercivity

จากนิยามของฟังก์ชันดังกล่าว จะได้ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันที่สำคัญตามมาดังนี้ ถ้าตัวดำเนินการ (operator) เป็น Lipschitz continuous แล้ว relaxed cocoercivity จะเป็น strongly monotone แต่ strongly monotone จะไม่เป็น cocoercivity ดังอธิบายด้วยตัวอย่าง ดังนี้

ตัวอย่าง 1. ให้ $H = R,\; C = [1, \infty)$ และ $A : C \to H$ ซึ่งกำหนดโดย $Ax = x^2,\; x \in C$ สำหรับแต่ละ $x, y \in C$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\langle Ax - Ay, x - y\rangle &= (x^2 - y^2)(x - y)\\ &= (x + y)|x - y|^2\\ &\geq 2|x - y|^2\end{aligned}$$

ดังนั้น A เป็น 2-strongly monotone พิจารณา สมมุติให้ A เป็น μ-cocoercive สำหรับบาง $\mu > 0$ จะได้ว่า $\langle Ax - Ay, x - y\rangle = (x + y)|x - y|^2 \geq \mu|x^2 - y^2|^2$ เป็นผลให้ $x + y \leq \frac{1}{\mu}$ สำหรับทุก $x, y \in [1, \infty)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น A จึงไม่เป็น μ-cocoercive สำหรับแต่ละ $\mu > 0$

ต่อไปจะให้ความหมายของฟังก์ชัน metric projection ซึ่งมีบทบาทและมีความสำคัญเป็นอย่างมากกับการประมาณค่า หาผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผันและปัญหาจุดตรึง โดยมีสาระสำคัญดังนี้ ปริภูมิฮิลเบิร์ต H เป็นที่ทราบกันดีว่าแต่ละสมาชิก $x \in H$ จะมีสมาชิกใน C เพียงค่าเดียวเท่านั้นที่ใกล้ x ที่สุด และเขียนแทนสมาชิกนั้นด้วย $P_C x$ จากข้อเท็จจริงดังกล่าวทำให้ได้ว่า

$$\|x - P_C x\| \leq \|x - y\|, \;\; \forall y \in C$$

และเรียกสมาชิก P_C ว่า *metric projection* ของ H ทั่วถึง C จากสมบัติดังกล่าว สามารถแสดงได้ง่ายว่า P_C เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายจาก H ทั่วถึง C และสอดคล้องกับสมบัติ

$$\langle x - y, P_C x - P_C y\rangle \geq \|P_C x - P_C y\|^2, \;\; \forall x, y \in H \tag{2.5.1}$$

จากอสมการ (2.5.1) เป็นผลให้ได้ว่า

$$\|(x - y) - (P_C x - P_C y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|P_C x - P_C y\|^2, \;\; \forall x, y \in H \tag{2.5.2}$$

นอกจากสมบัติข้างต้นแล้วสมบัติที่สำคัญมากของ metric projection คือ: $P_C x \in C$ และ

$$\begin{aligned}&\langle x - P_C x, y - P_C x\rangle \leq 0,\\ &\|x - y\|^2 \geq \|x - P_C x\|^2 + \|P_C x - y\|^2\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

สำหรับทุกสมาชิก $x \in H$ และสมาชิก $y \in C$ ซึ่งสามารถศึกษาข้อมูลและรายละเอียดได้จากผลงานของ Goebel และ Kirk [12] การศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาสมดุลผสม เงื่อนไขและสมมุติฐานที่จำเป็นอย่างยิ่งของฟังก์กัน F, φ และเซตย่อย C โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญ คือ

(A1) $F(x, x) = 0$ สำหรับทุก $x \in C$;

(A2) F เป็นฟังก์ชัน monotone กล่าวคือ $F(x, y) + F(y, x) \leq 0$ สำหรับทุก $x, y \in C$;

(A3) สำหรับแต่ละ $y \in C$ ฟังก์ชันที่กำหนดโดย $x \mapsto F(x, y)$ เป็น weakly upper semicontinuous;

(A4) สำหรับแต่ละ $x \in C$ ฟังก์ชันที่กำหนดโดย $y \mapsto F(x, y)$ เป็น convex;

(A5) สำหรับแต่ละ $x \in C$ ฟังก์ชันที่กำหนดโดย $y \mapsto F(x, y)$ เป็น lower semicontinuous;

(B1) สำหรับแต่ละ $x \in H$ และ $r > 0$ จะมีเซตย่อยที่มีขอบเขต $D_x \subseteq C$ และ $y_x \in C$ ที่ทำให้ สำหรับแต่ละ $z \in C \setminus D_x$,

$$F(z, y_x) + \varphi(y_x) + \frac{1}{r}\langle y_x - z, z - x\rangle < \varphi(z)$$

(B2) C เป็นเซตที่มีขอบเขต

การพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นในบทที่ 3 บทตั้ง ที่จำเป็นและสำคัญอย่างมากต่อการศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึง มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

บทตั้ง 2.5.1. *([26]) ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ F เป็นฟังก์ชันที่ส่งจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) และให้ $\varphi : C \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ เป็น proper lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ สมมุติสอดคล้องกับเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่งระหว่าง (B1) หรือ (B2) สำหรับ $r > 0$ และ $x \in H$ กำหนดฟังก์ชัน $T_r : H \to C$ ดังนี้*

$$T_r(x) = \left\{ z \in C : F(z, y) + \varphi(y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x\rangle \geq \varphi(z), \quad \forall y \in C \right\}$$

สำหรับทุก $x \in H$ แล้วจะได้แต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง:

(1) สำหรับแต่ละ $x \in H$, $T_r(x) \neq$;

(2) T_r ส่งไปที่ค่าเดียว;

(3) T_r เป็น firmly nonexpansive กล่าวคือ สำหรับแต่ละ $x, y \in H$,

$$\|T_r(x) - T_r(y)\|^2 \leq \langle T_r x - T_r y, x - y\rangle;$$

(4) $F(T_r) = MEP(F, \varphi)$;

(5) $MEP(F, \varphi)$ เป็นเซตปิดและคอนเวกซ์

บทตั้ง 2.5.2. *([36]) ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก ซึ่งสอดคล้องสมบัติดังนี้*

$$a_{n+1} \leq (1 - \gamma_n)a_n + \delta_n$$

เมื่อ $\{\gamma_n\}$ เป็นลำดับใน $(0, 1)$ และ $\{\delta_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข:

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty; \quad \text{(ii)} \limsup_{n\to\infty} \delta_n/\gamma_n \leq 0 \text{ หรือ } \sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n| < \infty$$

แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

บทตั้ง 2.5.3. *([22]) ให้ $(H, \langle ., . \rangle)$ เป็นปริภูมิผลคูณภายใน สำหรับแต่ละ $x, y, z \in H$ และ $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$ โดยที่ $\alpha + \beta + \gamma = 1$ จะได้ว่า*

$$\begin{aligned}\|\alpha x + \beta y + \gamma z\|^2 &= \alpha\|x\|^2 + \beta\|y\|^2 + \gamma\|z\|^2 - \alpha\beta\|x - y\|^2 \\ &\quad - \alpha\gamma\|x - z\|^2 - \beta\gamma\|y - z\|^2\end{aligned}$$

บทตั้ง 2.5.4. *([31]) ให้ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตในปริภูมิบานาค X กำหนดให้ $\{b_n\}$ เป็นลำดับใน $[0, 1]$ ซึ่ง $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$ สมมุติ $x_{n+1} = (1 - b_n)y_n + b_n x_n$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 1$ และ $\limsup_{n\to\infty}(\|y_{n+1} - y_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \leq 0$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0$*

บทตั้ง 2.5.5. *([12]) (Demi-closedness principle) สมมุติให้ T เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายที่ส่งบนเซตย่อยปิด และคอนเวกซ์ C ของปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง H ถ้า T มีจุดตรึง แล้ว $I - T$ เป็น demi-closed กล่าวคือ สำหรับแต่ละลำดับ $\{x_n\}$ ใน C ถ้าลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบอ่อนสู่บางสมาชิก $x \in C$ (เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x_n \rightharpoonup x \in C$) และลำดับ $\{(I - T)x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่บางสมาชิก y (เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $(I - T)x_n \to y$) แล้ว $(I - T)x = y$ เมื่อ I เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์บน H*

บทตั้ง 2.5.6. *ในปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง H จะได้ว่า*

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, x + y\rangle, \quad \forall x, y \in H$$

ต่อไปจะให้นิยามของฟังก์ชันที่สำคัญเป็นอย่างมากในการศึกษาการประมาณค่าหาจุดตรึงร่วมของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต H โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญดังนี้: ให้ $\{T_i\}_{i=1}^N$ เป็นวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายบนเซตย่อย C ของปริภูมิฮิลเบิร์ต H สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ และ $j = 1, 2, \ldots, N$, ให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ โดยที่ $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0, 1]$ และ $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$ โดย Kangtunyakarn และ Suantai [14] ได้สร้างฟังก์ชันใหม่ $S_n : C \to C$ ดังนี้

$$\begin{aligned}U_{n,0} &= I, \\ U_{n,1} &= \alpha_1^{n,1}T_1U_{n,0} + \alpha_2^{n,1}U_{n,0} + \alpha_3^{n,1}I, \\ U_{n,2} &= \alpha_1^{n,2}T_2U_{n,1} + \alpha_2^{n,2}U_{n,1} + \alpha_3^{n,2}I, \\ U_{n,3} &= \alpha_1^{n,3}T_3U_{n,2} + \alpha_2^{n,3}U_{n,2} + \alpha_3^{n,3}I, \\ &\vdots \\ U_{n,N-1} &= \alpha_1^{n,N-1}T_{N-1}U_{n,N-2} + \alpha_2^{n,N-1}U_{n,N-2} + \alpha_3^{n,N-1}I, \\ S_n = U_{n,N} &= \alpha_1^{n,N}T_NU_{n,N-1} + \alpha_2^{n,N}U_{n,N-1} + \alpha_3^{n,N}I\end{aligned}$$

และเรียกฟังก์ชัน S_n นี้ว่า S-mapping ที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ ข้อสังเกตุจะเห็นว่าจากการที่แต่ละ T_i เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย เป็นผลให้ฟังก์ชัน S_n เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายด้วย นอกจากนี้ Kangtunyakarn และ Suantai ได้พิสูจน์ข้อเท็จจริงดังนี้

บทตั้ง 2.5.7. *([14]) ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิ strictly convex Banach space X กำหนดให้ $\{T_i\}_{i=1}^N$ เป็นวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C สมมุติให้ $\bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq \emptyset$ และ $\alpha_j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, เมื่อ $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j \in [0, 1]$, $\alpha_1^j + \alpha_2^j + \alpha_3^j = 1$, $\alpha_1^j \in (0, 1)$ สำหรับทุก $j = 1, 2, \ldots, N - 1$, $\alpha_1^N \in (0, 1]$ และ α_2^j, $\alpha_3^j \in [0, 1)$ สำหรับทุก $j = 1, 2, \ldots, N$ ถ้าฟังก์ชัน S เป็น S-mapping ที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ แล้ว $F(S) = \bigcap_{i=1}^N F(T_i)$*

บทตั้ง 2.5.8. *([14]) ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิบานาค X และ $\{T_i\}_{i=1}^N$ เป็นวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ และทุก $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ ให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ $\alpha_j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j)$ เมื่อ $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$ $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j \in [0,1]$ $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$ และ $\alpha_1^j + \alpha_2^j + \alpha_3^j = 1$ สมมุติ $\alpha_i^{n,j} \to \alpha_i^j$ เมื่อ $n \to \infty$ สำหรับ $i \in \{1, 3\}$ และทุก $j = 1, 2, 3, \ldots, N$ ให้ S และ S_n เป็น S-ฟังก์ชันที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ และ $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ ตามลำดับ แล้ว $\lim_{n\to\infty} \|S_n x - Sx\| = 0$ สำหรับแต่ละ $x \in C$*

บทตั้ง 2.5.9. *([8]) ให้ $x^*, y^* \in C$ จะได้ว่า (x^*, y^*) เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4.1) ก็ต่อเมื่อ x^* เป็นจุดตรึงของฟังก์ชัน $G : C \to C$ ที่ส่งโดย*

$$G(x) = P_C[P_C(x - \mu Bx) - \lambda A P_C(x - \mu Bx)], \quad \forall x \in C$$

เมื่อ $y^* = P_C(x^* - \mu Bx^*)$

ในโครงการวิจัยนี้ ผู้วิจัยจะเขียนแทนเซตของจุดตรึงทั้งหมดของฟังก์ชัน G ด้วยสัญลักษณ์ $GVI(C, A, B)$

บทตั้ง 2.5.10. *([34]) ให้ $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน L_A-Lipschitzian และ relaxed (c, d)-cocoercive กำหนดให้ $B : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน L_B-Lipschitzian และ relaxed (c', d')-cocoercive ให้ $G : C \to C$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย*

$$G(x) = P_C[P_C(x - \mu Bx) - \lambda A P_C(x - \mu Bx)], \quad \forall x \in C$$

ถ้า $0 < \lambda < \frac{2(d - cL_A^2)}{L_A^2}$ และ $0 < \mu < \frac{2(d' - c' L_B^2)}{L_B^2}$ แล้ว G เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย

จากข้อเท็จจริงและแนวคิดของการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาดุลยภาพผสม ผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต ดังนั้น ในโครงการวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบปัญหาทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึงร่วม และปัญหาดุลยภาพผสม และประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบปัญหาทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึงร่วม และปัญหาดุลยภาพผสม รวมทั้งได้พิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้น โดยรายละเอียดจะแสดงไว้ในเนื้อหาของบทที่ 3

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

เนื้อหาในบทนี้ ผู้วิจัยนำเสนอระเบียบวิธีการประมาณค่าแบบใหม่เพื่อหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมสำหรับวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต พร้อมทั้งพิสูจน์ทฤษฎีการลู่เข้าสำหรับระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาดังกล่าว นอกจากนี้ได้ประยุกต์ทฤษฎีการลู่เข้าเพื่อแก้ปัญหาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของฟังก์ชัน $\alpha-$inverse strongly monotone และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต รวมทั้งนำไปประยุกต์กับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของตัวแก้ปัญหาของฟังก์ชัน maximal monotone ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของฟังก์ชัน $\alpha-$inverse strongly monotone ซึ่งเป็นทฤษฎีบทที่จำเป็นและสำคัญอย่างยิ่งกับการนำไปประยุกต์ใช้ ทั้งทางวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์ และวิทยาศาสตร์ประยุกต์

3.1 ระเบียบวิธีประมาณค่าแบบใหม่

ระเบียบวิธีทำซ้ำที่ใช้ในการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมสำหรับวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญดังนี้: ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้เวกเตอร์ v และ $x_1 \in C$ และสร้างลำดับ $\{u_n\}, \{y_n\}$ และ $\{x_n\}$ โดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \ \ \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \ \ n \geq 1 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

เมื่อ λ, μ เป็นสองจำนวนจริงที่มากกว่าศูนย์ $\{r_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $(0, \infty)$ $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $[0, 1]$ และ S_n เป็น S-ฟังก์ชันที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าจะกล่าวรายละเอียดในเนื้อหาต่อไป

3.2 ทฤษฎีการลู่เข้าแบบเข้ม

การศึกษาทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำ (3.1.1) สู่ผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมสำหรับวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย

ในปริภูมิฮิลเบิร์ต และจากการวิจัยพบทฤษฎีบท และองค์ความรู้ใหม่ที่สำคัญโดยมีเนื้อหาสาระสำคัญดังต่อไปนี้

บทตั้ง 3.2.1. *กำหนดให้* $A, B : C \to H$ *เป็นฟังก์ชัน* α*-inverse-strongly monotone และ* β*-inverse-strongly monotone ตามลำดับ และ* $G : C \to C$ *เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย*

$$G(x) = P_C[P_C(x - \mu Bx) - \lambda AP_C(x - \mu Bx)], \quad \forall x \in C$$

ถ้า $\lambda \in (0, 2\alpha)$ *และ* $\mu \in (0, 2\beta)$ *แล้ว* G *เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย*

พิสูจน์. พิจารณาสำหรับ $x, y \in C$ จะได้

$$\begin{aligned}\|G(x) - G(y)\| &= \|P_C[P_C(x - \mu Bx) - \lambda AP_C(x - \mu Bx)] \\ &\quad - P_C[P_C(y - \mu By) - \lambda AP_C(y - \mu By)]\|^2 \\ &\leq \|P_C(x - \mu Bx) - \lambda AP_C(x - \mu Bx) \\ &\quad - \big(P_C(y - \mu By) - \lambda AP_C(y - \mu By)\big)\| \\ &= \|(I - \lambda A)P_C(I - \mu B)x - (I - \lambda A)P_C(I - \mu B)y\| \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

และทราบกันดีว่าถ้า $T : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน ι-inverse-strongly monotone แล้ว $I - \gamma T$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย สำหรับแต่ละ $\gamma \in (0, 2\iota)$ และจากสมมุติฐานที่กำหนดให้ทำให้ได้ว่า $I - \lambda A$ และ $I - \mu B$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย เป็นผลให้ $(I - \lambda A)P_C(I - \mu B)$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายด้วย ดังนั้นจากสมการ (3.2.1) จะได้ G เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย □

ทฤษฎีบท 3.2.2. *ให้* C *เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต* H *กำหนดให้* F *เป็นฟังก์ชันจาก* $C \times C$ *ไปยัง* $\mathbb{R}$ *ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) และ* $\varphi : C \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ *เป็นฟังก์ชัน proper lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ กำหนดให้* $A, B : C \to H$ *เป็นฟังก์ชัน* α*-inverse-strongly monotone และ* β*-inverse-strongly monotone ตามลำดับ สมมุติ* $\{T_i\}_{i=1}^N$ *เป็นวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน* C *ที่ทำให้* $\Omega = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \bigcap GVI(C, A, B) \bigcap MEP(F, \varphi) \neq \emptyset$ *สำหรับแต่ละ* $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *ให้* $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ *เมื่อ* $\alpha_1^{n,j}$, $\alpha_2^{n,j}$, $\alpha_3^{n,j} \in [0, 1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ *ซึ่ง* $0 < \eta_1 \leq \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N, 1]$, $0 < \eta_N \leq 1$ *และ* $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^N, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^N \subset [0, \theta_2]$ *ซึ่ง* $0 \leq \theta_2 < 1$ *กำหนดให้* S_n *เป็น* S*-ฟังก์ชันที่ก่อกำเนิดโดย* $T_1, T_2, \ldots, T_N$ *และ* $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ *สมมุติเงื่อนไข (B1) หรือ (B2) เป็นจริง กำหนดให้* v *และ* x_1 *เป็นเวกเตอร์ใดๆใน* C *และ* $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ *เป็นลำดับที่กำหนดโดย*

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu Bu_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n)S_n P_C(y_n - \lambda Ay_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda \in (0, 2\alpha)$ *และ* $\mu \in (0, 2\beta)$ *ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง*

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *และ* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ *และ* $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty}|\alpha_1^{n+1,i}-\alpha_1^{n,i}|=0$ *สำหรับแต่ละ* $i\in\{1,2,\ldots,N\}$ *และ* $\lim_{n\to\infty}|\alpha_3^{n+1,j}-\alpha_3^{n,j}|=0$ *แต่ละ* $j\in\{2,3,\ldots,N\}$

แล้ว $\{x_n\}$ *ลู่เข้าแบบเข้มสู่* $\overline{x}=P_\Omega v$ *และ* $(\overline{x},\overline{y})$ *เป็นผลเฉลยของปัญหา* (2.4.1) *เมื่อ* $\overline{y}=P_C(\overline{x}-\mu B\overline{x})$

พิสูจน์. กำหนดให้ $x^*\in\Omega$ และ $\{T_{r_n}\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันที่นิยามในบทตั้ง 2.5.1 จากบทตั้ง 2.5.9 เป็นผลให้

$$x^*=P_C[P_C(x^*-\mu Bx^*)-\lambda AP_C(x^*-\mu Bx^*)]$$

ถ้ากำหนดให้ $y^*=P_C(x^*-\mu Bx^*)$ และ $t_n=P_C(y_n-\lambda Ay_n)$ แล้ว $x^*=P_C(y^*-\lambda Ay^*)$ และ

$$x_{n+1}=a_nv+b_nx_n+(1-a_n-b_n)S_nt_n$$

เนื่องจาก $I-\lambda A$, $I-\mu A$, P_C และ T_{r_n} เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ดังนั้น

$$\begin{aligned}\|t_n-x^*\|^2&=\|P_C(I-\lambda A)y_n-P_C(I-\lambda A)y^*\|^2\\&\le\|y_n-y^*\|^2=\|P_C(I-\mu B)u_n-P_C(I-\mu B)x^*\|^2\\&\le\|u_n-x^*\|^2=\|T_{r_n}x_n-T_{r_n}x^*\|^2\le\|x_n-x^*\|^2\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

เป็นผลให้

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|&=\|a_nv+b_nx_n+(1-a_n-b_n)S_nt_n-x^*\|\\&\le a_n\|v-x^*\|+b_n\|x_n-x^*\|+(1-a_n-b_n)\|t_n-x^*\|\\&\le a_n\|v-x^*\|+b_n\|x_n-x^*\|+(1-a_n-b_n)\|x_n-x^*\|\\&\le\max\{\|v-x^*\|,\|x_1-x^*\|\}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต เป็นผลให้ $\{u_n\}$, $\{y_n\}$, $\{t_n\}$, $\{Ay_n\}$, $\{Bu_n\}$ และ $\{S_nt_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตด้วย นอกจากนี้จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}\|t_{n+1}-t_n\|&=\|P_C(y_{n+1}-\lambda Ay_{n+1})-P_C(y_n-\lambda Ay_n)\|\\&\le\|y_{n+1}-y_n\|\\&=\|P_C(u_{n+1}-\mu Bu_{n+1})-P_C(u_n-\mu Bu_n)\|\\&\le\|u_{n+1}-u_n\|\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

เนื่องจาก $u_n=T_{r_n}x_n\in\mathrm{dom}\varphi$ และ $u_{n+1}=T_{r_{n+1}}x_{n+1}\in\mathrm{dom}\varphi$ ดังนั้น

$$F(u_n,y)+\varphi(y)-\varphi(u_n)+\frac{1}{r_n}\langle y-u_n,u_n-x_n\rangle\ge0,\quad\forall y\in C\tag{3.2.4}$$

และ

$$F(u_{n+1},y)+\varphi(y)-\varphi(u_{n+1})+\frac{1}{r_{n+1}}\langle y-u_{n+1},u_{n+1}-x_{n+1}\rangle\ge0,\quad\forall y\in C\tag{3.2.5}$$

ถ้าแทนค่า $y=u_{n+1}$ ในสมการ (3.2.4) และ $y=u_n$ ในสมการ (3.2.5) จะได้ว่า

$$F(u_n,u_{n+1})+\varphi(u_{n+1})-\varphi(u_n)+\frac{1}{r_n}\langle u_{n+1}-u_n,u_n-x_n\rangle\ge0$$

และ

$$F(u_{n+1}, u_n) + \varphi(u_n) - \varphi(u_{n+1}) + \frac{1}{r_{n+1}}\langle u_n - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1}\rangle \geq 0$$

เนื่องจาก F เป็นฟังก์ชัน monotone ดังนั้น

$$\left\langle u_{n+1} - u_n, \frac{u_n - x_n}{r_n} - \frac{u_{n+1} - x_{n+1}}{r_{n+1}} \right\rangle \geq 0$$

และ

$$\left\langle u_{n+1} - u_n, u_n - u_{n+1} + u_{n+1} - x_n - \frac{r_n}{r_{n+1}}(u_{n+1} - x_{n+1}) \right\rangle \geq 0$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\|u_{n+1} - u_n\|^2 &\leq \left\langle u_{n+1} - u_n, x_{n+1} - x_n + (1 - \frac{r_n}{r_{n+1}})(u_{n+1} - x_{n+1}) \right\rangle \\ &\leq \|u_{n+1} - u_n\| \left\{ \|x_{n+1} - x_n\| + |1 - \frac{r_n}{r_{n+1}}| \|u_{n+1} - x_{n+1}\| \right\}\end{aligned}$$

และ

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{r_{n+1}}|r_{n+1} - r_n| \|u_{n+1} - x_{n+1}\| \tag{3.2.6}$$

จากสมการ (3.2.3) และ (3.2.6) จะได้ว่า

$$\|t_{n+1} - t_n\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{r_{n+1}}|r_{n+1} - r_n| \|u_{n+1} - x_{n+1}\| \tag{3.2.7}$$

กำหนดให้ $x_{n+1} = b_n x_n + (1 - b_n) z_n$ แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} z_{n+1} - z_n &= \frac{x_{n+2} - b_{n+1} x_{n+1}}{1 - b_{n+1}} - \frac{x_{n+1} - b_n x_n}{1 - b_n} \\ &= \frac{a_{n+1} v + (1 - a_{n+1} - b_{n+1}) S_{n+1} t_{n+1}}{1 - b_{n+1}} - \frac{a_n v + (1 - a_n - b_n) S_n t_n}{1 - b_n} \\ &= \frac{a_{n+1}}{1 - b_{n+1}}(v - S_{n+1} t_{n+1}) + \frac{a_n}{1 - b_n}(S_n t_n - v) + S_{n+1} t_{n+1} - S_n t_n \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

ต่อไปจะพิจารณาค่า $\|S_{n+1} t_{n+1} - S_n t_n\|$ สำหรับแต่ละ $k \in \{2, 3, \ldots, N\}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \|U_{n+1,k} t_n - U_{n,k} t_n\| &= \|\alpha_1^{n+1,k} T_k U_{n+1,k-1} t_n + \alpha_2^{n+1,k} U_{n+1,k-1} t_n + \alpha_3^{n+1,k} t_n \\ &\quad - \alpha_1^{n,k} T_k U_{n,k-1} t_n - \alpha_2^{n,k} U_{n,k-1} t_n - \alpha_3^{n,k} t_n\| \\ &= \|\alpha_1^{n+1,k}(T_k U_{n+1,k-1} t_n - T_k U_{n,k-1} t_n) \\ &\quad + (\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}) T_k U_{n,k-1} t_n + (\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}) t_n \\ &\quad + \alpha_2^{n+1,k}(U_{n+1,k-1} t_n - U_{n,k-1} t_n) + (\alpha_2^{n+1,k} - \alpha_2^{n,k}) U_{n,k-1} t_n\| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \alpha_1^{n+1,k}\|U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n\| + |\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}|\|T_kU_{n,k-1}t_n\| \\
&\quad + |\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}|\|t_n\| + \alpha_2^{n+1,k}\|U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n\| \\
&\quad + |\alpha_2^{n+1,k} - \alpha_2^{n,k}|\|U_{n,k-1}t_n\| \\
&= (\alpha_1^{n+1,k} + \alpha_2^{n+1,k})\|U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n\| \\
&\quad + |\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}|\|T_kU_{n,k-1}t_n\| + |\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}|\|t_n\| \\
&\quad + |\alpha_2^{n+1,k} - \alpha_2^{n,k}|\|U_{n,k-1}t_n\| \\
&\leq \|U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n\| + |\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}|\|T_kU_{n,k-1}t_n\| \\
&\quad + |\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}|\|t_n\| + |(\alpha_1^{n,k} - \alpha_1^{n+1,k}) + (\alpha_3^{n,k} - \alpha_3^{n+1,k})|\|U_{n,k-1}t_n\| \\
&\leq \|U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n\| + |\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}|\|T_kU_{n,k-1}t_n\| \\
&\quad + |\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}|\|t_n\| + |\alpha_1^{n,k} - \alpha_1^{n+1,k}|\|U_{n,k-1}t_n\| \\
&\quad + |\alpha_3^{n,k} - \alpha_3^{n+1,k}|\|U_{n,k-1}t_n\| \\
&= \|U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n\| + |\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}|(\|T_kU_{n,k-1}t_n\| + \|U_{n,k-1}t_n\|) \\
&\quad + |\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}|(\|t_n\| + \|U_{n,k-1}t_n\|)
\end{aligned} \tag{3.2.9}
$$

จากสมการ (3.2.9) จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\|S_{n+1}t_n - S_nt_n\| &= \|U_{n+1,N}t_n - U_{n,N}t_n\| \\
&\leq \|U_{n+1,1}t_n - U_{n,1}t_n\| + \sum_{j=2}^{N}|\alpha_1^{n+1,j} - \alpha_1^{n,j}|(\|T_jU_{n,j-1}t_n\| + \|U_{n,j-1}t_n\|) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{N}|\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}|(\|t_n\| + \|U_{n,j-1}t_n\|) \\
&= |\alpha_1^{n+1,1} - \alpha_1^{n,1}|\|T_1t_n - t_n\| \\
&\quad + \sum_{j=2}^{N}|\alpha_1^{n+1,j} - \alpha_1^{n,j}|(\|T_jU_{n,j-1}t_n\| + \|U_{n,j-1}t_n\|) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{N}|\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}|(\|t_n\| + \|U_{n,j-1}t_n\|)
\end{aligned}
$$

จากเงื่อนไข $(C4)$ เป็นผลให้

$$\lim_{n\to\infty}\|S_{n+1}t_n - S_nt_n\| = 0 \tag{3.2.10}$$

จากสมการ (3.2.7) จะได้

$$
\begin{aligned}
\|S_{n+1}t_{n+1} - S_nt_n\| &\leq \|t_{n+1} - t_n\| + \|S_{n+1}t_n - S_nt_n\| \\
&\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{r_{n+1}}|r_{n+1} - r_n|\|u_{n+1} - x_{n+1}\| \\
&\quad + \|S_{n+1}t_n - S_nt_n\|
\end{aligned} \tag{3.2.11}
$$

โดยสมการ (3.2.8) และ (3.2.11) เป็นผลให้

$$\begin{aligned}\|z_{n+1}-z_n\|-\|x_{n+1}-x_n\| &\leq \frac{a_{n+1}}{1-b_{n+1}}\|v-S_{n+1}t_{n+1}\|+\frac{a_n}{1-b_n}\|S_nt_n-v\| \\ &\quad +\|S_{n+1}t_{n+1}-S_nt_n\|-\|x_{n+1}-x_n\| \\ &\leq \frac{a_{n+1}}{1-b_{n+1}}\|v-S_{n+1}t_{n+1}\|+\frac{a_n}{1-b_n}\|S_nt_n-v\| \\ &\quad +\frac{1}{r_{n+1}}|r_{n+1}-r_n|\|u_{n+1}-x_{n+1}\| \\ &\quad +\|S_{n+1}t_n-S_nt_n\|\end{aligned}$$

จากเงื่อนไข (C1)-(C3) และ (3.2.10) ทำให้ได้ว่า

$$\limsup_{n\to\infty}\|z_{n+1}-z_n\|-\|x_{n+1}-x_n\|\leq 0$$

และโดยบทตั้ง 2.5.4 จะได้ $\|x_n-z_n\|\to 0$ เมื่อ $n\to\infty$ ผลที่ตามมาคือ

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=\lim_{n\to\infty}(1-b_n)\|z_n-x_n\|=0 \tag{3.2.12}$$

จากเงื่อนไขของ (C3) สมการ (3.2.3) และ (3.2.6) ทำให้ได้ว่า $\|u_{n+1}-u_n\|\to 0$, $\|t_{n+1}-t_n\|\to 0$ และ $\|y_{n+1}-y_n\|\to 0$ เมื่อ $n\to\infty$
เนื่องจาก

$$x_{n+1}-x_n=a_n(v-x_n)+(1-a_n-b_n)(S_nt_n-x_n)$$

เพราะฉะนั้น

$$\|S_nt_n-x_n\|\to 0 \quad \text{เมื่อ} \quad n\to\infty \tag{3.2.13}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\lim_{n\to\infty}\|x_n-u_n\|=0$ จากบทตั้ง 2.5.1(3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\|u_n-x^*\|^2 &= \|T_{r_n}x_n-T_{r_n}x^*\|^2\leq\langle T_{r_n}x_n-T_{r_n}x^*,x_n-x^*\rangle \\ &= \langle u_n-x^*,x_n-x^*\rangle=\frac{1}{2}\{\|u_n-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2-\|x_n-u_n\|^2\}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\|u_n-x^*\|^2\leq\|x_n-x^*\|^2-\|x_n-u_n\|^2 \tag{3.2.14}$$

โดยบทตั้ง 2.5.3 และสมการ (3.2.2), (3.2.14) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2 &\leq a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)\|t_n-x^*\|^2 \\ &\leq a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)\|u_n-x^*\|^2 \\ &\leq a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2 \\ &\quad +(1-a_n-b_n)\big[\|x_n-x^*\|^2-\|x_n-u_n\|^2\big] \\ &\leq a_n\|v-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2-(1-a_n-b_n)\|x_n-u_n\|^2\end{aligned}$$

เป็นผลให้

$$
\begin{aligned}
(1-a_n-b_n)\|x_n-u_n\|^2 &\le a_n\|v-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2-\|x_{n+1}-x^*\|^2 \\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_{n+1}-x_n\|
\end{aligned}
$$

โดยเงื่อนไข (C1), (C2) และสมการ (3.2.12) จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-u_n\|=0 \tag{3.2.15}$$

เนื่องจาก

$$\|S_nt_n-u_n\|\le\|S_nt_n-x_n\|+\|x_n-u_n\|$$

จากสมการ (3.2.13) และ (3.2.15) ทำให้ได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\|S_nt_n-u_n\|=0 \tag{3.2.16}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\|Ay_n-Ay^*\|\to 0$ และ $\|Bu_n-Bx^*\|\to 0$ เมื่อ $n\to\infty$ จากสมการ (3.2.2) เรามี

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2 &\le a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)\|t_n-x^*\|^2 \\
&= a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2 \\
&\quad +(1-a_n-b_n)\|P_C(y_n-\lambda Ay_n)-P_C(y^*-\lambda Ay^*)\|^2 \\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2 \\
&\quad +(1-a_n-b_n)\|(y_n-\lambda Ay_n)-(y^*-\lambda Ay^*)\|^2 \\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2 \\
&\quad +(1-a_n-b_n)\left[\|y_n-y^*\|^2+\lambda(\lambda-2\alpha)\|Ay_n-Ay^*\|^2\right] \\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2 \\
&\quad +(1-a_n-b_n)\lambda(\lambda-2\alpha)\|Ay_n-Ay^*\|^2
\end{aligned}
$$

และ

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2 &\le a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)\|t_n-x^*\|^2 \\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)\|y_n-y^*\|^2 \\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2 \\
&\quad +(1-a_n-b_n)\|(u_n-\mu Bu_n)-(x^*-\mu Bx^*)\|^2 \\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2 \\
&\quad +(1-a_n-b_n)\left[\|u_n-x^*\|^2+\mu(\mu-2\beta)\|Bu_n-Bx^*\|^2\right] \\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2 \\
&\quad +(1-a_n-b_n)\mu(\mu-2\beta)\|Bu_n-Bx^*\|^2
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
&-(1-a_n-b_n)\lambda(\lambda-2\alpha)\|Ay_n-Ay^*\|^2 \\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_{n+1}-x_n\|
\end{aligned}
$$

และ

$$\begin{aligned}&-(1-a_n-b_n)\mu(\mu-2\beta)\|Bu_n-Bx^*\|^2\\&\le a_n\|v-x^*\|^2+(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_{n+1}-x_n\|\end{aligned}$$

ดังนั้นโดยสมการ (3.2.12) และเงื่อนไข (C1), (C2) จะได้

$$\|Ay_n-Ay^*\|\to 0 \text{ และ } \|Bu_n-Bx^*\|\to 0 \text{ เมื่อ } n\to\infty \tag{3.2.17}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\|S_nt_n-t_n\|\to 0$ เมื่อ $n\to\infty$ โดยสมการ (2.5.1) และการเป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายของ $I-\mu B$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\|y_n-y^*\|^2&=\|P_C(u_n-\mu Bu_n)-P_C(x^*-\mu Bx^*)\|^2\\&\le\langle(u_n-\mu Bu_n)-(x^*-\mu Bx^*),y_n-y^*\rangle\\&=\frac{1}{2}\big[\|(u_n-\mu Bu_n)-(x^*-\mu Bx^*)\|^2+\|y_n-y^*\|^2\\&\quad-\|(u_n-\mu Bu_n)-(x^*-\mu Bx^*)-(y_n-y^*)\|^2\big]\\&\le\frac{1}{2}\big[\|u_n-x^*\|^2+\|y_n-y^*\|^2-\|(u_n-x^*)-(y_n-y^*)\|^2\\&\quad+2\mu\langle(u_n-x^*)-(y_n-y^*),Bu_n-Bx^*\rangle-\mu^2\|Bu_n-Bx^*\|^2\big]\end{aligned}$$

โดยสมการ (3.2.2) เป็นผลให้

$$\begin{aligned}\|y_n-y^*\|^2&\le\|u_n-x^*\|^2-\|(u_n-x^*)-(y_n-y^*)\|^2\\&\quad+2\mu\langle(u_n-x^*)-(y_n-y^*),Bu_n-Bx^*\rangle-\mu^2\|Bu_n-Bx^*\|^2\\&\le\|x_n-x^*\|^2-\|(u_n-x^*)-(y_n-y^*)\|^2\\&\quad+2\mu\langle(u_n-x^*)-(y_n-y^*),Bu_n-Bx^*\rangle-\mu^2\|Bu_n-Bx^*\|^2\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2&\le a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)\|y_n-y^*\|^2\\&\le a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)\big[\|x_n-x^*\|^2\\&\quad-\|(u_n-x^*)-(y_n-y^*)\|^2\\&\quad+2\mu\langle(u_n-x^*)-(y_n-y^*),Bu_n-Bx^*\rangle-\mu^2\|Bu_n-Bx^*\|^2\big]\\&\le a_n\|v-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2\\&\quad-(1-a_n-b_n)\|(u_n-x^*)-(y_n-y^*)\|^2\\&\quad+(1-a_n-b_n)2\mu\|(u_n-x^*)-(y_n-y^*)\|\|Bu_n-Bx^*\|\end{aligned}$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}&(1-a_n-b_n)\|(u_n-x^*)-(y_n-y^*)\|^2\\&\le a_n\|v-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)2\mu\|(u_n-x^*)-(y_n-y^*)\|\|Bu_n-Bx^*\|\\&\quad+(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_{n+1}-x_n\|\end{aligned}$$

ดังนั้นโดยเงื่อนไข (C1) และสมการ (3.2.12), (3.2.17) เป็นผลให้

$$\|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\| \to 0 \text{ เมื่อ } n \to \infty \tag{3.2.18}$$

โดยบทตั้ง 2.5.6 และสมการ (2.5.2) จะได้

$$\begin{aligned}
&\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\|^2 = \|(y_n - \lambda Ay_n) - (y^* - \lambda Ay^*) \\
&\quad - [P_C(y_n - \lambda Ay_n) - P_C(y^* - \lambda Ay^*)] + \lambda(Ay_n - Ay^*)\|^2 \\
&\le \|(y_n - \lambda Ay_n) - (y^* - \lambda Ay^*) - [P_C(y_n - \lambda Ay_n) - P_C(y^* - \lambda Ay^*)]\|^2 \\
&\quad + 2\lambda\langle Ay_n - Ay^*, (y_n - t_n) + (x^* - y^*)\rangle \\
&\le \|(y_n - \lambda Ay_n) - (y^* - \lambda Ay^*)\|^2 - \|P_C(y_n - \lambda Ay_n) - P_C(y^* - \lambda Ay^*)\|^2 \\
&\quad + 2\lambda\|Ay_n - Ay^*\|\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \\
&\le \|(y_n - \lambda Ay_n) - (y^* - \lambda Ay^*)\|^2 - \|S_nP_C(y_n - \lambda Ay_n) - S_nP_C(y^* - \lambda Ay^*)\|^2 \\
&\quad + 2\lambda\|Ay_n - Ay^*\|\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \\
&\le \|(y_n - \lambda Ay_n) - (y^* - \lambda Ay^*) \\
&\quad - (S_nt_n - x^*)\|\left[\|(y_n - \lambda Ay_n) - (y^* - \lambda Ay^*)\| + \|S_nt_n - x^*\|\right] \\
&\quad + 2\lambda\|Ay_n - Ay^*\|\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \\
&= \|u_n - S_nt_n + x^* - y^* - (u_n - y_n) \\
&\quad - \lambda(Ay_n - Ay^*)\|\left[\|(y_n - \lambda Ay_n) - (y^* - \lambda Ay^*)\| + \|S_nt_n - x^*\|\right] \\
&\quad + 2\lambda\|Ay_n - Ay^*\|\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\|
\end{aligned}$$

ดังนั้นโดยสมการ (3.2.16), (3.2.18) และ (3.2.17) ทำให้ได้ว่า $\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ โดยสมการ (3.2.13), (3.2.15) และ (3.2.18) จะได้

$$\begin{aligned}
\|S_nt_n - t_n\| &\le \|S_nt_n - x_n\| + \|x_n - u_n\| + \|(u_n - y_n) - (x^* - y^*)\| \\
&\quad + \|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \to 0 \text{ เมื่อ } n \to \infty
\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

ต่อไปจะแสดงว่า

$$\limsup_{n\to\infty}\langle v - \overline{x}, x_n - \overline{x}\rangle \le 0$$

เมื่อ $\overline{x} = P_\Omega v$ ในข้อเท็จจริงแล้ว เนื่องจากลำดับ $\{t_n\}$ และ $\{S_nt_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตใน C ดังนั้นสามารถเลือกลำดับย่อย $\{t_{n_i}\}$ ของ $\{t_n\}$ ที่ทำให้ $t_{n_i} \rightharpoonup z \in C$ และ

$$\limsup_{n\to\infty}\langle v - \overline{x}, S_nt_n - \overline{x}\rangle = \lim_{i\to\infty}\langle v - \overline{x}, S_{n_i}t_{n_i} - \overline{x}\rangle$$

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty}\|S_nt_n - t_n\| = 0$ จะได้ว่า $S_{n_i}t_{n_i} \rightharpoonup z$ เมื่อ $i \to \infty$

ต่อไปจะแสดงว่า $z \in \Omega$

(a) เริ่มแรกจะแสดงว่า $z \in \bigcap_{i=1}^N F(T_i)$

จากสมมุติฐานเราสามารถสมมุติให้ $\alpha_1^{n,j} \to \alpha_1^j \in (0,1)$ และ $\alpha_1^{n,N} \to \alpha_1^N \in (0,1]$ เมื่อ $n \to \infty$ สำหรับแต่ละ $j \in \{1,2,\ldots,N-1\}$ และ $\alpha_3^{n,j} \to \alpha_3^j \in [0,1)$ เมื่อ $n \to \infty$ สำหรับ $j =$

$1, 2, \ldots, N$ กำหนดให้ S เป็น S-ฟังก์ชันที่ก่อกำหนดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ เมื่อ $\alpha_j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j)$ สำหรับ $j = 1, 2, \ldots, N$ จากบทตั้ง 2.5.8 ทำให้ได้ว่า $\|S_n t_n - S t_n\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ เนื่องจาก

$$\|St_n - t_n\| \le \|St_n - S_n t_n\| + \|S_n t_n - t_n\|$$

โดยสมการ (3.2.19) ทำให้ได้ว่า $\|St_n - t_n\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$
เนื่องจาก $t_{n_i} \rightharpoonup z$ และ $\|St_n - t_n\| \to 0$ โดยบทตั้ง 2.5.5 และบทตั้ง 2.5.7 จะได้ $z \in F(S) = \bigcap_{i=1}^N F(T_i)$

(b) ต่อไปจะแสดงว่า $z \in GSVI(C, A, B)$ เนื่องจาก

$$\|t_n - x_n\| \le \|S_n t_n - t_n\| + \|S_n t_n - x_n\|$$

จากสมการ (3.2.19) และ (3.2.13) จะได้ $\|t_n - x_n\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ นอกจากนี้โดยบทตั้ง 3.2.1 จะได้ว่า $G : C \to C$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\|t_n - G(t_n)\| &= \|P_C(y_n - \lambda A y_n) - G(t_n)\| \\
&= \|P_C[P(u_n - \mu B u_n) - \lambda A P(u_n - \mu B u_n)] - G(t_n)\| \\
&= \|G(u_n) - G(t_n)\| \le \|u_n - t_n\| \\
&\le \|u_n - x_n\| + \|x_n - t_n\|
\end{aligned}$$

ซึ่งทำให้ $\|t_n - G(t_n)\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ โดยบทตั้ง 2.5.5 จะได้ว่า $z \in GSVI(C, A, B)$

(c) ต่อไปจะแสดงว่า $z \in MEP(F, \varphi)$ เนื่องจาก $t_{n_i} \rightharpoonup z$ และ $\|x_n - t_n\| \to 0$ ดังนั้น $x_{n_i} \rightharpoonup z$ จาก $\|u_n - x_n\| \to 0$ ทำให้ได้ว่า $u_{n_i} \rightharpoonup z$ โดยใช้หลักการเดียวกันกับการพิสูจน์ของ [26, Theorem 3.1, pp. 1825] สามารถแสดงได้ว่า $z \in MEP(F, \varphi)$ เพราะฉะนั้น $z \in \Omega$ จากสมการ (2.5.3) และ $S_{n_i} t_{n_i} \rightharpoonup z$ เมื่อ $i \to \infty$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \langle v - \overline{x}, x_n - \overline{x}\rangle &= \limsup_{n\to\infty} \langle v - \overline{x}, S_n t_n - \overline{x}\rangle = \lim_{i\to\infty} \langle v - \overline{x}, S_{n_i} t_{n_i} - \overline{x}\rangle \\
&= \langle v - \overline{x}, z - \overline{x}\rangle \le 0
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - \overline{x}\|^2 &= \langle a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n t_n - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle \\
&= a_n \langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle + b_n \langle x_n - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\langle S_n t_n - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle \\
&\le a_n \langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle + \frac{1}{2} b_n (\|x_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}(1 - a_n - b_n)(\|t_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2) \\
&\le a_n \langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle + \frac{1}{2} b_n (\|x_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}(1 - a_n - b_n)(\|x_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2) \\
&= a_n \langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle + \frac{1}{2}(1 - a_n)(\|x_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2)
\end{aligned}$$

ซึ่งเป็นผลให้

$$\|x_{n+1} - \overline{x}\|^2 \leq (1 - a_n)\|x_n - \overline{x}\|^2 + 2a_n\langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle$$

จากบทตั้ง 2.5.2 และสมการ (3.2.20) จะได้ว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\overline{x}$ □

ถ้า $N = 1, T_1 = S, \alpha_2^{n,1} = \alpha_3^{n,1} = 0, \varphi = 0, F(x,y) = 0$ สำหรับ $x, y \in C$ และ $r_n = 1$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ในทฤษฎีบท 3.2.2 แล้ว $u_n = P_C x_n = x_n$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้บทแทรกที่สำคัญดังนี้

บทแทรก 3.2.3. *[8, Theorem 3.1]* *ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ $A, B : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α-inverse-strongly monotone และ β-inverse-strongly monotone ตามลำดับ สมมุติ S เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C ที่ทำให้ $\Omega = F(S) \bigcap GVI(C, A, B) \neq \emptyset$ กำหนดให้ v และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใดๆใน C และ $\{x_n\}, \{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย*

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \mu B x_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

ถ้า $\lambda \in (0, 2\alpha), \mu \in (0, 2\beta)$ และ $\{a_n\}, \{b_n\}$ เป็นลำดับที่สอดคล้องเงื่อนไขในทฤษฎีบท 3.2.2 แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\overline{x} = P_\Omega v$ และ $(\overline{x}, \overline{y})$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4.1) เมื่อ $\overline{y} = P_C(\overline{x} - \mu B \overline{x})$

3.3 การประยุกต์ทฤษฎีบทการลู่เข้า

เนื้อหานี้เป็นการประยุกต์ทฤษฎีบท 3.2.2 เพื่อแก้ปัญหาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของฟังก์ชัน $\alpha-$inverse strongly monotone และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต รวมทั้งนำไปประยุกต์กับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพ ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของตัวแก้ปัญหาของฟังก์ชัน maximal monotone ก่อนที่จะได้ทฤษฎีบทการลู่เข้าที่สำคัญ จำเป็นอย่างยิ่งต้องทราบนิยามและสมบัติของฟังก์ชันต่อไปนี้: จะกล่าวว่า $T : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน strictly pseudocontractive ถ้ามีจำนวนจริง $k \in (0, 1)$ ที่ทำให้

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + k\|(I - T)x - (I - T)y\|^2, \quad \forall x, y \in C$$

จะเห็นว่าถ้า $k = 0$ แล้ว T เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย นอกจากนี้ถ้ากำหนดให้ $A = I - T$ เมื่อ $T : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน strictly pseudocontractive พร้อมกับจำนวนจริง k จะได้ว่าสำหรับ $x, y \in C$

$$\|(I - A)x - (I - A)y\|^2 \leq \|x - y\|^2 + k\|Ax - Ay\|^2$$

และ

$$\|(I - T)x - (I - T)y\|^2 = \|x - y\|^2 - 2\langle x - y, Ax - Ay\rangle + \|Ax - Ay\|^2$$

เป็นผลให้

$$\langle x - y, Ax - Ay\rangle \geq \frac{1 - k}{2}\|Ax - Ay\|^2$$

นั่นคือ A เป็นฟังก์ชัน $\frac{1-k}{2}$-inverse-strongly monotone

ทฤษฎีบท 3.3.1. *ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ F เป็นฟังก์ชันจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) และ $\varphi : C \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชัน proper lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ กำหนดให้ $T, V : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน strictly pseudocontractive พร้อมกับค่าคงที่ k, l ตามลำดับ สมมุติ $\{T_i\}_{i=1}^N$ เป็นวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C ที่ทำให้ $\Omega = \bigcap_{i=1}^N F(T_i)\bigcap GSVI(C, I-T, I-V)\bigcap MEP(F,\varphi) \neq \emptyset$ แต่ละ $j \in \{1,2,\ldots,N\}$ ให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ เมื่อ $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ ซึ่ง $0 < \eta_1 \leq \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N, 1]$, $0 < \eta_N \leq 1$ และ $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^N, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^N \subset [0, \theta_2]$ ซึ่ง $0 \leq \theta_2 < 1$ กำหนดให้ S_n เป็น S-ฟังก์ชันก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ สมมุติเงื่อนไข (B1) หรือ (B2) เป็นจริง กำหนดให้ v และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใดๆใน C และ $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย*

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = (1-\mu)u_n + \mu V u_n, \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n)S_n\big((1-\lambda)y_n + \lambda T y_n\big), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda \in (0, 1-k)$ และ $\mu \in (0, 1-l)$ ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ และ $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i} - \alpha_1^{n,i}| = 0$ สำหรับ $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ และ
$\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}| = 0$ สำหรับแต่ละ $j \in \{2,3,\ldots,N\}$

แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\overline{x} = P_\Omega v$ และ $(\overline{x}, \overline{y})$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4.1) เมื่อ $\overline{y} = (1-\mu)\overline{x} + \mu V\overline{x}$

พิสูจน์. กำหนด $A = I - T$ และ $B = I - V$ จะได้ A เป็น $\frac{1-k}{2}$-inverse-strongly monotone และ B เป็น $\frac{1-l}{2}$-inverse-strongly monotone ตามลำดับ ดังนั้น

$$P_C(u_n - \mu B u_n) = (1-\mu)u_n + \mu V u_n$$

และ

$$P_C(y_n - \lambda A y_n) = (1-\lambda)y_n + \lambda T y_n$$

จากทฤษฎีบท 3.2.2 ทำให้ทฤษฎีบทนี้เป็นจริง □

ทฤษฎีบท 3.3.2. *ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ F เป็นฟังก์ชันจาก $H \times H$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) กำหนดให้ $\varphi : H \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชัน lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ ให้ $A : H \to H$ เป็นฟังก์ชัน α-inverse-strongly monotone สมมุติ $\{T_i\}_{i=1}^N$ เป็นวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน H ที่ทำให้ $\Omega = \bigcap_{i=1}^N F(T_i)\bigcap A^{-1}0\bigcap MEP(F,\varphi) \neq \emptyset$ สำหรับแต่ละ $j \in \{1,2,\ldots,N\}$ ให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ เมื่อ $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ ซึ่ง $0 < \eta_1 \leq \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N, 1]$, $0 < \eta_N \leq 1$ และ $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^N, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^N \subset [0, \theta_2]$ ซึ่ง $0 \leq \theta_2 < 1$ กำหนดให้ S_n เป็น S-ฟังก์ชัน*

กำเนิดโดย $T_1, T_2, \dots, T_N$ *และ* $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_N^{(n)}$ *สมมุติเงื่อนไข (B1) หรือ (B2) เป็นจริง กำหนดให้* v *และ* x_1 *เป็นเวกเตอร์ใดๆใน* H *และ* $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ *เป็นลำดับที่กำหนดโดย*

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in H, \\ y_n = u_n - \lambda A u_n, \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda \in (0, 2\alpha)$ *ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง*

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *และ* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ *และ* $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i} - \alpha_1^{n,i}| = 0$ *สำหรับแต่ละ* $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ *และ* $\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}| = 0$ *แต่ละ* $j \in \{2, 3, \dots, N\}$

แล้ว $\{x_n\}$ *จะลู่เข้าแบบเข้มสู่* $\overline{x} = P_\Omega v$

พิสูจน์. กำหนด $\lambda = \mu$, $C = H$, $B = A$ และ $P_H = I$ ในทฤษฎีบท 3.2.2 โดยการใช้หลักการพิสูจน์เดียวกันกับ [8, Theorem 4.1, pp. 388-389] สามารถแสดงได้ว่า $A^{-1}0 = GSVI(C, A, B) = VI(A, H)$ และ

ปัญหา (2.4.1) $\Leftrightarrow$ ปัญหา (2.4.2) $\Leftrightarrow VI(A, H)$

ดังนั้นจากทฤษฎีบท 3.2.2 ทำให้ทฤษฎีบทเป็นจริง □

ต่อไปจะให้นิยามที่สำคัญของตัวแก้ปัญหา (resolvent) ของฟังก์ชันทางเดียว $B : H \to 2^H$ ซึ่งกำหนดดังนี้ $J_r^B = (I + rB)^{-1}$ สำหรับแต่ละ $r > 0$ และเป็นที่ทราบกันดีว่า $F(J_r^B) = B^{-1}0$ และ J_r^B เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ทำให้ได้ทฤษฎีบทที่สำคัญดังนี้

ทฤษฎีบท 3.3.3. *ให้* H *เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ* F *เป็นฟังก์ชันจาก* $H \times H$ *ไปยัง* $\mathbb{R}$ *ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) กำหนดให้* $\varphi : H \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ *เป็นฟังก์ชัน lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ ให้* $A : H \to H$ *เป็นฟังก์ชัน* α*-inverse-strongly monotone และกำหนดให้* $B_1, B_2, \dots, B_N : H \to 2^H$ *เป็นฟังก์ชัน maximal monotone ที่ทำให้* $\Omega = \bigcap_{i=1}^{N} B_i^{-1}0 \bigcap A^{-1}0 \bigcap MEP(F, \varphi) \neq \emptyset$ *สำหรับแต่ละ* $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ *และ* $r_i > 0$ *ให้* $J_{r_i}^{B_i}$ *เป็นตัวแก้ปัญหาของ* B_i *สำหรับแต่ละ* $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ *ให้* $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ *เมื่อ* $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0, 1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ *ซึ่ง* $0 < \eta_1 \leq \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N, 1]$, $0 < \eta_N \leq 1$ *และ* $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^{N}, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^{N} \subset [0, \theta_2]$ *ซึ่ง* $0 \leq \theta_2 < 1$ *กำหนดให้* S_n *เป็น* S*-ฟังก์ชันที่ก่อกำเนิดโดย* $J_{r_1}^{B_1}, J_{r_2}^{B_2}, \dots, J_{r_N}^{B_N}$ *และ* $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_N^{(n)}$ *สมมุติเงื่อนไข (B1) หรือ (B2) เป็นจริง กำหนดให้* v *และ* x_1 *เป็นเวกเตอร์ใดๆใน* C *และ* $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ *เป็นลำดับที่กำหนดโดย*

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in H, \\ y_n = u_n - \lambda A u_n, \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda \in (0, 2\alpha)$ *ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง*

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *และ* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ *และ* $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i} - \alpha_1^{n,i}| = 0$ *สำหรับแต่ละ* $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *และ* $\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}| = 0$ *แต่ละ* $j \in \{2, 3, \ldots, N\}$

แล้ว $\{x_n\}$ *จะลู่เข้าแบบเข้มสู่* $\overline{x} = P_\Omega v$

พิสูจน์. สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \ldots, N$ และ $r_i > 0$ จะได้ว่า $F(J_{r_i}^{B_i}) = B_i^{-1}0$ ให้ $P_H = I$ และ $T_i = J_{r_i}^{B_i}$ สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \ldots, N$ โดยทฤษฎีบท 3.3.2 เป็นให้ทฤษฎีบทเป็นจริง □

บทที่ 4

ผลดำเนินการวิจัย

การประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไป เป็นงานวิจัยที่มุ่งแสวงหาข้อเท็จจริงเกี่ยวกับการหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมสำหรับวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยอาศัยความรู้ของทฤษฎีจุดตรึงเข้ามาช่วยในการวิจัย ผลจากการวิจัยได้ข้อเท็จจริงที่สำคัญโดยมีเนื้อหาสาระดังต่อไปนี้

4.1 ระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาวิจัย

ระเบียบวิธีทำซ้ำที่ใช้ศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมสำหรับวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย โดยกำหนดระเบียบวิธีทำซ้ำดังนี้: ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้เวกเตอร์ v และ $x_1 \in C$ และสร้างลำดับ $\{u_n\}, \{y_n\}$ และ $\{x_n\}$ โดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ S_n เป็น S-ฟังก์ชันที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ สำหรับ λ และ μ เป็นสองจำนวนจริงที่มากกว่าศูนย์ $\{r_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $(0, \infty)$ และ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $[0, 1]$

4.2 ผลดำเนินการวิจัย

ผลจากการวิจัยการประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไป ได้ทฤษฎีบทและองค์ความรู้ใหม่ที่สำคัญ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

บทตั้ง 1. กำหนดให้ $A, B : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α-inverse-strongly monotone และ β-inverse-strongly monotone ตามลำดับ และ $G : C \to C$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย

$$G(x) = P_C[P_C(x - \mu Bx) - \lambda A P_C(x - \mu Bx)], \quad \forall x \in C$$

ถ้า $\lambda \in (0, 2\alpha)$ และ $\mu \in (0, 2\beta)$ แล้ว G เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย

ทฤษฎีบท 2. ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ F เป็นฟังก์ชันจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) และ $\varphi : C \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชัน proper lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ กำหนดให้ $A, B : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α-inverse-strongly monotone และ β-inverse-strongly monotone ตามลำดับ สมมุติ $\{T_i\}_{i=1}^N$ เป็นวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C ที่ทำให้ $\Omega = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \bigcap GVI(C, A, B) \bigcap MEP(F, \varphi) \neq \emptyset$ สำหรับแต่ละ $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ ให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ เมื่อ $\alpha_1^{n,j}$,$\alpha_2^{n,j}$, $\alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ ซึ่ง $0 < \eta_1 \leq \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N, 1]$, $0 < \eta_N \leq 1$ และ $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^N, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^N \subset [0, \theta_2]$ ซึ่ง $0 \leq \theta_2 < 1$ กำหนดให้ S_n เป็น S-ฟังก์ชันที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ สมมุติเงื่อนไข (B1) หรือ (B2) เป็นจริง กำหนดให้ v และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใดๆใน C และ $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda \in (0, 2\alpha)$ และ $\mu \in (0, 2\beta)$ ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ และ $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i} - \alpha_1^{n,i}| = 0$ สำหรับแต่ละ $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ และ $\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}| = 0$ แต่ละ $j \in \{2, 3, \ldots, N\}$

แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\overline{x} = P_\Omega v$ และ $(\overline{x}, \overline{y})$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4.1) เมื่อ $\overline{y} = P_C(\overline{x} - \mu B\overline{x})$

นอกจากนี้ผู้วิจัยได้ประยุกต์ทฤษฎีบท 2 เพื่อแก้ปัญหาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของฟังก์ชัน $\alpha-$inverse strongly monotone และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต รวมทั้งนำไปประยุกต์กับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพ ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของตัวแก้ปัญหาของฟังก์ชัน maximal monotone และได้ทฤษฎีบทที่สำคัญดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3. ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ F เป็นฟังก์ชันจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) และ $\varphi : C \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชัน proper lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ กำหนดให้ $T, V : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน strictly pseudocontractive พร้อมกับค่าคงที่ k, l ตามลำดับ สมมุติ $\{T_i\}_{i=1}^N$ เป็นวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C ที่ทำให้ $\Omega = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \bigcap GSVI(C, I - T, I - V) \bigcap MEP(F, \varphi) \neq \emptyset$ แต่ละ $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ ให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ เมื่อ $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ ซึ่ง $0 < \eta_1 \leq \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N, 1]$, $0 < \eta_N \leq 1$ และ $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^N, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^N \subset [0, \theta_2]$ ซึ่ง $0 \leq \theta_2 < 1$ กำหนดให้ S_n เป็น S-ฟังก์ชันก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ สมมุติเงื่อนไข (B1) หรือ (B2) เป็นจริง กำหนดให้ v และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใดๆใน C และ $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = (1 - \mu) u_n + \mu V u_n, \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n\big((1 - \lambda) y_n + \lambda T y_n\big), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda \in (0, 1-k)$ และ $\mu \in (0, 1-l)$ ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ และ $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i} - \alpha_1^{n,i}| = 0$ สำหรับ $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ และ $\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}| = 0$ สำหรับแต่ละ $j \in \{2,3,\ldots,N\}$

แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\bar{x} = P_{\Omega}v$ และ $(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4.1) เมื่อ $\bar{y} = (1-\mu)\bar{x} + \mu V\bar{x}$

ทฤษฎีบท 4. ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ F เป็นฟังก์ชันจาก $H \times H$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) กำหนดให้ $\varphi : H \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชัน lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ ให้ $A : H \to H$ เป็นฟังก์ชัน α-inverse-strongly monotone สมมุติ $\{T_i\}_{i=1}^{N}$ เป็นวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน H ที่ทำให้ $\Omega = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \bigcap A^{-1}0 \bigcap MEP(F,\varphi) \neq \emptyset$ สำหรับแต่ละ $j \in \{1,2,\ldots,N\}$ ให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ เมื่อ $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ ซึ่ง $0 < \eta_1 \le \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N, 1]$, $0 < \eta_N \le 1$ และ $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^{N}, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^{N} \subset [0, \theta_2]$ ซึ่ง $0 \le \theta_2 < 1$ กำหนดให้ S_n เป็น S-ฟังก์ชันกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ สมมุติเงื่อนไข (B1) หรือ (B2) เป็นจริง กำหนดให้ v และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใดๆใน H และ $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \ge 0, & \forall y \in H, \\ y_n = u_n - \lambda A u_n, \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n(y_n - \lambda A y_n), & n \ge 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda \in (0, 2\alpha)$ ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ และ $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i} - \alpha_1^{n,i}| = 0$ สำหรับแต่ละ $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ และ $\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}| = 0$ แต่ละ $j \in \{2,3,\ldots,N\}$

แล้ว $\{x_n\}$ จะลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\bar{x} = P_{\Omega}v$

ทฤษฎีบท 5. ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต และ F เป็นฟังก์ชันจาก $H \times H$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) กำหนดให้ $\varphi : H \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชัน lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ ให้ $A : H \to H$ เป็นฟังก์ชัน α-inverse-strongly monotone และกำหนดให้ $B_1, B_2, \ldots, B_N : H \to 2^H$ เป็นฟังก์ชัน maximal monotone ที่ทำให้ $\Omega = \bigcap_{i=1}^{N} B_i^{-1}0 \bigcap A^{-1}0 \bigcap MEP(F,\varphi) \neq \emptyset$ สำหรับแต่ละ $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ และ $r_i > 0$ ให้ $J_{r_i}^{B_i}$ เป็นตัวแก้ปัญหาของ B_i สำหรับแต่ละ $j \in \{1,2,\ldots,N\}$ ให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ เมื่อ $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ ซึ่ง $0 < \eta_1 \le \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N, 1]$, $0 < \eta_N \le 1$ และ $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^{N}, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^{N} \subset [0, \theta_2]$ ซึ่ง $0 \le \theta_2 < 1$ กำหนดให้ S_n เป็น S-ฟังก์ชันที่ก่อกำเนิดโดย $J_{r_1}^{B_1}, J_{r_2}^{B_2}, \ldots, J_{r_N}^{B_N}$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ สมมุติเงื่อนไข (B1) หรือ (B2) เป็นจริง

กำหนดให้ v และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใดๆใน C และ $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in H, \\ y_n = u_n - \lambda A u_n, \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda \in (0, 2\alpha)$ ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ และ $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i} - \alpha_1^{n,i}| = 0$ สำหรับแต่ละ $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ และ $\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}| = 0$ แต่ละ $j \in \{2, 3, \dots, N\}$

แล้ว $\{x_n\}$ จะลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\overline{x} = P_\Omega v$

การประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไป ทำให้ได้ทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการอ้างอิงผลงานทางวิชาการ รวมทั้งนำไปประยุกต์ใช้กับวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์ และวิทยาศาสตร์ประยุกต์

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำ เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต ซึ่งได้ทฤษฎีบทและองค์ความรู้ใหม่ที่สำคัญยิ่ง สำหรับเนื้อหาในบทนี้ผู้วิจัยได้ให้รายละเอียดเกี่ยวกับ ข้อสรุปจากการวิจัย อภิปรายผลการวิจัยและข้อเสนอแนะที่สำคัญ ดังต่อไปนี้

5.1 สรุปผลการวิจัย

การประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไป เป็นการวิจัยพื้นฐาน (basic research) เพื่อมุ่งแสวงหาข้อเท็จจริงเกี่ยวกับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมสำหรับวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต พร้อมทั้งพิสูจน์ทฤษฎีการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำที่สร้างขึ้น รวมถึงประยุกต์ทฤษฎีบทการลู่เข้าเพื่อแก้ปัญหาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของฟังก์ชัน $\alpha-$inverse strongly monotone และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต รวมทั้งนำไปประยุกต์กับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพ ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของตัวแก้ปัญหาของฟังก์ชัน maximal monotone ผลจากการวิจัยได้ข้อสรุปที่สำคัญ 2 ประการ ดังนี้

ประการแรก ได้ระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบปัญหาทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึงร่วม และปัญหาดุลยภาพผสมในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยที่ระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นใหม่นี้ได้ครอบคลุมระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาโดย Ceng และคณะ [8] ผลการวิจัยพบว่าระเบียบวิธีทำซ้ำที่ใช้ในการศึกษานี้ได้ลู่เข้าแบบเข้มสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาดังกล่าว รวมทั้งทฤษฎีบทการลู่เข้าที่ได้จากการวิจัยได้ครอบคลุมทฤษฎีการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาโดย โดย Ceng และคณะ [8]

ประการที่สอง ได้ทฤษฎีการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นและประยุกต์ทฤษฎีบทดังกล่าวเพื่อแก้ปัญหาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของฟังก์ชัน $\alpha-$inverse strongly monotone และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต รวมทั้งนำไปประยุกต์กับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพ ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของตัวแก้ปัญหาของฟังก์ชัน maximal monotone

5.2 อภิปรายผล

ผลจากการวิจัยเกี่ยวกับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมสำหรับวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต จำเป็นอย่างยิ่งต้องอาศัยระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อใช้ในการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมดังกล่าว โดยระเบียบวิธีทำซ้ำที่ใช้ในการศึกษาคือ

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ λ และ μ เป็นสองจำนวนจริงที่มากกว่าศูนย์ $\{r_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $(0, \infty)$ และ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ เป็นลำดับ ในช่วง $[0, 1]$ และ S_n เป็น S-ฟังก์ชันที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ จากระเบียบวิธีทำซ้ำนี้จะเห็นว่า ถ้าวางเงื่อนไขบางอย่างแล้วจะคลอบคลุมระเบียบวิธีที่ศึกษามาก่อน รวมทั้งทฤษฎีการลู่เข้าที่ได้จากการวิจัยได้ครอบคลุมผลงานมาก่อนดังต่อไปนี้

1. ถ้า $A = B$ และ $S_n = S$ แล้วระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษานี้จะลดรูปเป็นระเบียบวิธีทำซ้ำที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu A u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

   ซึ่งศึกษาโดย Qin, Cho และ Kang [28]

2. ถ้า $F = \varphi = 0, r_n = 1$ และ $S_n = S$ แล้วระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษานี้จะลดรูปเป็นระเบียบวิธีทำซ้ำที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

   ซึ่งศึกษาโดย Ceng et al. [8]

3. ถ้า $N = 1$, $T_1 = S$, $\alpha_2^{n,1} = \alpha_3^{n,1} = 0$, $\varphi = 0$, $F(x, y) = 0$ สำหรับ $x, y \in C$ และ $r_n = 1$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ แล้ว $u_n = P_C x_n = x_n$ ทำให้ทฤษฎีบทการลู่เข้าที่ได้จากการวิจัยนี้ได้ครอบคลุมทฤษฎีการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาโดย โดย Ceng และคณะ [8]

5.3 ข้อเสนอแนะ

การประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมสำหรับวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ตนั้น พอสรุปแนวทางดำเนินการวิจัยต่อ ดังต่อไปนี้

1. ผู้ดำเนินวิจัย สามารถศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำอื่นๆ ที่คลอบคลุมระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาในโครงการวิจัยนี้ อาทิเช่น

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $f : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน contraction และ λ μ เป็นสองจำนวนจริงที่มากกว่าศูนย์ $\{r_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $(0, \infty)$ $\{a_n\}, \{b_n\}$ เป็นลำดับ ในช่วง $[0, 1]$ และ S_n เป็น S-ฟังก์ชันที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ ซึ่งจะเห็นว่าถ้า $f(x) = v \ \ \forall x \in C$ จะได้ว่าระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นนี้ ครอบคลุมระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาในโครงการวิจัยนี้

2. ผู้สนใจสามารถศึกษาการประมาณค่าจุดตรึงของฟังก์ชันที่โตกว่า (คลาสใหญ่กว่า) ฟังก์ชันแบบไม่ขยาย เช่น ฟังก์ชัน strictly pseudo contractive mapping, quasai nonexpansive mapping asymptotically nonexpansive mapping ฯ

3. ผู้สนใจสามารถศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบอสมการการแปรผันแบบใหม่ เช่น ปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไป ซึ่งเป็นปัญหาที่ครอบคลุมปัญหาอสมการการแปรผัน ศึกษาโดย Yu และ Liang [40] โดยที่ปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไป คือ การหาสมาชิก $u \in C$ ที่ทำให้

$$\langle u - \tau Bu + \lambda Au, v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in C$$

เมื่อ $A, B : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน และ τ λ เป็นสองจำนวนจริงบวกใดๆ

4. ผู้สนใจสามารถศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึงร่วม จากปริภูมิฮิลเบิร์ตสู่ปริภูมิบานาค

บรรณานุกรม

[1] L. C. Ceng, Q. H. Ansari and J. C. Yao, Mann type steepest and modified hybrid steepest-descent methods for variational inequalities in Banach spaces, Numerical Functional Analysis and Optimization, 29 (2008) 987--1033.

[2] L. C. Ceng, Q. H. Ansari and J. C. Yao, On relaxed viscosity iterative methods for variational inequalities in Banach spaces, J. Comput. App. Math. 230 (2009) 813--822.

[3] L. C. Ceng, G. Y. Chen, X. X. Huang and J. C. Yao, Existence theorems for generalized vector variational inequalities with pseudomonotonicity and their applications, Taiwanese Journal of Mathematics 12 (2008) 151--172.

[4] L. C. Ceng, C. Lee and J. C. Yao, Strong weak convergence theorems of implicit hybrid steepest-descent methods for variational inequalities, Taiwanese Journal of Mathematics 12 (2008) 227--244.

[5] L. C. Ceng, A. Petrusel and J. C. Yao, Iterative approaches to solving equilibrium problems and fixed point problems of infinitely many nonexpansive mappings, Journal of Optimization Theory and Applications 143 (2009) 37--58.

[6] L. C. Ceng, A. Petrusel and J. C. Yao, Weak convergence theorem by a modified extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings, Fixed Point Theory 9 (2008) 73--87.

[7] L. C. Ceng, S. Schaible and J. C. Yao, Hybrid steepest descent methods for zeros of nonlinear operator with applictions to variational inequalities, Journal of Optimization Theory and Applications 141 (2009) 75--91.

[8] L. C. Ceng, C. Y. Wang and J. C. Yao, Strong convergence theorems by a relaxed extragradient method for a general system of variational inequalities, Math Meth Oper Res 67 (2008) 375--390.

[9] L. C. Ceng, J. C. Yao, A hybrid iterative scheme for mixed equilibrium problems and fixed point problems, J. Comput. App. Math. 214 (2008) 186--201.

[10] L. C. Ceng, J. C. Yao, Relaxed viscosity approximation methods for fixed point problems and variational inequality problems, Nonlinear analysis Series A: Theory, Methods & Applications 69 (2008) 3299--3309.

[11] S. S. Chang, H. W. Joseph Lee and C. K. Chan, A new method for solving equilibrium problem fixed point problem and variational inequality problem with application to optimization, Nonlinear Analysis 70 (2009) 3307--3319.

[12] K. Goebel, W. A. Kirk, Topics on metric fixed-point theory. Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[13] B. Halpern, Fixed points of nonexpansive maps, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967) 957--961.

[14] A. Kangtunyakarn, S. Suantai, Hybrid iterative scheme for generalized equilibrium problems and fixed point problems of finite family of nonexpansive mappings, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 3 (2009) 296--309.

[15] G. M. Korpelevich, An extragradient method for finding saddle points and for other problems, Ekon. Mat. Metody 12 (1976) 747--756.

[16] P. L. Lion, Approximation de points fixed de contractions, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 284 (1977) A1357--A1359.

[17] L. S. Liu, Ishikawa and Mann iteration process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 194 (1995) 114--125.

[18] N. Nadezhkina, W. Takahashi, Weak convergence theorem by an extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings, Journal of optimization theory and applications 128 (2006) 191-201.

[19] M. A. Noor, On iterative methods for solving a system of mixed variational inequalities, Applicable Analysis 87(1) (2008) 99--108.

[20] M. A. Noor, Projection methods for nonconvex variational inequalities, Optimization Letters 3(3) (2009) 411--418.

[21] M. A. Noor, Some developments in general variational inequalities, Applied Mathematics and Computation 152 (2004) 199--277.

[22] M. O. Osilike, D. I. Igbokwe, Weak and strong convergence theorems for fixed points of pseudocontractions and solutions of monotone type operator equations, Comput. Math. Appl. 40 (2000) 559--239.

[23] J. W. Peng, J. C. Yao, A modified CQ method for equilibrium problems, fixed points and variational inequality, Fixed Point Theory, 9 (2008) 515--531.

[24] J. W. Peng, J. C. Yao, A new hybrid-extragradient method for generalized mixed equilibrium problems and fixed point problems and variational inequality problems, Taiwanese Journal of Mathematics 12 (2008) 1401--1433.

[25] J. W. Peng, J. C. Yao, Some new iterative algorithms for generalized mixed equilibrium problems with strict pseudo-contractions and monotone mappings, Taiwanese Journal of Mathematics 13 (2009) 1537--1582.

[26] J. W. Peng, J. C. Yao, Strong convergence theorems of iterative schemes based on extragradient method for mixed equilibrium problems and fixed point problems, Mathematical and Computer Modelling 49 (2009) 1816--1828.

[27] S. Plubtieng, R. Punpaeng, A new iterative method for equilibrium problems and fixed point problems of nonexpansive mappings and monotone mappings, Applied Mathematics and Computation 197 (2008) 548--558.

[28] X. Qin, S. Y. Cho and S. M. Kang, Iterative algorithms for variational inequality and equilibrium problems with applications. J Glob Opim. (2009) Doi 10.1007/s10898-009-9498-8.

[29] G. Stampacchi, Formes bilineaires coercivites sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sci. Paris. 258 (1964) 4413-4416.

[30] S. Reich, Approximating fixed points of nonexpansive mappings, PanAmer. Math. J. 4(2) (1994) 23--28.

[31] T. Suzuki, Strong convergence of Krasnoselskii and Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals, J. Math. Anal. Appl. 305 (2005) 227--239.

[32] W. Takahashi, M. Toyoda, Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings, J. Optim. Theory Appl. 118 (2003) 417-428.

[33] R. U. Verma, On a new system of nonlinear variational inequalities and associated iterative algorithms, Math Sci Res Hot-Line 3 (1999) 65--68.

[34] R. Wangkeeree and P. preechasilp, A new iterative scheme for solving the equilibrium problems, variational inequality problems, and fixed point problems in Hilbert spaces, Journal of Applied Mathematics 2012 (2012) Doi:10.1155/2012/154968.

[35] R. Wittmann, Approximation of fixed points of nonexpansive mappings, Arch. Math. (Basel) 58 (1992) 486--491.

[36] H. K. Xu, Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl. 298 (2004) 279--291.

[37] Y. Yao, Y. C. Liou and S. M. Kang. (2010). Approach to common elements of variational inequality problems and fixed point problems via a relaxed extragradient method. Computers and Mathematics with Applications. 59, 3472-3480.

[38] Y. Yao, M. A. Noor, K. I. Noor, Y. C. Liou and H. Yaqoob, Modified extragradient method for a system of variational inequalities in Banach spaces, Acta Appl Math 110(3) (2010) 1211--1224.

[39] Y. Yao, J. C. Yao, On modified iterative method for nonexpansive mappings and monotone mappings, Appl. Math. Comput. 186 (2007) 1551-1558.

[40] L. Yu, M. Liang, Convergence theorems of solutions of a generalized variational inequality. Fixed Point Theory and Applications 19 (2011).

[41] L. C. Zeng, J. C. Yao, A hybrid extragradient method for general variational inequalities, Mathematical Methods of Operations Research 69 (2009) 141--158.

[42] J. Zhao, S. He, A new iterative method for equilibrium problems and fixed point problems of infinitely nonexpansive mappings and monotone mappings, Appl. Math. Comput. 215 (2009) 670--680.

ภาคผนวก

1. ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์

2. รายงานความก้าวหน้าโครงการวิจัย งวดที่ 1

1. ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์

เรื่อง Hybrid iterative method for a general system of variational inequalities in Hilbert spaces with applications

วารสาร International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 82, 2013, no. , 189 -211

International Journal of Pure and Applied Mathematics
Volume 82 No. 2 2013, 189-211
ISSN: 1311-8080 (printed version)
url: http://www.ijpam.eu
ijpam.eu

HYBRID ITERATIVE METHOD FOR A GENERAL SYSTEM OF VARIATIONAL INEQUALITIES IN HILBERT SPACES WITH APPLICATIONS

S. Imnang
Department of Mathematics and Statistics
Faculty of Science
Thaksin University
Phatthalung Campus, Phatthalung, 93110, THAILAND
and
Centre of Excellence in Mathematics, CHE
Si Ayutthaya Road, Bangkok 10400, THAILAND

Abstract: The purpose of this paper is to investigate the problem of finding a common element of the set of solutions of a general system of variational inequality problems for α-inverse-strongly monotone mappings, the set of solutions of mixed equilibrium problems and the set of common fixed points of a finite family of nonexpansive mappings in a real Hilbert space. Furthermore, we apply our main result with the problem of approximating a zero of a finite family of maximal monotone mappings in Hilbert spaces. Our main result extends and improves the recent results of Ceng, Wang and Yao [1] and many others.

AMS Subject Classification: 47H10, 49J40, 47H05, 47H09, 46B20.
Key Words: nonexpansive mapping, general system of variational inequality problem, mixed equilibrium problem, demi-closedness principle

1. Introduction

Let H be a real Hilbert space with inner product $\langle .,. \rangle$ and C be a nonempty

Received: September 20, 2012
© 2013 Academic Publications, Ltd.
url: www.acadpubl.eu

closed convex subset of H. A mapping $T : C \to C$ is said to be *nonexpansive mapping* if $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ for all $x, y \in C$. The fixed point set of T is denoted by $F(T) := \{x \in C : Tx = x\}$.

A mapping $A : C \to H$ is called *α-inverse-strongly monotone*, if there exists a positive real number $\alpha > 0$ such that

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq \alpha\|Ax - Ay\|^2, \quad \forall x, y \in C.$$

It is obvious that every α-inverse-strongly monotone mapping A is monotone and Lipschitz continuous.

For a given nonlinear operator $A : C \to H$, we consider the following variational inequality problem of finding $x^* \in C$ such that

$$\langle Ax^*, x - x^*\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C. \tag{1.1}$$

The set of solutions of the variational inequality (1.1) is denoted by $VI(C, A)$. Variational inequality theory has emerged as an important tool in studying a wide class of obstacle, unilateral, free, moving, equilibrium problems arising in several branches of pure and applied sciences in a unified and general framework. The variational inequality problem has been extensively studied and continued in the literature, see, Piri [11], Qin et al. [12], Shehu [13], Wangkeeree and Preechasilp [17], Yao et al. [19], Yao et al. [21] and relevant references cited therein.

Next, we focus on a general system of variational inequality problems [in short, GSVI] which is considered by Ceng et al. [1]: find $(x^*, y^*) \in C \times C$ such that

$$\begin{cases} \langle \lambda Ay^* + x^* - y^*, x - x^*\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \mu Bx^* + y^* - x^*, x - y^*\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \end{cases} \tag{1.2}$$

where $A, B : C \to H$ are two nonlinear mappings, $\lambda > 0$ and $\mu > 0$ are two constants. In particular, if $A = B$, then GSVI (1.2) reduces to find $(x^*, y^*) \in C \times C$ such that

$$\begin{cases} \langle \lambda Ay^* + x^* - y^*, x - x^*\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \mu Ax^* + y^* - x^*, x - y^*\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \end{cases} \tag{1.3}$$

which is defined by Verma [15], and is called the new system of variational inequalities. Further, if we add up the requirement that $x^* = y^*$, then problem (1.3) reduces to the classical variational inequality $VI(C, A)$. Ceng et al. [1] introduced and studied a relaxed extragradient method for finding a common element of the set of solutions of GSVI (1.2) for the α and β-inverse-strongly monotone mappings and the set of fixed points of a nonexpansive mapping in a real Hilbert space. Some related works, we refer to see [2, 4, 7, 8, 16, 20].

Recently, in 2012, Ceng et al. [2] considered an iterative method for the system of GSVI (1.2) and obtained a strong convergence theorem for the two different systems of GSVI (1.2) and the set of fixed points of a strict pseudo-contraction mapping in a real Hilbert space.

Let $\varphi : C \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ be a proper extended real-valued function and F be a bifunction from $C \times C$ to $\mathbb{R}$, where $\mathbb{R}$ is the set of real numbers. Ceng and Yao [3] considered the following mixed equilibrium problem (in short, MEP):

$$\text{Find } \ x \in C \ \text{ such that } \ F(x,y) + \varphi(y) \geq \varphi(x), \quad \forall y \in C. \tag{1.4}$$

The set of solution of MEP (1.4) is denoted by $MEP(F, \varphi)$. It is easy to see that x is a solution of MEP (1.4) implies that $x \in \text{dom}\varphi = \{x \in C \mid \varphi(x) < +\infty\}$.

If $\varphi = 0$, then the MEP (1.4) becomes the following equilibrium problem:

$$\text{Find } \ x \in C \ \text{ such that } \ F(x,y) \geq 0, \quad \forall y \in C. \tag{1.5}$$

The set of solution of (1.5) is denoted by $EP(F)$.

If $F = 0$, then the MEP (1.4) reduces to the convex minimization problem:

$$\text{Find } \ x \in C \ \text{ such that } \ \varphi(y) \geq \varphi(x), \quad \forall y \in C.$$

If $\varphi = 0$ and $F(x,y) = \langle Ax, y - x\rangle$ for all $x, y \in C$, where A is a mapping from C into H, then MEP (1.4) reduces to the classical variational inequality and $EP(F) = VI(C, A)$. For solving problem MEP (1.4), Ceng and Yao [3] introduced a hybrid iterative scheme for finding a common element of the set $MEP(F, \varphi)$ and the set of common fixed points of finite many nonexpansive mappings in a Hilbert space. Some related works, we refer to see [7, 13, 16, 19].

Motivated by the recent research work going on in this fascinating field. In this paper, we introduce a hybrid method for finding a common element of the set of solutions of GSVI (1.2) for α-inverse-strongly monotone mappings, the set of solutions of MEP (1.4) and the set of common fixed points of a finite family of nonexpansive mappings in a real Hilbert space. Furthermore, we apply our main result with the problem of approximating a zero of a finite family of maximal monotone mappings in a real Hilbert space. Our main result extends and improves the recent results of Ceng, Wang and Yao [1] and many others.

2. Preliminaries

In this section, we recall the well known results and give some useful lemmas that will be used in the next section.

Let C be a nonempty closed convex subset of a real Hilbert space H. For every point $x \in H$, there exists a unique nearest point in C, denoted by $P_C x$, such that

$$\|x - P_C x\| \leq \|x - y\|, \quad \forall y \in C.$$

P_C is called the *metric projection* of H onto C. It is well known that P_C is a nonexpansive mapping of H onto C and satisfies

$$\langle x - y, P_C x - P_C y\rangle \geq \|P_C x - P_C y\|^2, \quad \forall x, y \in H. \tag{2.1}$$

Obviously, this immediately implies that

$$\|(x - y) - (P_C x - P_C y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|P_C x - P_C y\|^2, \quad \forall x, y \in H. \tag{2.2}$$

Recall that, $P_C x$ is characterized by the following properties: $P_C x \in C$ and

$$\begin{aligned} &\langle x - P_C x, y - P_C x\rangle \leq 0, \\ &\|x - y\|^2 \geq \|x - P_C x\|^2 + \|P_C x - y\|^2, \end{aligned} \tag{2.3}$$

for all $x \in H$ and $y \in C$; see Goebel and Kirk [5] for more details.

For solving the mixed equilibrium problem, let us give the following assumptions for the bifunction F, φ and the set C:

(A1) $F(x, x) = 0$ for all $x \in C$;

(A2) F is monotone, i.e. $F(x, y) + F(y, x) \leq 0$ for all $x, y \in C$;

(A3) For each $y \in C$, $x \mapsto F(x, y)$ is weakly upper semicontinuous;

(A4) For each $x \in C$, $y \mapsto F(x, y)$ is convex;

(A5) For each $x \in C$, $y \mapsto F(x, y)$ is lower semicontinuous;

(B1) For each $x \in H$ and $r > 0$, there exist a bounded subset $D_x \subseteq C$ and $y_x \in C$ such that for any $z \in C \setminus D_x$,

$$F(z, y_x) + \varphi(y_x) + \frac{1}{r}\langle y_x - z, z - x\rangle < \varphi(z).$$

(B2) C is a bounded set.

In the sequel, we shall need to use the following lemmas.

Lemma 2.1. ([10]) *Let C be a nonempty closed convex subset of H. Let F be a bifunction from $C \times C$ to $\mathbb{R}$ satisfying (A1)-(A5) and let $\varphi : C \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$*

be a proper lower semicontinuous and convex function. Assume that either (B1) or (B2) holds. For $r > 0$ and $x \in H$, define a mapping $T_r : H \to C$ as follows.

$$T_r(x) = \left\{ z \in C : F(z, y) + \varphi(y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x\rangle \geq \varphi(z), \quad \forall y \in C \right\}$$

for all $x \in H$. Then the following conclusions hold:

(1) *For each $x \in H$, $T_r(x) \neq \emptyset$;*

(2) *T_r is single-valued;*

(3) *T_r is firmly nonexpansive, i.e. for any $x, y \in H$,*

$$\|T_r(x) - T_r(y)\|^2 \leq \langle T_r x - T_r y, x - y\rangle;$$

(4) *$F(T_r) = MEP(F, \varphi)$;*

(5) *$MEP(F, \varphi)$ is closed and convex.*

Lemma 2.2. ([18]) Assume $\{a_n\}$ is a sequence of nonnegative real numbers such that

$$a_{n+1} \leq (1 - \gamma_n)a_n + \delta_n,$$

where $\{\gamma_n\}$ is a sequence in $(0, 1)$ and $\{\delta_n\}$ is a sequence such that

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$;

(ii) $\limsup_{n\to\infty} \delta_n/\gamma_n \leq 0$ or $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n| < \infty$.

Then $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Lemma 2.3. ([9]) *Let $(H, \langle ., .\rangle)$ be an inner product space. Then, for all $x, y, z \in H$ and $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$ with $\alpha + \beta + \gamma = 1$, we have*

$$\begin{aligned}\|\alpha x + \beta y + \gamma z\|^2 = \alpha\|x\|^2 + \beta\|y\|^2 + \gamma\|z\|^2 - \alpha\beta\|x - y\|^2 \\ - \alpha\gamma\|x - z\|^2 - \beta\gamma\|y - z\|^2.\end{aligned}$$

Lemma 2.4. ([14]) *Let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be bounded sequences in a Banach space X and let $\{b_n\}$ be a sequence in $[0, 1]$ with $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$. Suppose $x_{n+1} = (1 - b_n)y_n + b_n x_n$ for all integers $n \geq 1$ and $\limsup_{n\to\infty}(\|y_{n+1} - y_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \leq 0$. Then, $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0$.*

Lemma 2.5. ([5]) *Demi-closedness principle. Assume that T is a nonexpansive self-mapping of a nonempty closed convex subset C of a real Hilbert space H. If T has a fixed point, then $I - T$ is demi-closed: that is, whenever $\{x_n\}$ is a sequence in C converging weakly to some $x \in C$ (for short, $x_n \rightharpoonup x \in C$), and the sequence $\{(I - T)x_n\}$ converges strongly to some y (for short, $(I - T)x_n \to y$), it follows that $(I - T)x = y$. Here I is the identity operator of H.*

The following lemma is an immediate consequence of an inner product.

Lemma 2.6. *In a real Hilbert space H, there holds the inequality*

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, x+y\rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

In 2009, Kangtunyakarn and Suantai [6] introduced a new mapping called the S-mapping. Let $\{T_i\}_{i=1}^N$ be a finite family of nonexpansive mappings of C into itself. For each $n \in \mathbb{N}$, and $j = 1, 2, \ldots, N$, let $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ be such that $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$ with $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$. They defined the new mapping $S_n : C \to C$ as follows:

$$\begin{aligned}
U_{n,0} &= I, \\
U_{n,1} &= \alpha_1^{n,1} T_1 U_{n,0} + \alpha_2^{n,1} U_{n,0} + \alpha_3^{n,1} I, \\
U_{n,2} &= \alpha_1^{n,2} T_2 U_{n,1} + \alpha_2^{n,2} U_{n,1} + \alpha_3^{n,2} I, \\
U_{n,3} &= \alpha_1^{n,3} T_3 U_{n,2} + \alpha_2^{n,3} U_{n,2} + \alpha_3^{n,3} I, \\
&\vdots \\
U_{n,N-1} &= \alpha_1^{n,N-1} T_{N-1} U_{n,N-2} + \alpha_2^{n,N-1} U_{n,N-2} + \alpha_3^{n,N-1} I, \\
S_n = U_{n,N} &= \alpha_1^{n,N} T_N U_{n,N-1} + \alpha_2^{n,N} U_{n,N-1} + \alpha_3^{n,N} I.
\end{aligned}$$

The mapping S_n is called the S-mapping generated by $T_1, T_2, \ldots, T_N$ and $\alpha_1^{(n)}$, $\alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$. Nonexpansivity of each T_i ensures the nonexpansivity of S_n.

Lemma 2.7. ([6]) *Let C be a nonempty closed convex subset of a strictly convex Banach space X. Let $\{T_i\}_{i=1}^N$ be a finite family of nonexpansive mappings of C into itself with $\bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq \emptyset$ and let $\alpha_j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, where $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j \in [0,1]$, $\alpha_1^j + \alpha_2^j + \alpha_3^j = 1$, $\alpha_1^j \in (0,1)$ for all $j = 1, 2, \ldots, N-1$, $\alpha_1^N \in (0,1]$ and α_2^j, $\alpha_3^j \in [0,1)$ for all $j = 1, 2, \ldots, N$. Let S be the S-mapping generated by $T_1, T_2, \ldots, T_N$ and $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$. Then $F(S) = \bigcap_{i=1}^N F(T_i)$.*

Lemma 2.8. ([6]) *Let C be a nonempty closed convex subset of a Banach space X. Let $\{T_i\}_{i=1}^N$ be a finite family of nonexpansive mappings of C into itself and for all $n \in \mathbb{N}$ and all $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$, let $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$, $\alpha_j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j)$ where $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$ and $\alpha_1^j + \alpha_2^j + \alpha_3^j = 1$. Suppose $\alpha_i^{n,j} \to \alpha_i^j$ as $n \to \infty$ for all $i \in \{1, 3\}$ and all $j = 1, 2, 3, \ldots, N$. Let S and S_n be the S-mappings generated by $T_1, T_2, \ldots, T_N$ and $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ and $T_1, T_2, \ldots, T_N$ and $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$, respectively. Then $\lim_{n\to\infty} \|S_n x - Sx\| = 0$ for every $x \in C$.*

Lemma 2.9. ([1]) *For given $x^*, y^* \in C$, (x^*, y^*) is a solution of problem (1.2) if and only if x^* is a fixed of the mapping $G : C \to C$ defined by*

$$G(x) = P_C[P_C(x - \mu Bx) - \lambda AP_C(x - \mu Bx)], \quad \forall x \in C,$$

where $y^* = P_C(x^* - \mu Bx^*)$.

Throughout this paper, the set of fixed points of the mapping G is denoted by $GSVI(C, A, B)$.

3. Main Results

We are now in a position to state and prove our main results.

Lemma 3.1. *Let the mappings $A, B : C \to H$ be α-inverse-strongly monotone and β-inverse-strongly monotone, respectively and let $G : C \to C$ be defined by*

$$G(x) = P_C[P_C(x - \mu Bx) - \lambda AP_C(x - \mu Bx)], \quad \forall x \in C.$$

If $\lambda \in (0, 2\alpha)$ and $\mu \in (0, 2\beta)$. Then G is nonexpansive.

Proof. For any $x, y \in C$, we have

$$\begin{aligned}
\|G(x) - G(y)\| &= \|P_C[P_C(x - \mu Bx) - \lambda AP_C(x - \mu Bx)] \\
&\quad - P_C[P_C(y - \mu By) - \lambda AP_C(y - \mu By)]\|^2 \\
&\le \|P_C(x - \mu Bx) - \lambda AP_C(x - \mu Bx) \\
&\quad - \big(P_C(y - \mu By) - \lambda AP_C(y - \mu By)\big)\| \\
&= \|(I - \lambda A)P_C(I - \mu B)x - (I - \lambda A)P_C(I - \mu B)y\|. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

It is well known that if $T : C \to H$ be ι-inverse-strongly monotone, then $I - \gamma T$ is nonexpansive for all $\gamma \in (0, 2\iota)$. By our assumption, we obtain $I - \lambda A$ and $I - \mu B$ are nonexpansive. It follows that $(I - \lambda A)P_C(I - \mu B)$ is nonexpansive. Therefore, from (3.1), we obtain immediately that the mapping G is nonexpansive. $\square$

Theorem 3.2. *Let C be a nonempty closed and convex subset of a real Hilbert space H. Let F be a function from $C \times C$ to $\mathbb{R}$ satisfying (A1)-(A5) and $\varphi : C \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ be a proper lower semicontinuous and convex function. Let the mappings $A, B : C \to H$ be α-inverse-strongly monotone and β-inverse-strongly monotone, respectively. Let $\{T_i\}_{i=1}^N$ be a finite family of nonexpansive* *self-mappings of C such that $\Omega = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \bigcap GSVI(C,A,B) \bigcap MEP(F,\varphi) \neq \emptyset$. For all $j \in \{1,2,\ldots,N\}$, let $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ be such that $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ with $0 < \eta_1 \leq \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N, 1]$ with $0 < \eta_N \leq 1$ and $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^{N}, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^{N} \subset [0, \theta_2]$ with $0 \leq \theta_2 < 1$. Let S_n be the S-mappings generated by $T_1, T_2, \ldots, T_N$ and $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$. Assume that either (B1) or (B2) holds and that v is an arbitrary point in C. Let $x_1 \in C$ and $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ be the sequences defined by*

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

where $\lambda \in (0, 2\alpha)$ and $\mu \in (0, 2\beta)$. Suppose that the following conditions hold:

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ *and* $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i} - \alpha_1^{n,i}| = 0$ *for all* $i \in \{1,2,\ldots,N\}$ *and* $\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}| = 0$ *for all* $j \in \{2,3,\ldots,N\}$.

Then $\{x_n\}$ converges strongly to $\overline{x} = P_\Omega v$ and $(\overline{x}, \overline{y})$ is a solution of GSVI (1.2), where $\overline{y} = P_C(\overline{x} - \mu B \overline{x})$.

Proof. Let $x^* \in \Omega$ and $\{T_{r_n}\}$ be a sequence of mappings defined as in Lemma 2.1. It follows from Lemma 2.9 that

$$x^* = P_C[P_C(x^* - \mu B x^*) - \lambda A P_C(x^* - \mu B x^*)].$$

Put $y^* = P_C(x^* - \mu B x^*)$ and $t_n = P_C(y_n - \lambda A y_n)$, then $x^* = P_C(y^* - \lambda A y^*)$ and

$$x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n t_n.$$

By nonexpansiveness of $I - \lambda A$, $I - \mu B$, P_C and T_{r_n}, we have

$$\begin{aligned} \|t_n - x^*\|^2 &= \|P_C(I - \lambda A) y_n - P_C(I - \lambda A) y^*\|^2 \\ &\leq \|y_n - y^*\|^2 = \|P_C(I - \mu B) u_n - P_C(I - \mu B) x^*\|^2 \\ &\leq \|u_n - x^*\|^2 = \|T_{r_n} x_n - T_{r_n} x^*\|^2 \leq \|x_n - x^*\|^2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

which, implies that

$$\|x_{n+1} - x^*\| = \|a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n t_n - x^*\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq a_n\|v - x^*\| + b_n\|x_n - x^*\| + (1 - a_n - b_n)\|t_n - x^*\| \\
&\leq a_n\|v - x^*\| + b_n\|x_n - x^*\| + (1 - a_n - b_n)\|x_n - x^*\| \\
&\leq \max\{\|v - x^*\|, \|x_1 - x^*\|\}.
\end{aligned}$$

Thus, $\{x_n\}$ is bounded. Consequently, the sequences $\{u_n\}$, $\{y_n\}$, $\{t_n\}$, $\{Ay_n\}$, $\{Bu_n\}$ and $\{S_n t_n\}$ are also bounded. Also, observe that

$$\begin{aligned}
\|t_{n+1} - t_n\| &= \|P_C(y_{n+1} - \lambda Ay_{n+1}) - P_C(y_n - \lambda Ay_n)\| \\
&\leq \|y_{n+1} - y_n\| \\
&= \|P_C(u_{n+1} - \mu Bu_{n+1}) - P_C(u_n - \mu Bu_n)\| \\
&\leq \|u_{n+1} - u_n\|. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

On the other hand, from $u_n = T_{r_n}x_n \in \mathrm{dom}\varphi$ and $u_{n+1} = T_{r_{n+1}}x_{n+1} \in \mathrm{dom}\varphi$, we have

$$F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \qquad (3.4)$$

and

$$F(u_{n+1}, y) + \varphi(y) - \varphi(u_{n+1}) + \frac{1}{r_{n+1}}\langle y - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1}\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C. \quad (3.5)$$

Putting $y = u_{n+1}$ in (3.4) and $y = u_n$ in (3.5), we have

$$F(u_n, u_{n+1}) + \varphi(u_{n+1}) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle u_{n+1} - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0,$$

and

$$F(u_{n+1}, u_n) + \varphi(u_n) - \varphi(u_{n+1}) + \frac{1}{r_{n+1}}\langle u_n - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1}\rangle \geq 0.$$

From the monotonicity of F, we obtain that

$$\left\langle u_{n+1} - u_n, \frac{u_n - x_n}{r_n} - \frac{u_{n+1} - x_{n+1}}{r_{n+1}}\right\rangle \geq 0,$$

and hence

$$\left\langle u_{n+1} - u_n, u_n - u_{n+1} + u_{n+1} - x_n - \frac{r_n}{r_{n+1}}(u_{n+1} - x_{n+1})\right\rangle \geq 0.$$

Then, we have

$$\|u_{n+1} - u_n\|^2 \leq \left\langle u_{n+1} - u_n, x_{n+1} - x_n + (1 - \frac{r_n}{r_{n+1}})(u_{n+1} - x_{n+1})\right\rangle$$

$$\leq \|u_{n+1} - u_n\| \left\{ \|x_{n+1} - x_n\| + |1 - \frac{r_n}{r_{n+1}}| \|u_{n+1} - x_{n+1}\| \right\},$$

and hence

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{r_{n+1}} |r_{n+1} - r_n| \|u_{n+1} - x_{n+1}\|. \tag{3.6}$$

It follows from (3.3) and (3.6) that

$$\|t_{n+1} - t_n\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{r_{n+1}} |r_{n+1} - r_n| \|u_{n+1} - x_{n+1}\|. \tag{3.7}$$

Let $x_{n+1} = b_n x_n + (1 - b_n) z_n$. Then, we obtain

$$\begin{aligned} z_{n+1} - z_n &= \frac{x_{n+2} - b_{n+1} x_{n+1}}{1 - b_{n+1}} - \frac{x_{n+1} - b_n x_n}{1 - b_n} \\ &= \frac{a_{n+1} v + (1 - a_{n+1} - b_{n+1}) S_{n+1} t_{n+1}}{1 - b_{n+1}} - \frac{a_n v + (1 - a_n - b_n) S_n t_n}{1 - b_n} \\ &= \frac{a_{n+1}}{1 - b_{n+1}} (v - S_{n+1} t_{n+1}) + \frac{a_n}{1 - b_n} (S_n t_n - v) + S_{n+1} t_{n+1} - S_n t_n. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Next, we estimate $\|S_{n+1} t_{n+1} - S_n t_n\|$.

For each $k \in \{2, 3, \dots, N\}$, we have

$$\begin{aligned} &\|U_{n+1,k} t_n - U_{n,k} t_n\| = \|\alpha_1^{n+1,k} T_k U_{n+1,k-1} t_n + \alpha_2^{n+1,k} U_{n+1,k-1} t_n + \alpha_3^{n+1,k} t_n \\ &\quad - \alpha_1^{n,k} T_k U_{n,k-1} t_n - \alpha_2^{n,k} U_{n,k-1} t_n - \alpha_3^{n,k} t_n\| \\ &= \|\alpha_1^{n+1,k} (T_k U_{n+1,k-1} t_n - T_k U_{n,k-1} t_n) \\ &\quad + (\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}) T_k U_{n,k-1} t_n + (\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}) t_n \\ &\quad + \alpha_2^{n+1,k} (U_{n+1,k-1} t_n - U_{n,k-1} t_n) + (\alpha_2^{n+1,k} - \alpha_2^{n,k}) U_{n,k-1} t_n\| \\ &\leq \alpha_1^{n+1,k} \|U_{n+1,k-1} t_n - U_{n,k-1} t_n\| + |\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}| \|T_k U_{n,k-1} t_n\| \\ &\quad + |\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}| \|t_n\| + \alpha_2^{n+1,k} \|U_{n+1,k-1} t_n - U_{n,k-1} t_n\| \\ &\quad + |\alpha_2^{n+1,k} - \alpha_2^{n,k}| \|U_{n,k-1} t_n\| \\ &= (\alpha_1^{n+1,k} + \alpha_2^{n+1,k}) \|U_{n+1,k-1} t_n - U_{n,k-1} t_n\| \\ &\quad + |\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}| \|T_k U_{n,k-1} t_n\| + |\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}| \|t_n\| \\ &\quad + |\alpha_2^{n+1,k} - \alpha_2^{n,k}| \|U_{n,k-1} t_n\| \\ &\leq \|U_{n+1,k-1} t_n - U_{n,k-1} t_n\| + |\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}| \|T_k U_{n,k-1} t_n\| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ |\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}|\|t_n\| + |(\alpha_1^{n,k} - \alpha_1^{n+1,k}) + (\alpha_3^{n,k} - \alpha_3^{n+1,k})|\|U_{n,k-1}t_n\| \\
\leq\ & \|U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n\| + |\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}|\|T_k U_{n,k-1}t_n\| \\
&+ |\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}|\|t_n\| + |\alpha_1^{n,k} - \alpha_1^{n+1,k}|\|U_{n,k-1}t_n\| \\
&+ |\alpha_3^{n,k} - \alpha_3^{n+1,k}|\|U_{n,k-1}t_n\| \\
=\ & \|U_{n+1,k-1}t_n - U_{n,k-1}t_n\| + |\alpha_1^{n+1,k} - \alpha_1^{n,k}|(\|T_k U_{n,k-1}t_n\| + \|U_{n,k-1}t_n\|) \\
&+ |\alpha_3^{n+1,k} - \alpha_3^{n,k}|(\|t_n\| + \|U_{n,k-1}t_n\|). \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

It follow from (3.9) that

$$
\begin{aligned}
&\|S_{n+1}t_n - S_n t_n\| = \|U_{n+1,N}t_n - U_{n,N}t_n\| \\
&\leq \|U_{n+1,1}t_n - U_{n,1}t_n\| + \sum_{j=2}^{N} |\alpha_1^{n+1,j} - \alpha_1^{n,j}|(\|T_j U_{n,j-1}t_n\| + \|U_{n,j-1}t_n\|) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{N} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}|(\|t_n\| + \|U_{n,j-1}t_n\|) \\
&= |\alpha_1^{n+1,1} - \alpha_1^{n,1}|\|T_1 t_n - t_n\| \\
&\quad + \sum_{j=2}^{N} |\alpha_1^{n+1,j} - \alpha_1^{n,j}|(\|T_j U_{n,j-1}t_n\| + \|U_{n,j-1}t_n\|) \\
&\quad + \sum_{j=2}^{N} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}|(\|t_n\| + \|U_{n,j-1}t_n\|).
\end{aligned}
$$

This together with the condition $(C4)$, we obtain

$$\lim_{n\to\infty} \|S_{n+1}t_n - S_n t_n\| = 0. \qquad (3.10)$$

It follows from (3.7) that

$$
\begin{aligned}
\|S_{n+1}t_{n+1} - S_n t_n\| &\leq \|t_{n+1} - t_n\| + \|S_{n+1}t_n - S_n t_n\| \\
&\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{r_{n+1}}|r_{n+1} - r_n|\|u_{n+1} - x_{n+1}\| \\
&\quad + \|S_{n+1}t_n - S_n t_n\|. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

By (3.8) and (3.11), we have

$$\|z_{n+1} - z_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \leq \frac{a_{n+1}}{1 - b_{n+1}}\|v - S_{n+1}t_{n+1}\| + \frac{a_n}{1 - b_n}\|S_n t_n - v\|$$

$$
\begin{aligned}
&+\|S_{n+1}t_{n+1}-S_nt_n\|-\|x_{n+1}-x_n\|\\
\le\ &\frac{a_{n+1}}{1-b_{n+1}}\|v-S_{n+1}t_{n+1}\|+\frac{a_n}{1-b_n}\|S_nt_n-v\|\\
&+\frac{1}{r_{n+1}}|r_{n+1}-r_n|\|u_{n+1}-x_{n+1}\|\\
&+\|S_{n+1}t_n-S_nt_n\|.
\end{aligned}
$$

This together with (C1)-(C3) and (3.10), we obtain that

$$\limsup_{n\to\infty}\|z_{n+1}-z_n\|-\|x_{n+1}-x_n\|\le 0.$$

Hence, by Lemma 2.4, we get $\|x_n-z_n\|\to 0$ as $n\to\infty$. Consequently,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=\lim_{n\to\infty}(1-b_n)\|z_n-x_n\|=0. \tag{3.12}$$

From (C3), (3.3) and (3.6), we also have $\|u_{n+1}-u_n\|\to 0$, $\|t_{n+1}-t_n\|\to 0$ and $\|y_{n+1}-y_n\|\to 0$, as $n\to\infty$.

Since

$$x_{n+1}-x_n=a_n(v-x_n)+(1-a_n-b_n)(S_nt_n-x_n),$$

therefore

$$\|S_nt_n-x_n\|\to 0 \quad \text{as} \quad n\to\infty. \tag{3.13}$$

Next, we prove that $\lim_{n\to\infty}\|x_n-u_n\|=0$. From Lemma 2.1(3), we have

$$
\begin{aligned}
\|u_n-x^*\|^2&=\|T_{r_n}x_n-T_{r_n}x^*\|^2\le\langle T_{r_n}x_n-T_{r_n}x^*,x_n-x^*\rangle\\
&=\langle u_n-x^*,x_n-x^*\rangle=\frac{1}{2}\{\|u_n-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2-\|x_n-u_n\|^2\}.
\end{aligned}
$$

Hence

$$\|u_n-x^*\|^2\le\|x_n-x^*\|^2-\|x_n-u_n\|^2. \tag{3.14}$$

From Lemma 2.3, (3.2) and (3.14), we have

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2&\le a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)\|t_n-x^*\|^2\\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)\|u_n-x^*\|^2\\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)[\|x_n-x^*\|^2-\|x_n-u_n\|^2]\\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2-(1-a_n-b_n)\|x_n-u_n\|^2.
\end{aligned}
$$

It follows that

$$(1-a_n-b_n)\|x_n-u_n\|^2 \leq a_n\|v-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2-\|x_{n+1}-x^*\|^2$$
$$\leq a_n\|v-x^*\|^2+(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_{n+1}-x_n\|.$$

From the conditions (C1), (C2) and (3.12), we obtain

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-u_n\|=0. \tag{3.15}$$

Since

$$\|S_nt_n-u_n\| \leq \|S_nt_n-x_n\|+\|x_n-u_n\|,$$

it follows from (3.13) and (3.15) that

$$\lim_{n\to\infty}\|S_nt_n-u_n\|=0. \tag{3.16}$$

Next, we show that $\|Ay_n-Ay^*\| \to 0$ and $\|Bu_n-Bx^*\| \to 0$ as $n \to \infty$. From (3.2), we have

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2 &\leq a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)\|t_n-x^*\|^2\\
&= a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\|P_C(y_n-\lambda Ay_n)-P_C(y^*-\lambda Ay^*)\|^2\\
&\leq a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\|(y_n-\lambda Ay_n)-(y^*-\lambda Ay^*)\|^2\\
&\leq a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\big[\|y_n-y^*\|^2+\lambda(\lambda-2\alpha)\|Ay_n-Ay^*\|^2\big]\\
&\leq a_n\|v-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\lambda(\lambda-2\alpha)\|Ay_n-Ay^*\|^2,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2 &\leq a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)\|t_n-x^*\|^2\\
&\leq a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)\|y_n-y^*\|^2\\
&\leq a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\|(u_n-\mu Bu_n)-(x^*-\mu Bx^*)\|^2\\
&\leq a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\big[\|u_n-x^*\|^2+\mu(\mu-2\beta)\|Bu_n-Bx^*\|^2\big],
\end{aligned}$$

$$\leq a_n\|v - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 \\ + (1 - a_n - b_n)\mu(\mu - 2\beta)\|Bu_n - Bx^*\|^2.$$

Therefore, we have

$$- (1 - a_n - b_n)\lambda(\lambda - 2\alpha)\|Ay_n - Ay^*\|^2 \\ \leq a_n\|v - x^*\|^2 + (\|x_n - x^*\| + \|x_{n+1} - x^*\|)\|x_{n+1} - x_n\|,$$

and

$$- (1 - a_n - b_n)\mu(\mu - 2\beta)\|Bu_n - Bx^*\|^2 \\ \leq a_n\|v - x^*\|^2 + (\|x_n - x^*\| + \|x_{n+1} - x^*\|)\|x_{n+1} - x_n\|.$$

This together with (3.12), (C1) and (C2), we obtain

$$\|Ay_n - Ay^*\| \to 0 \quad \text{and} \quad \|Bu_n - Bx^*\| \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty. \tag{3.17}$$

Next, we prove that $\|S_n t_n - t_n\| \to 0$ as $n \to \infty$. From (2.1) and nonexpansiveness of $I - \mu B$, we get

$$\begin{aligned}
\|y_n - y^*\|^2 &= \|P_C(u_n - \mu Bu_n) - P_C(x^* - \mu Bx^*)\|^2 \\
&\leq \langle (u_n - \mu Bu_n) - (x^* - \mu Bx^*), y_n - y^*\rangle \\
&= \frac{1}{2}\big[\|(u_n - \mu Bu_n) - (x^* - \mu Bx^*)\|^2 + \|y_n - y^*\|^2 \\
&\quad - \|(u_n - \mu Bu_n) - (x^* - \mu Bx^*) - (y_n - y^*)\|^2\big] \\
&\leq \frac{1}{2}\big[\|u_n - x^*\|^2 + \|y_n - y^*\|^2 - \|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\mu\langle (u_n - x^*) - (y_n - y^*), Bu_n - Bx^*\rangle - \mu^2\|Bu_n - Bx^*\|^2\big].
\end{aligned}$$

By (3.2), we obtain

$$\begin{aligned}
\|y_n - y^*\|^2 &\leq \|u_n - x^*\|^2 - \|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\mu\langle (u_n - x^*) - (y_n - y^*), Bu_n - Bx^*\rangle - \mu^2\|Bu_n - Bx^*\|^2 \\
&\leq \|x_n - x^*\|^2 - \|(u_n - x^*) - (y_n - y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\mu\langle (u_n - x^*) - (y_n - y^*), Bu_n - Bx^*\rangle - \mu^2\|Bu_n - Bx^*\|^2.
\end{aligned}$$

Hence,

$$\|x_{n+1} - x^*\|^2 \leq a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|y_n - y^*\|^2$$

$$
\begin{aligned}
&\le a_n\|v-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2 + (1-a_n-b_n)\big[\|x_n-x^*\|^2 \\
&\quad - \|(u_n-x^*)-(y_n-y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\mu\langle (u_n-x^*)-(y_n-y^*), Bu_n - Bx^*\rangle - \mu^2\|Bu_n-Bx^*\|^2\big] \\
&\le a_n\|v-x^*\|^2 + \|x_n-x^*\|^2 \\
&\quad - (1-a_n-b_n)\|(u_n-x^*)-(y_n-y^*)\|^2 \\
&\quad + (1-a_n-b_n)2\mu\|(u_n-x^*)-(y_n-y^*)\|\|Bu_n-Bx^*\|,
\end{aligned}
$$

which implies that

$$
\begin{aligned}
&(1-a_n-b_n)\|(u_n-x^*)-(y_n-y^*)\|^2 \\
&\le a_n\|v-x^*\|^2 + (1-a_n-b_n)2\mu\|(u_n-x^*)-(y_n-y^*)\|\|Bu_n-Bx^*\| \\
&\quad + (\|x_n-x^*\| + \|x_{n+1}-x^*\|)\|x_{n+1}-x_n\|.
\end{aligned}
$$

This together with (C1), (3.12) and (3.17), we obtain

$$
\|(u_n-x^*)-(y_n-y^*)\| \to 0 \quad \text{as} \quad n\to\infty. \tag{3.18}
$$

From Lemma 2.6 and (2.2), it follows that

$$
\begin{aligned}
&\|(y_n-t_n)+(x^*-y^*)\|^2 = \|(y_n-\lambda Ay_n)-(y^*-\lambda Ay^*) \\
&\quad - [P_C(y_n-\lambda Ay_n) - P_C(y^*-\lambda Ay^*)] + \lambda(Ay_n-Ay^*)\|^2 \\
&\le \|(y_n-\lambda Ay_n)-(y^*-\lambda Ay^*) - [P_C(y_n-\lambda Ay_n)-P_C(y^*-\lambda Ay^*)]\|^2 \\
&\quad + 2\lambda\langle Ay_n - Ay^*, (y_n-t_n)+(x^*-y^*)\rangle \\
&\le \|(y_n-\lambda Ay_n)-(y^*-\lambda Ay^*)\|^2 - \|P_C(y_n-\lambda Ay_n)-P_C(y^*-\lambda Ay^*)\|^2 \\
&\quad + 2\lambda\|Ay_n-Ay^*\|\|(y_n-t_n)+(x^*-y^*)\| \\
&\le \|(y_n-\lambda Ay_n)-(y^*-\lambda Ay^*)\|^2 - \|S_nP_C(y_n-\lambda Ay_n)-S_nP_C(y^*-\lambda Ay^*)\|^2 \\
&\quad + 2\lambda\|Ay_n-Ay^*\|\|(y_n-t_n)+(x^*-y^*)\| \\
&\le \|(y_n-\lambda Ay_n)-(y^*-\lambda Ay^*) \\
&\quad - (S_nt_n - x^*)\|\big[\|(y_n-\lambda Ay_n)-(y^*-\lambda Ay^*)\| + \|S_nt_n-x^*\|\big] \\
&\quad + 2\lambda\|Ay_n-Ay^*\|\|(y_n-t_n)+(x^*-y^*)\| \\
&= \|u_n - S_nt_n + x^* - y^* - (u_n-y_n) \\
&\quad - \lambda(Ay_n-Ay^*)\|\big[\|(y_n-\lambda Ay_n)-(y^*-\lambda Ay^*)\| + \|S_nt_n-x^*\|\big] \\
&\quad + 2\lambda\|Ay_n-Ay^*\|\|(y_n-t_n)+(x^*-y^*)\|.
\end{aligned}
$$

This together with (3.16), (3.18) and (3.17), we obtain $\|(y_n-t_n)+(x^*-y^*)\| \to 0$ as $n\to\infty$. This together with (3.13), (3.15) and (3.18), we obtain that

$$
\|S_nt_n - t_n\| \le \|S_nt_n - x_n\| + \|x_n-u_n\| + \|(u_n-y_n)-(x^*-y^*)\|
$$

$$+\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty. \tag{3.19}$$

Next, we show that

$$\limsup_{n\to\infty} \langle v - \overline{x}, x_n - \overline{x} \rangle \leq 0,$$

where $\overline{x} = P_\Omega v$.

Indeed, since $\{t_n\}$ and $\{S_n t_n\}$ are two bounded sequences in C, we can choose a subsequence $\{t_{n_i}\}$ of $\{t_n\}$ such that $t_{n_i} \rightharpoonup z \in C$ and

$$\limsup_{n\to\infty} \langle v - \overline{x}, S_n t_n - \overline{x} \rangle = \lim_{i\to\infty} \langle v - \overline{x}, S_{n_i} t_{n_i} - \overline{x} \rangle.$$

Since $\lim_{n\to\infty} \|S_n t_n - t_n\| = 0$, we obtain that $S_{n_i} t_{n_i} \rightharpoonup z$ as $i \to \infty$.

Next, we show that $z \in \Omega$.

(a) We first show $z \in \bigcap_{i=1}^N F(T_i)$.

We can assume that $\alpha_1^{n,j} \to \alpha_1^j \in (0,1)$ and $\alpha_1^{n,N} \to \alpha_1^N \in (0,1]$ as $n \to \infty$ for all $j \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$ and $\alpha_3^{n,j} \to \alpha_3^j \in [0,1)$ as $n \to \infty$ for $j = 1, 2, \ldots, N$. Let S be the S-mappings generated by $T_1, T_2, \ldots, T_N$ and $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ where $\alpha_j = (\alpha_1^j, \alpha_2^j, \alpha_3^j)$, for $j = 1, 2, \ldots, N$. From Lemma 2.8, we have $\|S_n t_n - S t_n\| \to 0$ as $n \to \infty$. Since

$$\|St_n - t_n\| \leq \|St_n - S_n t_n\| + \|S_n t_n - t_n\|,$$

it follows by (3.19) that $\|St_n - t_n\| \to 0$ as $n \to \infty$.

Since $t_{n_i} \rightharpoonup z$ and $\|St_n - t_n\| \to 0$, we obtain by Lemma 2.5 and Lemma 2.7 that $z \in F(S) = \bigcap_{i=1}^N F(T_i)$.

(b) Now, we show that $z \in GSVI(C, A, B)$.

Since

$$\|t_n - x_n\| \leq \|S_n t_n - t_n\| + \|S_n t_n - x_n\|,$$

it follows from (3.19) and (3.13) that $\|t_n - x_n\| \to 0$ as $n \to \infty$. Furthermore, by Lemma 3.1, we have $G : C \to C$ is nonexpansive. Then, we have

$$\begin{aligned}
\|t_n - G(t_n)\| &= \|P_C(y_n - \lambda A y_n) - G(t_n)\| \\
&= \|P_C[P(u_n - \mu B u_n) - \lambda A P(u_n - \mu B u_n)] - G(t_n)\| \\
&= \|G(u_n) - G(t_n)\| \leq \|u_n - t_n\| \\
&\leq \|u_n - x_n\| + \|x_n - t_n\|,
\end{aligned}$$

which implies $\|t_n - G(t_n)\| \to 0$ as $n \to \infty$. Again by Lemma 2.5, we have $z \in GSVI(C, A, B)$.

(c) We show that $z \in MEP(F, \varphi)$. Since $t_{n_i} \rightharpoonup z$ and $\|x_n - t_n\| \to 0$, we obtain that $x_{n_i} \rightharpoonup z$. From $\|u_n - x_n\| \to 0$, we also obtain that $u_{n_i} \rightharpoonup z$. By using the same argument as that in the proof of [10, Theorem 3.1, pp. 1825], we can show that $z \in MEP(F, \varphi)$. Therefore there holds $z \in \Omega$.

On the other hand, it follows from (2.3) and $S_{n_i} t_{n_i} \rightharpoonup z$ as $i \to \infty$ that

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\langle v - \overline{x}, x_n - \overline{x}\rangle &= \limsup_{n\to\infty}\langle v - \overline{x}, S_n t_n - \overline{x}\rangle = \lim_{i\to\infty}\langle v - \overline{x}, S_{n_i} t_{n_i} - \overline{x}\rangle \\ &= \langle v - \overline{x}, z - \overline{x}\rangle \le 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Hence, we have

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - \overline{x}\|^2 &= \langle a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n t_n - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle \\ &= a_n\langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle + b_n\langle x_n - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle \\ &\quad + (1 - a_n - b_n)\langle S_n t_n - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\le a_n\langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle + \frac{1}{2} b_n(\|x_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}(1 - a_n - b_n)(\|t_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2) \\ &\le a_n\langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle + \frac{1}{2} b_n(\|x_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}(1 - a_n - b_n)(\|x_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2) \\ &= a_n\langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle + \frac{1}{2}(1 - a_n)(\|x_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2),\end{aligned}$$

which implies that

$$\|x_{n+1} - \overline{x}\|^2 \le (1 - a_n)\|x_n - \overline{x}\|^2 + 2a_n\langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle.$$

It follows from Lemma 2.2 and (3.20) that $\{x_n\}$ converges strongly to $\overline{x}$. This completes the proof. ☐

Let $N = 1$, $T_1 = S$, $\alpha_2^{n,1} = \alpha_3^{n,1} = 0$, $\varphi = 0$, $F(x, y) = 0$ for all $x, y \in C$ and $r_n = 1$ for all $n \in \mathbb{N}$ in Theorem 3.2, then $u_n = P_C x_n = x_n$. By Theorem 3.2, we obtain the following result.

Corollary 3.3. [1, Theorem 3.1] *Let C be a nonempty closed and convex subset of a real Hilbert space H. Let the mappings $A, B : C \to H$ be α-inverse-strongly monotone and β-inverse-strongly monotone, respectively. Let S be a nonexpansive self-mapping of C such that $\Omega = F(S) \bigcap GSVI(C, A, B) \neq \emptyset$.*

Assume that v is an arbitrary point in C. Let $x_1 \in C$ and $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be the sequences generated by

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \mu Bx_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n)SP_C(y_n - \lambda Ay_n), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

If $\lambda \in (0, 2\alpha)$, $\mu \in (0, 2\beta)$ and the sequences $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ are as in Theorem 3.2, then $\{x_n\}$ converges strongly to $\overline{x} = P_\Omega v$ and $(\overline{x}, \overline{y})$ is a solution of GSVI (1.2), *where $\overline{y} = P_C(\overline{x} - \mu B\overline{x})$.*

4. Applications

In this section, we apply Theorem 3.2 with three strong convergence theorems in a real Hilbert space.

We recall that a mapping $T : C \to C$ is called strictly pseudocontractive if there exists some k with $0 \leq k < 1$ such that

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + k\|(I - T)x - (I - T)y\|^2, \quad \forall x, y \in C.$$

If $k = 0$, then T is nonexpansive. Put $A = I - T$, where $T : C \to C$ is a strictly pseudocontractive mapping with k. Then we have, for all $x, y \in C$,

$$\|(I - A)x - (I - A)y\|^2 \leq \|x - y\|^2 + k\|Ax - Ay\|^2.$$

On the other hand, we have

$$\|(I - T)x - (I - T)y\|^2 = \|x - y\|^2 - 2\langle x - y, Ax - Ay\rangle + \|Ax - Ay\|^2.$$

Hence we have

$$\langle x - y, Ax - Ay\rangle \geq \frac{1 - k}{2}\|Ax - Ay\|^2.$$

Then, A is $\frac{1-k}{2}$-inverse-strongly monotone.

Theorem 4.1. *Let C be a nonempty closed and convex subset of a real Hilbert space H. Let F be a function from $C \times C$ to $\mathbb{R}$ satisfying (A1)-(A5) and $\varphi : C \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ be a proper lower semicontinuous and convex function. Let the mappings $T, V : C \to C$ be strictly pseudocontractive with constants k, l, respectively. Let $\{T_i\}_{i=1}^N$ be a finite family of nonexpansive self-mappings of C such that $\Omega = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \bigcap GSVI(C, I - T, I - V) \bigcap MEP(F, \varphi) \neq \emptyset$. For all $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$, let $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ be such that $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in$*

$[0,1]$, $\alpha_1^{n,j}+\alpha_2^{n,j}+\alpha_3^{n,j}=1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1}\subset[\eta_1,\theta_1]$ *with* $0<\eta_1\le\theta_1<1$, $\{\alpha_1^{n,N}\}\subset[\eta_N,1]$ *with* $0<\eta_N\le 1$ *and* $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^N,\{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^N\subset[0,\theta_2]$ *with* $0\le\theta_2<1$. *Let* S_n *be the* S*-mappings generated by* $T_1,T_2,\ldots,T_N$ *and* $\alpha_1^{(n)},\alpha_2^{(n)},\ldots,\alpha_N^{(n)}$. *Assume that either (B1) or (B2) holds and that* v *is an arbitrary point in* C. *Let* $x_1\in C$ *and* $\{x_n\},\{u_n\},\{y_n\}$ *be the sequences defined by*

$$\begin{cases} F(u_n,y)+\varphi(y)-\varphi(u_n)+\frac{1}{r_n}\langle y-u_n,u_n-x_n\rangle\ge 0, & \forall y\in C,\\ y_n=(1-\mu)u_n+\mu Vu_n, \\ x_{n+1}=a_nv+b_nx_n+(1-a_n-b_n)S_n\big((1-\lambda)y_n+\lambda Ty_n\big), & n\ge 1,\end{cases}$$

where $\lambda\in(0,1-k)$ *and* $\mu\in(0,1-l)$. *Suppose that the following conditions hold:*

(C1) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ *and* $\sum_{n=1}^\infty a_n=\infty$;
(C2) $0<\liminf_{n\to\infty}b_n\le\limsup_{n\to\infty}b_n<1$;
(C3) $\liminf_{n\to\infty}r_n>0$ *and* $\lim_{n\to\infty}|r_{n+1}-r_n|=0$;
(C4) $\lim_{n\to\infty}|\alpha_1^{n+1,i}-\alpha_1^{n,i}|=0$ *for all* $i\in\{1,2,\ldots,N\}$ *and* $\lim_{n\to\infty}|\alpha_3^{n+1,j}-\alpha_3^{n,j}|=0$ *for all* $j\in\{2,3,\ldots,N\}$.

Then $\{x_n\}$ *converges strongly to* $\overline{x}=P_\Omega v$ *and* $(\overline{x},\overline{y})$ *is a solution of problem* (1.2), *where* $\overline{y}=(1-\mu)\overline{x}+\mu V\overline{x}$.

Proof. Put $A=I-T$ and $B=I-V$. Then A is $\frac{1-k}{2}$-inverse-strongly monotone and B is $\frac{1-l}{2}$-inverse-strongly monotone, respectively. We have

$$P_C(u_n-\mu Bu_n)=(1-\mu)u_n+\mu Vu_n$$

and

$$P_C(y_n-\lambda Ay_n)=(1-\lambda)y_n+\lambda Ty_n.$$

Therefore, the conclusion follows immediately from Theorem 3.2. □

Theorem 4.2. *Let* H *be a real Hilbert space. Let* F *be a function from* $H\times H$ *to* $\mathbb{R}$ *satisfying (A1)-(A5) and* $\varphi:H\to\mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ *be a proper lower semicontinuous and convex function. Let* $A:H\to H$ *be* α*-inverse-strongly monotone mapping. Let* $\{T_i\}_{i=1}^N$ *be a finite family of nonexpansive self-mappings of* H *such that* $\Omega=\bigcap_{i=1}^N F(T_i)\bigcap A^{-1}0\bigcap MEP(F,\varphi)\ne\emptyset$. *For all* $j\in\{1,2,\ldots,N\}$, *let* $\alpha_j^{(n)}=(\alpha_1^{n,j},\alpha_2^{n,j},\alpha_3^{n,j})$ *be such that* $\alpha_1^{n,j},\alpha_2^{n,j},\alpha_3^{n,j}\in[0,1]$, $\alpha_1^{n,j}+\alpha_2^{n,j}+\alpha_3^{n,j}=1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1}\subset[\eta_1,\theta_1]$ *with* $0<\eta_1\le\theta_1<1$, $\{\alpha_1^{n,N}\}\subset[\eta_N,1]$ *with* $0<\eta_N\le1$ *and* $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^N,\{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^N\subset[0,\theta_2]$ *with* $0\le\theta_2<1$. *Let* S_n *be the* S*-mappings generated by* $T_1,T_2,\ldots,T_N$ *and* $\alpha_1^{(n)},\alpha_2^{(n)},\ldots,\alpha_N^{(n)}$.

Assume that either (B1) or (B2) holds and that v is an arbitrary point in H. Let $x_1 \in H$ and $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ be the sequences defined by

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in H, \\ y_n = u_n - \lambda A u_n, \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

where $\lambda \in (0, 2\alpha)$. Suppose that the following conditions hold:

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ *and* $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i} - \alpha_1^{n,i}| = 0$ *for all* $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ *and* $\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}| = 0$ *for all* $j \in \{2, 3, \dots, N\}$.

Then $\{x_n\}$ converges strongly to $\overline{x} = P_\Omega v$.

Proof. Put $\lambda = \mu$, $C = H$, $B = A$ and $P_H = I$ in Theorem 3.2. By using the same argument as that in the proof of [1, Theorem 4.1, pp. 388-389], we can show that $A^{-1}0 = GSVI(C, A, B) = VI(A, H)$ and

$$\text{problem (1.2)} \Leftrightarrow \text{problem (1.3)} \Leftrightarrow VI(A, H).$$

Thus, by Theorem 3.2 we obtain the desired result. □

Recall that the resolvent of the maximal monotone mapping $B : H \to 2^H$ is defined by $J_r^B = (I + rB)^{-1}$ for all $r > 0$, it is known that $F(J_r^B) = B^{-1}0$ and J_r^B is nonexpansive.

Theorem 4.3. *Let H be a real Hilbert space. Let F be a function from $H \times H$ to $\mathbb{R}$ satisfying (A1)-(A5) and $\varphi : H \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ be a proper lower semicontinuous and convex function. Let $A : H \to H$ be α-inverse-strongly monotone mapping and let $B_1, B_2, \dots, B_N : H \to 2^H$ be maximal monotone mappings such that $\Omega = \bigcap_{i=1}^N B_i^{-1}0 \bigcap A^{-1}0 \bigcap MEP(F, \varphi) \neq \emptyset$. For all $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ and $r_i > 0$, let $J_{r_i}^{B_i}$ be the resolvents of B_i. For all $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, let $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ be such that $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0, 1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ with $0 < \eta_1 \leq \theta_1 < 1$, $\{\alpha_1^{n,N}\} \subset [\eta_N, 1]$ with $0 < \eta_N \leq 1$ and $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^N, \{\alpha_3^{n,j}\}_{j=1}^N \subset [0, \theta_2]$ with $0 \leq \theta_2 < 1$. Let S_n be the S-mappings generated by $J_{r_1}^{B_1}, J_{r_2}^{B_2}, \dots, J_{r_N}^{B_N}$ and $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_N^{(n)}$. Assume that either (B1) or (B2) holds and that v is an arbitrary point in H. Let $x_1 \in H$ and $\{x_n\}, \{u_n\}, \{y_n\}$ be the sequences defined* *by*

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in H, \\ y_n = u_n - \lambda A u_n, \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

where $\lambda \in (0, 2\alpha)$. *Suppose that the following conditions hold:*

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ *and* $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i} - \alpha_1^{n,i}| = 0$ *for all* $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ *and* $\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}| = 0$ *for all* $j \in \{2, 3, \ldots, N\}$.

Then $\{x_n\}$ *converges strongly to* $\overline{x} = P_\Omega v$.

Proof. For all $i = 1, 2, \ldots, N$ and $r_i > 0$, we have $F(J_{r_i}^{B_i}) = B_i^{-1}0$. Putting $P_H = I$ and $T_i = J_{r_i}^{B_i}$ for all $i = 1, 2, \ldots, N$, by Theorem 4.2, we obtain the desired result. □

Acknowledgment

The author would like to thank Professor Dr. Suthep Suantai and the reviewer for careful reading, valuable comment and suggestions on this paper. The author also thank the Commission on Higher Education, the Thailand Research Fund, Thaksin university, the Centre of Excellence in Mathematics for their financial support.

References

[1] L. C. Ceng, C. Y. Wang, J. C. Yao, Strong convergence theorems by a relaxed extragradient method for a general system of variational inequalities, *Math. Meth. Oper. Res.*, **67** (2008), 375-390.

[2] L. C. Ceng, M. M. Wong, A. Latif, Generalized extragradient iterative method for systems of variational inequalities, *Journal of Inequalities and Applications*, **2012** (2012), Doi:10.1186/1029-242X-2012-88.

[3] L. C. Ceng, J. C. Yao, A hybrid iterative scheme for mixed equilibrium problems and fixed point problems, *J. Comput. App. Math.*, **214** (2008), 186-201.

[4] Y. J. Cho, I. K. Argyros, N. Petrot, Approximation methods for common solutions of generalized equilibrium, system of nonlinear variational inequalities and fixed point problems, *Computer and Mathematics with Applications*, **60** (2010), 2292-2301.

[5] K. Goebel, W. A. Kirk, *Topics on Metric Fixed-Point Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[6] A. Kangtunyakarn, S. Suantai, Hybrid iterative scheme for generalized equilibrium problems and fixed point problems of finite family of nonexpansive mappings, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **3** (2009), 296-309.

[7] K. R. Kazmi, S. H. Rizvi, A hybrid extragradient method for approximating the common solutions of a variational inequality, a system of variational inequalities, a mixed equilibrium problem and a fixed point problem, *Applied Mathematics and Computation*, **218** (2012), 5439-5452.

[8] P. Kumam, P. Katchang, A system of mixed equilibrium problems, a general system of variational inequality problems for relaxed cocoercive, and fixed point problems for nonexpansive semigroup and strictly pseudocontractive mappings, *Journal of Applied Mathematics*, **2012** (2012), Doi:10.1155/2012/414831.

[9] M. O. Osilike, D. I. Igbokwe, Weak and strong convergence theorems for fixed points of pseudocontractions and solutions of monotone type operator equations, *Comput. Math. Appl.*, **40** (2000), 559-239.

[10] J. W. Peng, J. C. Yao, Strong convergence theorems of iterative schemes based on extragradient method for mixed equilibrium problems and fixed point problems, *Mathematical and Computer Modelling*, **49** (2009), 1816-1828.

[11] H. Piri, A general iterative method for finding common solutions of system of equilibrium problems, system of variational inequalities and fixed point problems, *Mathematical and Computer Modelling*, **55** (2012), 1622-1638.

[12] X. Qin, M. Shang, Y. Su, Strong convergence of a general iterative algorithm for equilibrium problems and variational inequality problems, *Mathematical and Computer Modelling*, **48** (2008), 1033-1046.

[13] Y. Shehu, Iterative method for fixed point problem, variational inequality and generalized mixed equilibrium problems with applications, *J. Glob. Optim.*, **52** (2012), 57-77.

[14] T. Suzuki, Strong convergence of Krasnoselskii and Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals, *J. Math. Anal. Appl.*, **305** (2005), 227-239.

[15] R. U. Verma, On a new system of nonlinear variational inequalities and associated iterative algorithms, *Math. Sci. Res Hot-Line*, **3** (1999), 65-68.

[16] R. Wangkeeree, U. Kamraksa, An iterative approximation method for solving a general system of variational inequality problems and mixed equilibrium problems, *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **3** (2009), 615-630.

[17] R. Wangkeeree, P. Preechasilp, A new iterative scheme for solving the equilibrium problems, variational inequality problems, and fixed point problems in Hilbert spaces, *Journal of Applied Mathematics*, **2012** (2012), Doi:10.1155/2012/154968.

[18] H. K. Xu, Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, **298** (2004), 279-291.

[19] Y. Yao, Y. J. Cho, Chen, An iterative algorithm for solving fixed point problems, variational inequalities problems and mixed equilibrium problems, *Nonlinear Analysis*, **71** (2009), 3363-3373.

[20] Y. Yao, Y. C. Liou, S. M. Kang, Approach to common elements of variational inequality problems and fixed point problems via a relaxed extragradient method, *Computers and Mathematics with Applications*, **59** (2010), 3472-3480.

[21] Y. Yao, Y. C. Liou, M. M. Wong, J. C. Yao, Strong convergence of a hybrid method for monotone variational inequalities and fixed point problems, *Fixed Point Theory and Applications*, **2011** (2011), Doi: 101186/1687-1812-2011-53.

2. รายงานความก้าวหน้าโครงการวิจัย งวดที่ 1

แบบ TSURD-2

มหาวิทยาลัยทักษิณ

รายงานความก้าวหน้าโครงการวิจัย

งวดที่ 1 ปีงบประมาณ พ.ศ. 2556

รหัสโครงการ.....................

(สำหรับเจ้าหน้าที่)

---

1. ชื่อโครงการ

(ไทย) การประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไป

(อังกฤษ) Applications of Fixed Point Theory to Solve Generalized Variational Inequality Problems

2. จำนวนเงินอุดหนุน 100,000 **บาท ปีงบประมาณ พ.ศ. 2556**

จาก ☐ **งบประมาณแผ่นดิน** ☑ **งบประมาณเงินรายได้**

3. ชื่อหัวหน้าโครงการ อาจารย์ ดร.สุวิชา อิ่มนาง

ตำแหน่ง อาจารย์

สังกัดภาควิชา/งาน สาขาคณิตศาสตร์และสถิติ

คณะ/สถาบัน/สำนัก/สำนักงาน คณะวิทยาศาสตร์

โทรศัพท์ 0858708598 โทรสาร.........-.......... E-mail: suwicha.n@hotmail.com

4. ระยะเวลาของโครงการ

เริ่มโครงการวิจัยเมื่อ/ เดือน 1 มิถุนายน พ.ศ. 2556

สิ้นสุดระยะเวลาตามโครงการวิจัย/เดือน 31 พฤษภาคม พ.ศ. 2557

5. เป้าหมายของโครงการวิจัย ณ งวดที่รายงาน

โครงการวิจัยในช่วง 6 เดือนแรกมีเป้าหมายที่สำคัญ 3 ประการ ดังต่อไปนี้ ประการแรก สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำแบบใหม่เพื่อหาผลเฉลยร่วมของปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไป และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต ประการที่สองหาเงื่อนไขของการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปและปัญหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่ขยาย และประการสุดท้ายพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปและปัญหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต

6. ความก้าวหน้าของการวิจัย ณ งวดที่รายงานเมื่อเทียบกับเป้าหมาย

ผลงาน/กิจกรรม	ผู้รับผิดชอบ	กำหนดการ (เดือน)											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1. รวบรวมและศึกษาเอกสารงานวิจัย หนังสือ บทความที่เกี่ยวข้องกับปัญหาวิจัย	ดร.สุวิชา อิ่มนาง	⟺ ↔	⟺ ↔	⟺ ↔									
2. สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าสู่คำตอบของปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปและปัญหาจุดตรึงร่วม	ดร.สุวิชา อิ่มนาง			⟺ ↔	⟺ ↔								
3. พิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าแบบเข้มของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างโดยข้อ 2 สู่คำตอบของปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปและปัญหาจุดตรึงร่วม	ดร.สุวิชา อิ่มนาง				⟺ ↔	⟺ ↔	⟺ ↔	⟺ ↔					
4. เขียนเอกสารงานวิจัยและส่งตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติและรายงานความก้าวหน้าของโครงการในรอบ 6 เดือนหลังต่อมหาวิทยาลัย								⟺	⟺	⟺	⟺	⟺	⟺

⟺ แผนงานวิจัยทั้งโครงการที่วางไว้

↔ ผลงานวิจัยที่ดำเนินจนถึงปัจจุบัน

ผลงานที่ได้ และที่คาดว่าจะสำเร็จ

- ผลงานที่ได้จากการวิจัยที่ผ่านมา มีดังนี้
  1) ได้ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบใหม่เพื่อหาผลเฉลยร่วมของปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปและปัญหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่ขยาย
  2) ได้เงื่อนไขการลู่เข้าสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปและปัญหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่ขยาย
  3) ได้ทฤษฎีบทการลู่เข้าสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปและปัญหาจุดตรึงร่วมของการส่งแบบไม่ขยาย
- ผลงานที่คาดว่าจะสำเร็จต่อไป มีดังนี้
  1) ผลงานได้รับการตีพิมพ์ในวารสาร International Journal of Pure and Applied Mathematics
  2) ผลงานได้รับการอ้างอิง(citation) จากวารสารวิชาการทางคณิตศาสตร์
  3) บุคลากรในสาขาวิชาคณิตศาสตร์มีความสนใจทำงานวิจัยในปัญหาจุดตรึงและการประยุกต์เพิ่มขึ้น

7. รายละเอียดทางวิชาการที่ได้รับจากการวิจัย

โครงการวิจัยนี้ผู้วิจัยศึกษาการหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของปัญหาอสมการการแปรผัน ปัญหาสมดุลผสมและปัญหาจุดตรึงของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย (nonexpansive mappint) ในปริภูมิฮิลเบิร์ต

ระบบปัญหาอสมการการแปรผันคือการหาผลเฉลย $(x^*, y^*) \in C \times C$ ของระบบปัญหา

$$\begin{cases} \langle \lambda A y^* + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C \\ \langle \mu B x^* + y^* - x^*, x - y^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C \end{cases} \qquad (1)$$

เมื่อ C เป็นเซตย่อยของปริภูมิฮิลเบิร์ต H และเรียกระบบปัญหา (1) ว่า “**ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน** (general system of variational inequalities)” ขั้นตอนการหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน (1) และปัญหาจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายโดยศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำของลำดับ $\{x_n\}$ ดังนี้

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1 \end{cases} \qquad (2)$$

ซึ่งเป็นระเบียบวิธีทำซ้ำแบบใหม่เพื่อหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของปัญหาอสมการการแปรผัน ปัญหาสมดุลผสมและปัญหาจุดตรึงของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย (nonexpansive mappint) ในปริภูมิฮิลเบิร์ต จากการวิจัยได้พบว่าระเบียบวิธีทำซ้ำ (2) ลู่เข้าสู่ผลเฉลยของปัญหาทางคณิตศาสตร์อีกหนึ่งปัญหาซึ่งเรียกว่า”**ปัญหาสมดุล** (equilibrium problem)” จากอสมการที่ (2) พบว่า ถ้า $F = \varphi = 0,\ S_n = T$ และ $r_n = 1$ จะได้ว่า $u_n = x_n$ ดังนั้นระเบียบวิธีทำซ้ำ (2) ได้ลดรูปเป็นระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาโดย Ceng et al. ที่กำหนดดังนี้

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \mu B x_n), \\ x_{n+1} = a_n v + (1-a_n) T P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

จากการวิจัยได้ทฤษฎีบทและองค์ความรู้ใหม่ที่สำคัญดังต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบทที่ 1</u> ให้ C เป็นเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์ของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ $F: C \times C \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องเงื่อนไข $(A1)-(A5)$ และ $\varphi: C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ เป็น proper lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ กำหนด $\lambda, \mu > 0$ และ $A: C \to H$ เป็นฟังก์ชัน $\alpha - inverse - stronglymonotone$ และ $B: C \to H$ เป็นฟังก์ชัน $\beta - inverse - stronglymonotone$ ให้ $\{T_i\}_{i=1}^{N}$ เป็นวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายโดยที่ $\Omega = \bigcap_{i=1}^{N} F(T_i) \cap GVI(C, A, B) \cap MEP(F, \varphi) \neq \phi$ สำหรับแต่ละ $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ กำหนดให้ $\alpha_j^{(n)} = (\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j})$ โดยที่ $\alpha_1^{n,j}, \alpha_2^{n,j}, \alpha_3^{n,j} \in [0,1]$, $\alpha_1^{n,j} + \alpha_2^{n,j} + \alpha_3^{n,j} = 1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_1, \theta_1]$ ซึ่ง $0 < \eta_1 \leq \theta_1$ และ $\{\alpha_1^{n,N}\}_{j=1}^{N-1} \subset [\eta_N, 1]$ โดยที่ $0 < \eta_N \leq 1$ และ $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^{N} \subset [0, \theta_2]$ ซึ่ง $0 \leq \theta_2 < 1$ กำหนดให้ S_n เป็น S -ฟังก์ชัน ที่ก่อกำเนิดโดยฟังก์ชัน $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ สมมุติเงื่อนไข $(B1)$ หรือ $(B2)$ เป็นจริง และ $v \in C$ กำหนดลำดับ $\{x_n\}, \{y_n\}$ และ $\{u_n\}$ โดยสมการ

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\{a_n\}, \{b_n\} \subset [0,1]$, $\lambda \in (0, 2\alpha)$ และ $\mu \in (0, 2\beta)$ ถ้าสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ และ $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty} |\alpha_1^{n+1,i} - \alpha_1^{n,i}| = 0; \ \forall i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ และ $\lim_{n\to\infty} |\alpha_3^{n+1,j} - \alpha_3^{n,j}| = 0; \ \forall j \in \{2, 3, \ldots, N\}$

แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\bar{x} = P_\Omega v$ และ $(\bar{x}, \bar{y})$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (1) เมื่อ $\bar{y} = P_\Omega(\bar{x} - \mu B \bar{x})$

ถ้าฟังก์ชัน $N=1, T_1=S, \alpha_2^{n,1}=\alpha_3^{n,1}=0, \varphi=0, F(x,y)=0$ สำหรับ $x,y\in C$ และ $r_n=1$ สำหรับ $n\in\mathbb{N}$ ในทฤษฎีบทที่ 1 แล้ว $u_n=P_Cx_n=x_n$ โดย ทฤษฎีบทที่ 1 จะได้บทแทรกที่สำคัญตามมาดังนี้

<u>บทแทรก 2</u> ให้ C เป็นเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์ของปริภูมิฮิวเบิร์ต H , $A:C\to H$ เป็นฟังก์ชัน $\alpha-inverse-stronglymonotone$ และ $B:C\to H$ เป็นฟังก์ชัน $\beta-inverse-stronglymonotone$ กำหนดให้ S เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายโดยที่ $\Omega=F(S)\cap GSVI(C,A,B)\neq\phi$ สมมุติให้ $v\in C$ กำหนดลำดับ $\{x_n\},\{y_n\}$ และ $\{u_n\}$ โดยสมการ

$$\begin{cases} y_n=P_C(x_n-\mu Ax_n), \\ x_{n+1}=a_nv+b_nx_n+(1-a_n-b_n)SP_C(y_n-\lambda Ay_n), \quad n\geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda\in(0,2\alpha)$ และ $\mu\in(0,2\beta)$ และลำดับ $\{a_n\},\{b_n\}$ สอดคล้องเงื่อนไขในทฤษฎีบทที่ 1 แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\bar{x}=P_\Omega v$

8. งานสำเร็จตามเป้าหมายที่เสนอไว้หรือไม่ (ถ้าไม่เพราะเหตุใด)

จากการวิจัยในช่วง 6 เดือนแรกผลงานวิจัยได้บรรลุตามเป้าหมายที่วางไว้

9. อุปสรรคหรือปัญหา

ไม่มี

10. แนวทางในการแก้ไขปัญหาและอุปสรรค

ไม่มี

11. รายการครุภัณฑ์ที่จัดซื้อเรียบร้อยแล้ว (ในกรณีที่มีครุภัณฑ์)

ไม่มี

12. รายละเอียดงบประมาณ (ระบุรายละเอียดในแต่ละหมวดอย่างชัดเจนตามแบบรายงานการใช้เงิน)

งบประมาณที่ได้รับทั้งโครงการ เป็นจำนวนเงิน 100,000 บาท

งบประมาณที่ได้รับงวดที่ 1 (งวดก่อนหน้าที่รายงานนี้) เป็นจำนวนเงิน 50,000 บาท

รายการค่าใช้จ่าย	งบประมาณโครงการ	เบิกใช้จ่ายในโครงการไปแล้ว	ยอดคงเหลือ
ค่าพาหนะในการเดินทางเพื่อพบที่ปรึกษาวิจัย เพื่อค้นเอกสาร ค่าเบี้ยเลี้ยง ค่าเช่าที่พัก	30,000	30,000	0
ค่าถ่ายเอกสารรายงานความก้าวหน้า รายงานวิจัย เอกสารวิจัย	5,000	5,000	0
ค่าสืบค้นข้อมูล วิเคราะห์ข้อมูล	5,000	5,000	0
ค่าตอบแทนที่ปรึกษาโครงการ	2,000	2,000	0
วัสดุสำนักงาน	5,000	5,000	0
ค่าโทรศัพท์ ค่าไปรษณีย์ ค่าบริการด้านสื่อสารและโทรคมนาคม ค่าไฟฟ้า ค่าน้ำประปา	3,000	3,000	
รวม	50,000	50,000	0

13. สรุปผลงานการวิจัยที่ได้ดำเนินการมาแล้ว

การวิจัยในช่วง 6 เดือนแรกได้ผลสรุป 3 ประการ ดังต่อไปนี้ ประการแรกได้ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบใหม่เพื่อหาผลเฉลยร่วมของปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปและปัญหาจุดตรึงของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ประการที่สองได้เงื่อนไขของการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปและปัญหาจุดตรึงร่วมของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย และประการสุดท้ายได้ทฤษฎีบทการลู่เข้าสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปและปัญหาจุดตรึงร่วมของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต

ผลงานวิจัยที่ได้ดำเนินการมาแล้วคิดเป็นร้อยละ 70 **ของงานวิจัยตลอดโครงการ**

14. คาดว่าจะส่งรายงานวิจัยได้ภายในเดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2557

15. รายงานความก้าวหน้านี้เมื่อวันที่ 2 เดือน ธันวาคม พ.ศ. 2556

(ลงชื่อ)..........สุวิชา อิ่มนาง..........หัวหน้าโครงการ

(อาจารย์ ดร. สุวิชา อิ่มนาง)