รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

ชื่อโครงการวิจัย

การประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาระบบใหม่ของอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปในปริภูมิฮิลเบิร์ต

Applications of Fixed Point Theory to Solve a New System of Generalized Variational Inequality in Hilbert Spaces

โดย ธีรเดช เกื้อวงศ์ และสุวิชา อิ่มนาง

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้

ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2557

มหาวิทยาลัยทักษิณ

สัญญาเลขที่ 02-4/2557

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

ชื่อโครงการวิจัย

การประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาระบบใหม่ของอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปในปริภูมิฮิลเบิร์ต

Applications of Fixed Point Theory to Solve a New System of Generalized Variational Inequality in Hilbert Spaces

โดย ธีรเดช เกื้อวงศ์ และสุวิชา อิ่มนาง
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้
ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2557
มหาวิทยาลัยทักษิณ

คำรับรองคุณภาพ

รายงานวิจัยเรื่อง **การประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาระบบใหม่ของอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปในปริภูมิฮิลเบิร์ต**

ผู้วิจัย **ธีรเดช เกื้อวงศ์ และสุวิชา อิ่มนาง**

สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยทักษิณ ขอรับรองว่ารายงานวิจัยฉบับนี้ได้ผ่านการประเมินจากผู้ทรงคุณวุฒิแล้ว มีความเห็นว่าผลงานวิจัยฉบับนี้มีคุณภาพอยู่ในเกณฑ์

- [x] ดีมาก
- [ ] ดี
- [ ] ปานกลาง
- [ ] พอใช้
- [ ] ควรปรับปรุง

(อาจารย์ ดร.วันลภ ดิษสุวรรณ์)
ผู้อำนวยการสถาบันวิจัยและพัฒนา
วันที่ 31 เดือนสิงหาคม พ.ศ.2559

มหาวิทยาลัยทักษิณ

ชื่อโครงการวิจัย (ภาษาไทย) การประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาระบบใหม่ของอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปในปริภูมิฮิลเบิร์ต

(ภาษาอังกฤษ) Applications of Fixed Point Theory to Solve a New System of Generalized Variational Inequality in Hilbert Spaces

ชื่อผู้วิจัย 1. อาจารย์ธีรเดช เกื้อวงศ์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ โทรศัพท์ 074-693972 ต่อ 2550

2. อาจารย์ ดร. สุวิชา อิ่มนาง สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ โทรศัพท์ 074-693972 ต่อ 2579

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้ กองทุนมหาวิทยาลัยทักษิณ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. ๒๕๕๗ จำนวนเงิน 85,000 บาท ระยะเวลาทำการวิจัย 1 ปี ตั้งแต่ 1 มิถุนายน พ.ศ. 2557 ถึง 31 พฤษภาคม พ.ศ. 2558

บทคัดย่อ

ในโครงการวิจัยนี้ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต รวมถึงได้พิสูจน์ว่าระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นนั้นได้ลู่เข้าแบบเข้มสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาดังกล่าว นอกจากนี้ผลงานที่ได้จากการวิจัยนี้ได้ขยายและพัฒนาองค์ความรู้ผลงานของ Ceng Wang และ Yao [Strong convergence theorems by a relaxed extragradient method for a general system of variational inequalities, Math Meth Oper Res 67 (2008) 375--390] และผลงานนักวิจัยอื่นๆ

ABSTRACT

In this research project, we introduce an iterative method to approximate a common solution of a new general system of variational inequalities, a mixed equilibrium problem and a fixed point problem for a nonexpansive mapping in real Hilbert spaces. We prove that the iterative sequence converges strongly to a common solution of the three problems in the framework of Hilbert spaces. Our main results extend and improve the recent results of Ceng, Wang and Yao Yao [Strong convergence theorems by a relaxed extragradient method for a general system of variational inequalities, Math Meth Oper Res 67 (2008) 375--390] and many others.

ประกาศคุณูปการ

โครงการวิจัยนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้ กองทุนวิจัยมหาวิทยาลัยทักษิณ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. ๒๕๕๗ ทั้งนี้ผู้เขียนขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิที่อ่าน และวิพากษ์เอกสารต้นฉบับ พร้อมทั้งแนะนำข้อบกพร่องของรายงานวิจัยฉบับนี้ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ธีรเดช เกื้อวงศ์ และสุวิชา อิ่มนาง

กันยายน 2559

สารบัญ

1 บทนำ 1

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหาวิจัย 1

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย 2

1.3 ขอบเขตการวิจัย 3

1.4 ประโยชน์ที่ได้รับ 3

2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 4

2.1 การประมาณค่าจุดตรึง 4

2.2 ปัญหาอสมการการแปรผัน 5

2.3 ปัญหาดุลยภาพ 6

2.4 ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผันและปัญหาดุลยภาพผสม 7

2.4.1 ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน 7

2.4.2 ปัญหาดุลยภาพผสม 8

2.5 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง 9

3 วิธีดำเนินการวิจัย 13

3.1 ระเบียบวิธีประมาณค่าแบบใหม่ 13

3.2 ทฤษฎีการลู่เข้าแบบเข้ม 13

4 ผลดำเนินการวิจัย 24

4.1 ระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาวิจัย 24

4.2 ผลดำเนินการวิจัย 24

5 สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ 26

5.1 สรุปผลการวิจัย 26

5.2 อภิปรายผล 26

5.3 ข้อเสนอแนะ 27

บทที่ 1

บทนำ

การประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาระบบใหม่ของอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปในปริภูมิฮิลเบิร์ต เป็นการวิจัยที่มุ่งแสวงหาข้อเท็จจริงเกี่ยวกับการประมาณหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต ซึ่งจำเป็นอย่างยิ่งต้องอาศัยความรู้ของทฤษฎีจุดตรึง (fixed point theory) ทฤษฎีการลู่เข้า (convergence theory) และทฤษฎีการประมาณค่า (approximation theory) เพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับปัญหาวิจัย รวมทั้งสาระสำคัญอื่นๆที่เกี่ยวข้อง ดังนั้น ในบทนี้จะให้รายละเอียดที่สำคัญของที่มาและความสำคัญของปัญหาวิจัย วัตถุประสงค์ของการวิจัย ขอบเขตของการดำเนินการวิจัย และประโยชน์ของการวิจัย โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญ ดังต่อไปนี้

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหาวิจัย

ปัจจุบันความก้าวหน้าทางวิชาการด้านคณิตศาสตร์โดยเฉพาะอย่างยิ่งการพัฒนา ทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ๆนั้น นับว่ามีบทบาทและสำคัญมากต่อการพัฒนาเทคโนโลยีสมัยใหม่ ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นและสำคัญอย่างยิ่งต่อการพัฒนาประเทศ โดยเฉพาะทฤษฎีบทที่ได้จากการศึกษาปัญหาในทางคณิตศาสตร์นั้น สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างกว้างขวาง อาทิ นักเศรษฐศาสตร์นำทฤษฎีบทของปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุด (optimization problem) มาประยุกต์ใช้กับการหาจุดที่ทำให้ได้กำไรสูงสุดหรือเพื่อหาจุดคุ้มทุน รวมถึงการใช้ทรัพยากรให้เกิดประโยชน์สูงสุด นักบัญชีนำมาประยุกต์ใช้กับการคำนวณทิศทางการขนส่งเพื่อให้เสียค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องพบว่าทฤษฎีบทของปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุด เป็นส่วนหนึ่งของปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า "**ปัญหาอสมการการแปรผัน** (variational inequality problem)" นอกจากนี้จากการศึกษาพบว่า ปัญหาอสมการการแปรผันสามารถประยุกต์ใช้เพื่อแก้ไขปัญหาอีกหลายปัญหา เช่น ปัญหาดุลยภาพการจราจรทางเครือข่าย (traffic network equilibrium problem) ปัญหาดุลยภาพราคาเชิงพื้นที่ (spatial price equilibrium problem) ปัญหาดุลยภาพตลาดผู้ขายน้อยราย (oligopolistic market equilibrium problem) ปัญหาดุลยภาพทางการเงิน (financial equilibrium problem) ปัญหาดุลยภาพการอพยพ (migration equilibrium problem) ปัญหาเครือข่ายเกี่ยวกับสิ่งแวดล้อม (environmental network problem) และปัญหาเครือข่ายความรู้ (knowledge network problem) ทำให้ในช่วง 10 ปีที่ผ่านมามีนักวิจัยจำนวนมาก ได้พัฒนาระบบปัญหาอสมการการแปรผัน และสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่า (approximation) หาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert space)

ปัญหาอสมการการแปรผัน คือ การหาสมาชิก $u \in C$ ที่ทำให้

$$\langle Au, v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in C$$

เมื่อ C เป็นเซตย่อยของปริภูมิฮิลเบิร์ต H และ A เป็นฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้นที่ส่งจาก C ไปยัง H จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องพบว่าผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน เป็นผลเฉลยของปัญหาจุดตรึง ทำให้มีนักวิจัยจำนวนมากใช้ความรู้ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน และสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำแบบต่างๆ เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน รวมทั้งพัฒนาระบบใหม่ของปัญหาอสมการการแปรผัน ที่ให้คำตอบมากกว่าปัญหาอสมการการแปรผันเดิม ในปี ค.ศ. 2008 Ceng และคณะ [ ] สร้าง"**ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน** (general system of variational inequality)" ซึ่งเป็นปัญหาการหาสมาชิก $(x^*, y^*) \in C \times C$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle \lambda Ay^* + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \mu Bx^* + y^* - x^*, x - y^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C. \end{cases}$$

เมื่อ λ และ μ เป็นสองจำนวนจริงบวก และ $A, B : C \to H$ เป็นสองฟังก์ชันใดๆ สำหรับการประมาณค่าหาผลเฉลยของระบบปัญหาทั่วไปของอสมการการแปรผัน Ceng และคณะได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาสมาชิกผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน สำหรับฟังก์ α และ β-inverse strongly monotone และผลเฉลยของปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต ต่อมาในปี ค.ศ. 2012 Imnang [ ] ได้ศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหา "**ระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน** (new general system of variational inequalities)" ซึ่งเป็นปัญหาการหาสมาชิก $(x^*, y^*, z^*) \in C \times C \times C$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle \lambda_1 A_1 y^* + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \lambda_2 A_2 z^* + y^* - z^*, x - y^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \lambda_3 A_3 x^* + z^* - x^*, x - z^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \end{cases}$$

เมื่อ $A_i : C \to X$ เป็นสามฟังก์ชันใดๆ และ $\lambda_i > 0$ สำหรับ $i = 1, 2, 3$ สำหรับการประมาณค่าหาผลเฉลยของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน Imnang ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาดังกล่าว กรณีที่ A_i เป็นฟังก์ชัน relaxed (c_i, d_i)-cocoercive สำหรับ $i = 1, 2, 3$ ตามลำดับ

จากงานวิจัยดังกล่าวยังเป็นที่สงสัยกันว่ากรณีที่ A_i เป็นฟังก์ชัน α_i-inverse strongly monotone สำหรับ $i = 1, 2, 3$ ตามลำดับ เราจะประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผันและปัญหาจุดตรึงได้อย่างไร จึงเป็นที่มาของการศึกษาโครงการวิจัยเรื่อง"การประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาระบบใหม่ของอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปในปริภูมิฮิลเบิร์ต" ดังนั้นเพื่อจะได้มาซึ่งข้อสรุปดังกล่าว ผู้วิจัยจึงได้ศึกษาเพื่อหาข้อเท็จจริงซึ่งสามารถจะนำความรู้ไปใช้เป็นหลักการหรือทฤษฎีบทเพื่อการอ้างอิงและประยุกต์ใช้ให้เกิดความก้าวหน้าทางวิชาการต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

โครงการวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ที่สำคัญ 3 ประการ คือ **ประการแรก** เพื่อสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย และปัญหาดุลยภาพผสมในปริภูมิฮิลเบิร์ต **ประการที่สอง** เพื่อหาเงื่อนไขของการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นสู่ผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน

ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต และประการสุดท้าย เพื่อพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นตามวัตถุประสงค์แรก สำหรับฟังก์ชันประเภท α_i-inverse strongly monotone สำหรับ $i = 1, 2, 3$ ตามลำดับ

1.3 ขอบเขตการวิจัย

โครงการวิจัยนี้ได้ศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึง และปัญหาดุลยภาพผสมในปริภูมิฮิลเบิร์ต สำหรับระบบปัญหาทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ศึกษากรณีที่ A_i เป็นฟังก์ชัน α_i-inverse strongly monotone สำหรับ $i = 1, 2, 3$ ตามลำดับ และปัญหาจุดตรึงศึกษาปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย

1.4 ประโยชน์ที่ได้รับ

โครงการวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึง และปัญหาดุลยภาพผสมในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยประโยชน์ที่จะได้รับ 5 ประการ คือ **ประการแรก** ได้ระเบียบวิธีทำซ้ำใหม่เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึง และปัญหาดุลยภาพผสมในปริภูมิฮิลเบิร์ต **ประการสอง** ทราบเงื่อนไขการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นสู่ผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึง และปัญหาดุลยภาพผสมในปริภูมิฮิลเบิร์ต **ประการสาม** ได้ทฤษฎีบทการลู่เข้าซึ่งสามารถนำไปใช้เป็นทฤษฎีในการอ้างอิงเพื่อให้เกิดความก้าวหน้าทางวิชาการ **ประการสี่** ได้องค์ความรู้ไปตีพิมพ์เผยแพร่ในวารสารวิชาการ อีกทั้งสร้างความเข้มแข็งและความก้าวหน้าทางวิชาการของนักวิจัยคณิตศาสตร์ไทย และ**ประการสุดท้าย** ช่วยเสริมสร้างความมั่นใจให้แก่นักวิชาการโดยเฉพาะอาจารย์ทางคณิตศาสตร์เพื่อการเรียนการสอนที่มีคุณภาพ

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

เนื้อหาในบทนี้จะให้รายละเอียดที่สำคัญของงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการประมาณค่าจุดตรึง ปัญหาอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพ ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน และปัญหาดุลยภาพผสม รวมถึงทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องที่จำเป็นต้องใช้ในการวิจัย โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญดังต่อไปนี้

2.1 การประมาณค่าจุดตรึง

กำหนดให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต พร้อมกับผลคูณภายใน $\langle \ldots \rangle$ และ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของ H จะเรียกฟังก์ชัน $T : C \to C$ ว่า **ฟังก์ชันแบบไม่ขยาย** (nonexpansive mapping) ถ้า $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ สำหรับแต่ละ $x, y \in C$ เซตจุดตรึง (fixed point set) ของ T นิยามโดย $F(T) = \{x \in C : Tx = x\}$ ปัญหาการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาจุดตรึงเริ่มศึกษาในปี ค.ศ. 1967 โดย Halpern [ ] ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาจุดตรึงของฟังก์ชัน T โดยที่ T เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายบนเซต C โดยศึกษาลำดับ $\{x_n\}$ ดังนี้: ให้ $x_1 \in C$ และ

$$x_{n+1} = \alpha_n v + (1 - \alpha_n)Tx_n, \quad n \geq 1 \tag{2.1.1}$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ในช่วง $[0, 1]$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข ดังต่อไปนี้

$$C1 : \lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0; \quad C2 : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

Halpern ศึกษาการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำ (2.1.1) ในกรณีที่ $\alpha_n = n^{-\sigma}$, $\sigma \in (0, 1)$ และ $v = 0$ และได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ได้ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงของฟังก์ชัน T ต่อมาในปี ค.ศ. 1977 Lions [ ] ได้พัฒนาผลงานของ Halpern ที่จำกัดการศึกษาเพียงกรณีที่ลำดับ $\alpha_n = n^{-\sigma}$, $\sigma \in (0, 1)$ เท่านั้น และ Lions ศึกษากรณีที่ $\{\alpha_n\}$ เป็นลำดับใดๆ ในช่วง $[0, 1]$ โดยที่ $\{\alpha_n\}$ สอดคล้องเงื่อนไข ดังต่อไปนี้

$$C1 : \lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0; \quad C2 : \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty; \quad C3 : \lim_{n \to \infty} \frac{|\alpha_{n+1} - \alpha_n|}{\alpha_{n+1}^2} = 0$$

Lions ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ที่กำหนดโดยสมการ (2.1.1) ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงของฟังก์ชัน T ในปริภูมิฮิลเบิร์ต H ต่อจากนั้น ในปี ค.ศ. 1994 Reich [ ] ได้พัฒนาผลงานของ Halpern จากที่ศึกษาทฤษฎีบท

การลู่เข้าในปริภูมิฮิลเบิร์ต H มาศึกษาในปริภูมิ uniformly smooth ภายใต้เงื่อนไขเดียวกันของลำดับ $\{\alpha_n\}$ Reich พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงของฟังก์ชัน T นอกจากนี้ Reich ให้ข้อสังเกตุที่สำคัญว่า ลำดับของจำนวนจริง $\{\alpha_n\}$ ที่ศึกษาทั้งในผลงานของ Halpern และ Lions นั้น ยังไม่ครอบคลุม กรณีที่ $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$ ดังนั้นปัญหาที่นักวิจัยต้องการศึกษาเพิ่มเติม คือ จะวางเงื่อนไขอย่างไรของลำดับ $\{\alpha_n\}$ ถึงจะครอบคลุมกรณี $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$ ด้วย เพื่อตอบปัญหาดังกล่าว Wittmann [ ] ได้ศึกษาทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำ (2.1.1) ในปริภูมิฮิลเบิร์ต H โดย Wittmann พิสูจน์ว่า ถ้า $\{\alpha_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$C1: \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0; \quad C2: \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty; \quad C3: \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$$

แล้วลำดับ $\{x_n\}$ จะลู่เข้าแบบเข้มสู่จุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย T

2.2 ปัญหาอสมการการแปรผัน

ปัญหาอสมการการแปรผัน เริ่มศึกษาในปีค.ศ. 1964 โดย Stampacchi [ ] โดยศึกษาปัญหาที่เรียกว่า "**อสมการการแปรผันแบบดั้งเดิม** (classical variational inequality)" คือ ปัญหาการหาสมาชิก $x^* \in C$ ที่ทำให้

$$\langle Ax^*, y - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C \tag{2.2.1}$$

เซตของผลเฉลยทั้งหมดของปัญหา (2.2.1) เขียนแทนด้วย $VI(C, A)$ จากระบบปัญหา (2.2.1) เป็นที่ทราบว่า x^* เป็นผลเฉลยของระบบปัญหา (2.2.1) ก็ต่อเมื่อ $x^* = P_C(x^* - \lambda Ax^*)$ เมื่อ $\lambda > 0$ และ P_C เป็นภาพฉายระยะทาง (metric projection) นั่นแสดงให้เห็นว่า ปัญหาอสมการการแปรผันมีความเกี่ยวข้องกับปัญหาจุดตรึง นอกจากนี้มีปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งเกี่ยวข้องกับปัญหาอสมการการแปรผัน อาทิ ปัญหาอสมการการแปรผันแบบไม่คอนเวกซ์ ปัญหาอสมการการแปรผันแบบผสม โดยสามารถศึกษารายละเอียดเพิ่มเติมได้จากเอกสาร ดังต่อไปนี้ Ceng et al. [--] Chang et al. [ ] Noor [--] Peng และ Yao [--] Plubtieng และ Punpaeng [ ] Yao et al. [ ] Zeng และ Yao [ ] Zhao และ He [ ] สำหรับการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผันนั้น เริ่มศึกษาจากปริภูมิยูคลิดมีมิติจำกัด ($H = \mathbb{R}^n$) เป็นปริภูมิแรก โดยศึกษาภายใต้สมมุติฐาน C เป็นเซตย่อย ปิด และคอนเวกซ์ของ $\mathbb{R}^n$ ต่อมาในปี ค.ศ. 1976 Korpelevich [ ] สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำที่เรียกว่า **วิธีเอกซตราเกรเดียนต์** (extragradient method) โดยกำหนดลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ดังนี้:

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda Ax_n), \\ x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda Ay_n) \end{cases}$$

สำหรับทุกค่า $n = 0, 1, 2, \ldots$ เมื่อ $A : C \to \mathbb{R}^n$ เป็นฟังก์ชัน monotone และ k-Lipschitz continuous และ $\lambda \in (0, 1/k)$ ภายใต้สมมุติฐาน $VI(C, A) \neq \emptyset$ Korpelevich ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ลู่เข้าสู่ผลเฉลยค่าเดียวกันของปัญหาอสมการการแปรผัน (2.2.1) จากนั้นในปี ค.ศ. 2003 Takahashi และ Toyoda [ ] สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมสำหรับปัญหาจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย และปัญหาอสมการการแปรผัน โดยสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ $\{x_n\}$ ดังนี้:

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) SP_C(x_n - \lambda_n Ax_n)$$

เมื่อ $\{\alpha_n\} \subset (0,1)$, $\{\lambda_n\} \subset (0, 2\alpha)$ และ $S : C \to C$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย P_C เป็นภาพฉายระยะทาง และ $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน $\alpha-$inverse strongly monotone โดยที่ Takahashi และToyoda ได้พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่งนิยามโดย (8) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่สมาชิกร่วมของปัญหาจุดตรึง และปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ต ต่อมาในปี ค.ศ. 2006 Nadezhkina และ Takahashi [ ] ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาสมาชิกร่วมของปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย และผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน สำหรับฟังก์ชัน monotone และ k-Lipschitz continuous โดยกำหนดลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ดังนี้:

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, \\ y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) S P_C(x_n - \lambda_n A y_n) \end{cases} \tag{2.2.2}$$

เมื่อ $\{\lambda_n\} \subset [a,b]$ และ $\{\alpha_n\} \subset [c,d]$ สำหรับบางจำนวนจริง $c, d \in (0,1)$ นอกจากนี้ Nadezhkina และTakahashi ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ซึ่งนิยามโดย (2.2.2) ลู่เข้าแบบอ่อนสู่สมาชิก $z \in F(S) \cap VI(C, A)$ เมื่อ $z = \lim_{n\to\infty} P_{F(S)\cap VI(C,A)} x_n$ ต่อจากนั้นในปี ค.ศ. 2007 Yao และ Yao [ ] สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาสมาชิกร่วมของเซต $F(S) \cap VI(C, A)$ ภายใต้สมมุติฐาน $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α-inverse strongly monotone และ $S : C \to C$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย โดยที่ $F(S) \cap VI(C, A) \neq \emptyset$ โดยนิยามลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ดังนี้:

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_n x_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n S P_C(y_n - \lambda_n A y_n) \end{cases} \tag{2.2.3}$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ $\{\gamma_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ในช่วงปิด $[0,1]$ และ $\{\lambda_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วงปิด $[0, 2\alpha]$ นอกจากนี้ Yao และ Yao ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ที่กำหนดโดย (2.2.3) ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิก $z \in F(S) \cap VI(C, A)$ เมื่อ $z = P_{F(S)\cap VI(C,A)} u$

2.3 ปัญหาดุลยภาพ

ต่อไปจะให้นิยามของ**ปัญหาดุลยภาพ** (equilibrium problem) ซึ่งเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญมาก โดยเฉพาะทางเศรษฐศาสตร์ได้นำไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวาง โดยกำหนดนิยามดังนี้ ให้ $F : C \times C \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง ปัญหาดุลยภาพ คือ ปัญหาการหาสมาชิก $x \in C$ ที่ทำให้

$$F(x, y) \geq 0, \quad \forall y \in C$$

เซตคำตอบทั้งหมดของปัญหาดุลยภาพ เขียนแทนด้วย $EP(F)$ การประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพ ปัญหาจุดตรึง และปัญหาอสมการการแปรผันนั้น ในปี ค.ศ. 2008 Plubtieng และ Punpaeng [ ] ศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับการประมาณค่าหาสมาชิกร่วมของเซต $F(S) \cap VI(C, A) \cap EP(F)$ ภายใต้สมมุติฐาน $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน $\alpha-$inverse strongly monotone และ $S : C \to C$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย โดยที่ $F(S) \cap VI(C, A) \cap EP(F) \neq \emptyset$ และนิยามลำดับ $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ และ $\{z_n\}$ ดังนี้:

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C; \\ y_n = P_C(u_n - \lambda_n u_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n S P_C(y_n - \lambda_n A y_n) \end{cases} \tag{2.3.1}$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ และ $\{\gamma_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วงปิด $[0,1]$ และ $\{\lambda_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วงปิด $[0,2\alpha]$ นอกจากนี้ภายใต้การวางเงื่อนไขของฟังก์ชัน F ลำดับ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ และ $\{\gamma_n\}$ นั้น Plubtieng และ Punpaeng พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ที่กำหนดโดย (2.3.1) ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิก $z \in F(S) \cap VI(C,A) \cap EP(F)$ เมื่อ $z = P_{F(S)\cap VI(C,A)\cap EP(F)}u$ ต่อจากนั้นในปี ค.ศ. 2009 Qin, Cho และ Kang [ ] สร้างและศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาสมาชิกร่วมของปัญหาดุลยภาพ ปัญหาจุดตรึงร่วม และปัญหาอสมการการแปรผันพิจารณากรณีที่ $A_i : C \to H$, $i = 1,2$ เป็นฟังก์ชันประเภท $\alpha-$inverse strongly monotone และฟังก์ชัน $S_i : C \to C$, $i = 1,2$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย โดยกำหนดลำดับ $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ และ $\{z_n\}$ ดังนี้:

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C; \\ y_n = P_C(u_n - \lambda_n u_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n S P_C(y_n - \lambda_n A y_n) \end{cases} \tag{2.3.2}$$

เมื่อ $\{\alpha_n\}$ และ $\{\beta_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วงปิด $[0,1]$ และ $\{\lambda_n\}$ $\{\gamma_n\}$ และ $\{\mu_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงในช่วงปิด $[0,2\alpha]$ ภายใต้การวางเงื่อนไขของลำดับ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ $\{\gamma_n\}$ $\{\lambda_n\}$ และ $\{\mu_n\}$ Qin, Cho และ Kang ได้พิสูจน์ว่าลำดับที่สร้างโดย (2.3.2) ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิกผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพ ปัญหาจุดตรึงร่วม และปัญหาอสมการการแปรผัน

2.4 ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผันและปัญหาดุลยภาพผสม

หัวข้อนี้ผู้วิจัยได้ให้รายละเอียดที่สำคัญมากของปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยจะแบ่งเนื้อหาออกเป็นสองส่วน คือ เนื้อหาส่วนแรกจะให้รายละเอียดของระบบปัญหาทั่วไปของปัญหาอสมการการแปรผันและระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน และเนื้อหาส่วนที่สองจะให้รายละเอียดเกี่ยวกับปัญหาดุลยภาพผสม โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญดังต่อไปนี้

2.4.1 ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน

รายละเอียดของปัญหาอสมการการแปรผัน ผู้วิจัยได้ให้รายละเอียดไว้ในหัวข้อ 2.2 ในหัวข้อนี้ผู้วิจัยจะให้รายละเอียดของปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ครอบคลุมปัญหาอสมการการแปรผัน นั่นคือ"**ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน** (general system of variational inequalities)" โดยในปี ค.ศ. 2008 Ceng et al. [ ] ศึกษาปัญหาการหาสมาชิก $(x^*, y^*) \in C \times C$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle \lambda A y^* + x^* - y^*, x - x^*\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \\ \langle \mu B x^* + y^* - x^*, x - y^*\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \end{cases} \tag{2.4.1}$$

เมื่อ λ และ μ เป็นสองจำนวนจริงบวก และ $A, B : C \to H$ เป็นสองฟังก์ชันใดๆ กรณีเฉพาะของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน จะเห็นว่า ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน $A = B$ แล้วระบบปัญหา (2.4.1) จะลดรูปเป็นระบบปัญหาการหาสมาชิก $(x^*, y^*) \in C \times C$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle \lambda A y^* + x^* - y^*, x - x^*\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \\ \langle \mu A x^* + y^* - x^*, x - y^*\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C \end{cases} \tag{2.4.2}$$

ซึ่งเป็นระบบที่ศึกษาโดย Verma [ ] และเรียกระบบใหม่นี้ว่า "**ระบบใหม่ของอสมการการแปรผัน** (new system of variational inequalities)" นอกจากนี้ ถ้าเพิ่มเงื่อนไข ให้ $x^* = y^*$ แล้วระบบปัญหา (2.4.1) จะลดรูปเป็นการหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน $VI(C, A)$ ในหัวข้อ 2.2 ในการประมาณค่าหา

ผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน Ceng et al. [ ] ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาสมาชิกร่วมของผลเฉลยระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน สำหรับฟังก์ α และ β-inverse strongly monotone และเซตของจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ ดังนี้: ให้ $x_1 = v \in C$ และ $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \mu Bx_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n)SP_C(y_n - \lambda Ay_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda \in (0, 2\alpha), \mu \in (0, 2\beta)$ และ $\{a_n\}, \{b_n\} \subset [0, 1]$ ภายใต้การวางเงื่อนไขของลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ Ceng et al. พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิกร่วมของเซตของจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย S และผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน (2.4.1) ต่อมาในปี ค.ศ. 2010 Yao Liou และ Kang [ ] ได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบปัญหา (2.4.1) และปัญหาจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย S ในกรณีที่ $A, B : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α และ β-inverse strongly monotone ตามลำดับ โดย Yao Liou และ Kang สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ และ $\{z_n\}$ ดังนี้:

$$\begin{cases} z_n = P_C(x_n - \mu Bx_n), \\ y_n = \alpha_n Qx_n + (1 - \alpha_n)P_C(z_n - \lambda Az_n), \\ x_{n+1} = \beta_n x_n + \gamma_n P_C(z_n - \lambda Az_n) + \delta_n Sy_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda \in (0, 2\alpha), \mu \in (0, 2\beta)$ และ $\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ $\{\gamma_n\}$ $\{\delta_n\} \subset [0, 1]$ ภายใต้การวางเงื่อนไขของลำดับ$\{\alpha_n\}$ $\{\beta_n\}$ $\{\gamma_n\}$ และ $\{\delta_n\}$ Yao Liou และ Kang พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิกร่วมของเซตของจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย S และผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน (2.4.1)

โครงการวิจัยนี้เราสนใจศึกษาปัญหาการหาสมาชิก $(x^*, y^*, z^*) \in C \times C \times C$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle \lambda_1 A_1 y^* + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \\ \langle \lambda_2 A_2 z^* + y^* - z^*, x - y^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \\ \langle \lambda_3 A_3 x^* + z^* - x^*, x - z^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \end{cases} \tag{2.4.3}$$

ซึ่งเรียกระบบใหม่นี้ว่า"**ระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน**" เมื่อ $A_i : C \to H$ เป็นฟังก์ชันและ $\lambda_i > 0$ สำหรับ $i = 1, 2, 3$ กรณีเฉพาะจะเห็นว่า ถ้า $A_3 = 0$ และ $z^* = x^*$ แล้วปัญหา (2.4.3) จะลดรูปเป็นปัญหา (2.4.1) นอกจากนี้ ถ้าเพิ่มเงื่อนไขให้ $\lambda_i = 1$ สำหรับ $i = 1, 2$ แล้วปัญหา (2.4.3) ลดรูปสู่ปัญหา (2.4.2)

โครงการวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ที่สำคัญเพื่อสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาจุดตรึง กับผลเฉลยของปัญหา (2.4.3) กรณีที่ A_i เป็นฟังก์ชัน α_i -inverse strong monotone สำหรับ $i = 1, 2, 3$ ตามลำดับ โดยรายละเอียดจะแสดงไว้ในเนื้อหาของบทที่ 3

2.4.2 ปัญหาดุลยภาพผสม

หัวข้อ 2.3 ผู้วิจัยได้ให้รายละเอียดของปัญหาดุลยภาพซึ่งเป็นปัญหาที่สำคัญ และมีประโยชน์อย่างมากต่อวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์และวิทยาศาสตร์ประยุกต์ จากเหตุผลดังกล่าว จึงมีนักวิจัยกลุ่มหนึ่งพยายามคิดค้นหาปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่คลอบคลุมปัญหาดุลยภาพ และเรียกปัญหาใหม่นั้นว่า "**ปัญหาดุลยภาพผสม** (mixed equilibrium problem)" โดยมีเนื้อหาสาระดังนี้ ให้ $\varphi : C \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชันและ F เป็นฟังก์ชันที่ส่งจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ เมื่อ $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริง ในปี ค.ศ. 2008 Ceng และ Yao [ ] ได้ศึกษาปัญหาการหาสมาชิก $x \in C$ ที่ทำให้

$$F(x, y) + \varphi(y) \geq \varphi(x), \quad \forall y \in C \tag{2.4.4}$$

เรียกปัญหา (2.4.4) ว่าปัญหาดุลยภาพผสม และเซตของผลเฉลยทั้งหมดของปัญหา (2.4.4) เขียนแทนด้วย $MEP(F,\varphi)$ จากปัญหา (2.4.4) จะเห็นว่าถ้า x เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4.4) แล้ว $x \in \mathrm{dom}\varphi = \{x \in C \mid \varphi(x) < +\infty\}$ จากปัญหา (2.4.4) จะเห็นว่าถ้า $\varphi = 0$ แล้วปัญหาดุลยภาพผสม (2.4.4) จะกลายเป็นปัญหาการหาสมาชิก $x \in C$ ที่ทำให้

$$F(x,y) \geq 0, \quad \forall y \in C$$

ซึ่งก็คือปัญหาดุลยภาพ (ปัญหาการหาสมาชิก $EP(F)$) ที่ศึกษาในหัวข้อ 2.3 นอกจากนี้จะเห็นว่าถ้า $F = 0$ แล้วปัญหาดุลยภาพผสม (2.4.4) จะลดรูปเป็นปัญหา convex minimization ซึ่งเป็นปัญหาการหาสมาชิก $x \in C$ ที่ทำให้

$$\varphi(y) \geq \varphi(x), \quad \forall y \in C \tag{2.4.5}$$

นอกจากนี้ จะเห็นว่าถ้า $\varphi = 0$ และ $F(x,y) = \langle Ax, y - x\rangle$ สำหรับแต่ละสมาชิก $x, y \in C$ และ A เป็นฟังก์ชันที่ส่งจาก C ไปยัง H แล้วปัญหาดุลยภาพผสม (2.4.4) จะกลายเป็นปัญหาอสมการการแปรผัน และพบว่า $EP(F) = VI(C,A)$ การประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาดุลยภาพผสมจึงเป็นปัญหาที่มีความสำคัญและจำเป็นอย่างยิ่ง ดังนั้นจึงมีนักวิจัยจำนวนมากได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาดังกล่าว อาทิ เช่น Peng และ Yao [ ] สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำที่กำหนดโดย:

$$\begin{cases} x = x_1 \in C, \\ F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \gamma_n A u_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n v + \beta_n x_n + (1 - \alpha_n + \beta_n) W_n P_C(u_n - \gamma_n A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

ภายใต้การวางเงื่อนไขของฟังก์ชัน F , φ, W_n และลำดับ $\{\alpha_n\}$ ลำดับ $\{\beta_n\}$ ลำดับ $\{\gamma_n\}$ และลำดับ $\{r_n\}$ Peng และ Yao ได้พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ และลำดับ $\{u_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาสมดุลผสม ปัญหาอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึง

2.5 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

เนื้อหานี้จะให้รายละเอียดที่สำคัญของนิยาม ทฤษฎีบท บทตั้ง (Lemma) และองค์ความรู้อื่นๆ ที่จำเป็นอย่างยิ่งต่อการพิสูจน์ทฤษฎีการลู่เข้าในบทที่ 3 โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญดังต่อไปนี้ กำหนดให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตพร้อมกับผลคูณภายใน $\langle \ldots \rangle$ และ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของ H ให้ $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก A ว่า *monotone* ถ้า

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in C$$

และเรียกฟังก์ชัน A ว่า *α-strongly monotone* ถ้ามีจำนวนจริงบวก $\alpha > 0$ ที่ทำให้

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq \alpha\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C$$

จากอสมการนี้ ทำให้ได้ว่า $\|Ax - Ay\| \geq \alpha\|x - y\|$ นั่นคือ A เป็นฟังก์ชัน *α-expansive* นอกจากนี้ จะเห็นว่าถ้า $\alpha = 1$ แล้วฟังก์ชัน A จะเป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย จากนิยามของฟังก์ชัน monotone ฟังก์ชัน α-expansive และฟังก์ชันแบบไม่ขยาย สามารถตรวจสอบได้ง่ายถึงความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน ดังนี้

strong monotonicity $\Rightarrow$ monotonicity

$\Downarrow$

expansiveness

จะเรียกฟังก์ชัน A ว่า *L-Lipschitz continuous* (หรือ *Lipschitzian*) ถ้ามีค่าคงที่ $L \geq 0$ ที่ทำให้

$$\|Ax - Ay\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in C$$

จะเรียกฟังก์ชัน A ว่า *α-inverse-strongly monotone* (หรือ *α-cocoercive*) ถ้ามีจำนวนจริงบวก $\alpha > 0$ ที่ทำให้

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq \alpha\|Ax - Ay\|^2, \quad \forall x, y \in C$$

จากนิยามดังกล่าวเห็นได้ชัดว่า ถ้า A เป็นฟังก์ชัน α-inverse-strongly monotone แล้ว A เป็นฟังก์ชัน monotone และ Lipschitz continuous ด้วย นอกจากนี้จะเห็นว่า ถ้า A เป็นฟังก์ชัน α-strongly และ L-Lipschitz continuous แล้ว A เป็น (α/L^2)-inverse-strongly monotone แต่ฟังก์ชัน inverse-strongly monotone ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชัน strongly monotone จะเรียกฟังก์ชัน A ว่า *relaxed c-cocoercive* ถ้ามีค่าคงที่ $c > 0$ ที่ทำให้

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq (-c)\|Ax - Ay\|^2, \quad \forall x, y \in C$$

และจะเรียกฟังก์ชัน A ว่า *relaxed (c,d)-cocoercive* ถ้ามีสองค่าคงที่ $c, d > 0$ ที่ทำให้

$$\langle Ax - Ay, x - y\rangle \geq (-c)\|Ax - Ay\|^2 + d\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C$$

จะเห็นว่าถ้า $c = 0$ แล้ว A เป็นฟังก์ชัน d-strongly monotone ดังนั้นจะเห็นว่าคลาสของฟังก์ชัน relaxed (c,d)-cocoercive จะโตกว่าคลาสของฟังก์ชัน strongly monotone ผลทำให้ได้ความสัมพันธ์ที่สำคัญตามมาคือ d-strong monotonicity $\Rightarrow$ relaxed (c, d)-cocoercivity

จากนิยามของฟังก์ชันดังกล่าว จะได้ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันที่สำคัญตามมาดังนี้ ถ้าตัวดำเนินการ (operator) เป็น Lipschitz continuous แล้ว relaxed cocoercivity จะเป็น strongly monotone แต่ strongly monotone จะไม่เป็น cocoercivity ดังอธิบายด้วยตัวอย่าง ดังนี้

ตัวอย่าง 1. ให้ $H = R$, $C = [1, \infty)$ และ $A : C \to H$ ซึ่งกำหนดโดย $Ax = x^2$, $x \in C$ สำหรับแต่ละ $x, y \in C$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\langle Ax - Ay, x - y\rangle &= (x^2 - y^2)(x - y) \\ &= (x + y)|x - y|^2 \\ &\geq 2|x - y|^2\end{aligned}$$

ดังนั้น A เป็น 2-strongly monotone พิจารณา สมมุติให้ A เป็น μ-cocoercive สำหรับบาง $\mu > 0$ จะได้ว่า $\langle Ax - Ay, x - y\rangle = (x + y)|x - y|^2 \geq \mu|x^2 - y^2|^2$ เป็นผลให้ $x + y \leq \frac{1}{\mu}$ สำหรับทุก $x, y \in [1, \infty)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น A จึงไม่เป็น μ-cocoercive สำหรับแต่ละ $\mu > 0$

ต่อไปจะให้ความหมายของฟังก์ชัน metric projection ซึ่งมีบทบาทและมีความสำคัญเป็นอย่างมากกับการประมาณค่า หาผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผันและปัญหาจุดตรึง โดยมีสาระสำคัญดังนี้ บริภูมิฮิลเบิร์ต H เป็นที่ทราบกันดีว่าแต่ละสมาชิก $x \in H$ จะมีสมาชิกใน C เพียงค่าเดียวเท่านั้นที่ใกล้ x ที่สุด และเขียนแทนสมาชิกนั้นด้วย $P_C x$ จากข้อเท็จจริงดังกล่าวทำให้ได้ว่า

$$\|x - P_C x\| \leq \|x - y\|, \quad \forall y \in C$$

และเรียกสมาชิก P_C ว่า *metric projection* ของ H ทั่วถึง C จากสมบัติดังกล่าว สามารถแสดงได้ง่ายว่า P_C เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายจาก H ทั่วถึง C และสอดคล้องกับสมบัติ

$$\langle x - y, P_C x - P_C y\rangle \geq \|P_C x - P_C y\|^2, \quad \forall x, y \in H \tag{2.5.1}$$

จากอสมการ (2.5.1) เป็นผลให้ได้ว่า

$$\|(x-y)-(P_Cx-P_Cy)\|^2 \le \|x-y\|^2 - \|P_Cx-P_Cy\|^2, \quad \forall x,y \in H \tag{2.5.2}$$

นอกจากสมบัติข้างต้นแล้วสมบัติที่สำคัญมากของ metric projection คือ: $P_Cx \in C$ และ

$$\langle x-P_Cx, y-P_Cx\rangle \le 0,$$
$$\|x-y\|^2 \ge \|x-P_Cx\|^2 + \|P_Cx-y\|^2 \tag{2.5.3}$$

สำหรับทุกสมาชิก $x \in H$ และสมาชิก $y \in C$ ซึ่งสามารถศึกษาข้อมูลและรายละเอียดได้จากผลงานของ Goebel และ Kirk [ ] การศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาสมดุลผสม เงื่อนไขและสมมุติฐานที่จำเป็นอย่างยิ่งของฟังก์กัน F, φ และเซตย่อย C โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญ คือ

(A1) $F(x,x) = 0$ สำหรับทุก $x \in C$;

(A2) F เป็นฟังก์ชัน monotone กล่าวคือ $F(x,y) + F(y,x) \le 0$ สำหรับทุก $x, y \in C$;

(A3) สำหรับแต่ละ $y \in C$ ฟังก์ชันที่กำหนดโดย $x \mapsto F(x,y)$ เป็น weakly upper semicontinuous;

(A4) สำหรับแต่ละ $x \in C$ ฟังก์ชันที่กำหนดโดย $y \mapsto F(x,y)$ เป็น convex;

(A5) สำหรับแต่ละ $x \in C$ ฟังก์ชันที่กำหนดโดย $y \mapsto F(x,y)$ เป็น lower semicontinuous;

(B1) สำหรับแต่ละ $x \in H$ และ $r > 0$ จะมีเซตย่อยที่มีขอบเขต $D_x \subseteq C$ และ $y_x \in C$ ที่ทำให้ สำหรับแต่ละ $z \in C \setminus D_x$,

$$F(z, y_x) + \varphi(y_x) + \frac{1}{r}\langle y_x - z, z - x\rangle < \varphi(z)$$

(B2) C เป็นเซตที่มีขอบเขต

การพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นในบทที่ 3 บทตั้ง ที่จำเป็นและสำคัญอย่างมากต่อการศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ผลเฉลยของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึง มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

บทตั้ง 2.5.1. *([ ]) ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ F เป็นฟังก์ชันที่ส่งจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) และให้ $\varphi : C \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ เป็น proper lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ สมมุติสอดคล้องกับเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่งระหว่าง (B1) หรือ (B2) สำหรับ $r > 0$ และ $x \in H$ กำหนดฟังก์ชัน $T_r : H \to C$ ดังนี้*

$$T_r(x) = \left\{ z \in C : F(z,y) + \varphi(y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x\rangle \ge \varphi(z), \quad \forall y \in C \right\}$$

สำหรับทุก $x \in H$ แล้วจะได้แต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง:

(1) สำหรับแต่ละ $x \in H$, $T_r(x) \neq \emptyset$;

(2) T_r ส่งไปที่ค่าเดียว;

(3) T_r เป็น firmly nonexpansive กล่าวคือ สำหรับแต่ละ $x, y \in H$,

$$\|T_r(x) - T_r(y)\|^2 \le \langle T_rx - T_ry, x - y\rangle;$$

(4) $F(T_r) = MEP(F, \varphi)$;

(5) $MEP(F, \varphi)$ เป็นเซตปิดและคอนเวกซ์

บทตั้ง 2.5.2. *([ ]) ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก ซึ่งสอดคล้องสมบัติดังนี้*

$$a_{n+1} \leq (1-\gamma_n)a_n + \delta_n$$

เมื่อ $\{\gamma_n\}$ เป็นลำดับใน $(0,1)$ และ $\{\delta_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข:

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty; \quad \text{(ii)} \limsup_{n\to\infty} \delta_n/\gamma_n \leq 0 \text{ หรือ } \sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n| < \infty$$

แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

บทตั้ง 2.5.3. *([ ]) ให้ $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ เป็นปริภูมิผลคูณภายใน สำหรับแต่ละ $x, y, z \in H$ และ $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1]$ โดยที่ $\alpha+\beta+\gamma = 1$ จะได้ว่า*

$$\begin{aligned}\|\alpha x + \beta y + \gamma z\|^2 = \alpha\|x\|^2 + \beta\|y\|^2 + \gamma\|z\|^2 - \alpha\beta\|x-y\|^2 \\ - \alpha\gamma\|x-z\|^2 - \beta\gamma\|y-z\|^2\end{aligned}$$

บทตั้ง 2.5.4. *([ ]) ให้ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตในปริภูมิบานาค X กำหนดให้ $\{b_n\}$ เป็นลำดับใน $[0,1]$ ซึ่ง $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$ สมมุติ $x_{n+1} = (1-b_n)y_n + b_n x_n$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 1$ และ $\limsup_{n\to\infty}(\|y_{n+1}-y_n\| - \|x_{n+1}-x_n\|) \leq 0$ แล้ว $\lim_{n\to\infty}\|y_n - x_n\| = 0$*

บทตั้ง 2.5.5. *([ ]) (Demi-closedness principle) สมมุติให้ T เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายที่ส่งบนเซตย่อยปิด และคอนเวกซ์ C ของปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง H ถ้า T มีจุดตรึง แล้ว $I-T$ เป็น demi-closed กล่าวคือ สำหรับแต่ละลำดับ $\{x_n\}$ ใน C ถ้าลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบอ่อนสู่บางสมาชิก $x \in C$ (เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x_n \rightharpoonup x \in C$) และลำดับ $\{(I-T)x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่บางสมาชิก y (เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $(I-T)x_n \to y$) แล้ว $(I-T)x = y$ เมื่อ I เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์บน H*

บทตั้ง 2.5.6. *ในปริภูมิฮิลเบิร์ตเชิงจริง H จะได้ว่า*

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, x+y\rangle, \quad \forall x, y \in H$$

บทตั้ง 2.5.7. *([ ]) ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H และ $A_i : C \to H$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้น สำหรับแต่ละ $i = 1,2,3$ กำหนดให้ $G : C \to C$ เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย:*

$$\begin{aligned}G(x) = P_C\big[P_C\big(P_C(x-\lambda_3 A_3 x) - \lambda_2 A_2 P_C(x-\lambda_3 A_3 x)\big) \\ - \lambda_1 A_1 P_C\big(P_C(x-\lambda_3 A_3 x) - \lambda_2 A_2 P_C(x-\lambda_3 A_3 x)\big)\big], \quad \forall x \in C\end{aligned}$$

กำหนดให้ $x^*, y^*, z^* \in C$ จะได้ว่า (x^*, y^*, z^*) เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4.3) ก็ต่อเมื่อ $x^* \in F(G)$ $y^* = P_C(z^* - \lambda_2 A_2 z^*)$ และ $z^* = P_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)$

ในโครงการวิจัยนี้จะเขียนแทนเซตจุดตรึงของฟังก์ชัน G โดย $GVI(C, A_1, A_2, A_3)$

จากข้อเท็จจริงและแนวคิดของการประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาดุลยภาพผสม ผลเฉลยของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต ดังนั้นในโครงการวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบปัญหาทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึง และปัญหาดุลยภาพผสม รวมทั้งได้พิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้น โดยรายละเอียดจะแสดงไว้ในเนื้อหาของบทที่ 3

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

เนื้อหาในบทนี้ ผู้วิจัยนำเสนอระเบียบวิธีการประมาณค่าเพื่อหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต พร้อมทั้งพิสูจน์ทฤษฎีการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาดังกล่าว โดยปัญหาระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน นั้นศึกษากรณีฟังก์ชันประเภท α -inverse-strongly monotone และทฤษฎีบทที่ได้นั้นจำเป็นและสำคัญอย่างยิ่งกับการนำไปประยุกต์ใช้ ทั้งทางวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์ และวิทยาศาสตร์ประยุกต์

3.1 ระเบียบวิธีประมาณค่าแบบใหม่

ระเบียบวิธีทำซ้ำที่ใช้ในการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญดังนี้: ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้เวกเตอร์ v และ $x_1 \in C$ และสร้างลำดับ $\{u_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ และ $\{x_n\}$ โดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ z_n = P_C(u_n - \lambda_3 A_3 u_n), \\ y_n = P_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) T P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

เมื่อ λ_i $(i = 1, 2, 3)$ เป็นจำนวนจริงที่มากกว่าศูนย์ $\{r_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $(0, \infty)$ $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $[0, 1]$ และ T เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าจะกล่าวรายละเอียดในเนื้อหาต่อไป

3.2 ทฤษฎีการลู่เข้าแบบเข้ม

การศึกษาทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำ (3.1.1) สู่ผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต และจากการวิจัยพบทฤษฎีบท และองค์ความรู้ใหม่ที่สำคัญโดยมีเนื้อหาสาระสำคัญดังต่อไปนี้

บทตั้ง 3.2.1. *ให้ C เป็นเซ็ตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซ็ตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3$ ถ้า $A_i : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α_i -inverse-strongly monotone และ $\lambda_i \in (0, 2\alpha_i]$ แล้ว $G : C \to C$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย เมื่อ G เป็นฟังก์ชันที่นิยามเหมือนใน บทตั้ง 2.5.7*

พิสูจน์. สำหรับแต่ละ $x, y \in C$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}
\|G(x) - G(y)\| &= \|P_C\big[P_C\big(P_C(I-\lambda_3A_3)x - \lambda_2A_2P_C(I-\lambda_3A_3)x\big) \\
&\quad - \lambda_1A_1P_C\big(P_C(I-\lambda_3A_3)x - \lambda_2A_2P_C(I-\lambda_3A_3)x\big)\big] \\
&\quad - P_C\big[P_C\big(P_C(I-\lambda_3A_3)y - \lambda_2A_2P_C(I-\lambda_3A_3)y\big) \\
&\quad - \lambda_1A_1P_C\big(P_C(I-\lambda_3A_3)y - \lambda_2A_2P_C(I-\lambda_3A_3)y\big)\big]\| \\
&\le \|P_C\big(P_C(I-\lambda_3A_3)x - \lambda_2A_2P_C(I-\lambda_3A_3)x\big) \\
&\quad - \lambda_1A_1P_C\big(P_C(I-\lambda_3A_3)x - \lambda_2A_2P_C(I-\lambda_3A_3)x\big) \\
&\quad - \big[P_C\big(P_C(I-\lambda_3A_3)y - \lambda_2A_2P_C(I-\lambda_3A_3)y\big) \\
&\quad - \lambda_1A_1P_C\big(P_C(I-\lambda_3A_3)y - \lambda_2A_2P_C(I-\lambda_3A_3)y\big)\big]\| \\
&= \|(I-\lambda_1A_1)P_C(I-\lambda_2A_2)P_C(I-\lambda_3A_3)x \\
&\quad - (I-\lambda_1A_1)P_C(I-\lambda_2A_2)P_C(I-\lambda_3A_3)y\| \qquad (3.2.1)
\end{aligned}$$

เป็นที่ทราบกันดีว่าถ้า $\lambda \in (0, 2\alpha]$ และ $A : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α-inverse-strongly monotone แล้ว $I - \lambda A$ เป็นฟังกันแบบไม่ขยาย ดังนั้นโดยสมมุติฐานจะได้ $I - \lambda_i A_i$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3$ เป็นผลให้ $(I - \lambda_1A_1)P_C(I - \lambda_2A_2)P_C(I - \lambda_3A_3)$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายด้วย ดังนั้นจากสมการ (3.2.1) จะได้ว่า G เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย □

***ทฤษฎีบท* 3.2.2.** *ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ F เป็นฟังก์ชันที่ส่งจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) และ $\varphi : C \to \mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชัน proper lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3$ กำหนดให้ $A_i : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α_i-inverse-strongly monotone และ T เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C โดยที่ $\Omega = F(T)\bigcap GVI(C, A_1, A_2, A_3)\bigcap MEP(F, \varphi) \neq \emptyset$ สมมุติเงื่อนไข (B1) หรือ (B2) เป็นจริง กำหนดให้ v และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใดๆใน C และ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}, \{u_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย*

$$\begin{cases}
F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \ge 0, \quad \forall y \in C, \\
z_n = P_C(u_n - \lambda_3A_3u_n), \\
y_n = P_C(z_n - \lambda_2A_2z_n), \\
x_{n+1} = a_nv + b_nx_n + (1 - a_n - b_n)TP_C(y_n - \lambda_1A_1y_n), \quad n \ge 1,
\end{cases}$$

เมื่อ $\lambda_i \in (0, 2\alpha_i)$ สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3$ ถ้า $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นสองลำดับใน $[0, 1]$ และ $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ สอดคล้องเงื่อนไขดังต่อไปนี้

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *และ* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ *และ* $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$

แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\bar{x} = P_\Omega v$ และ $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.5.6) เมื่อ $\bar{y} = P_C(\bar{z} - \lambda_2A_2\bar{z})$ และ $\bar{z} = P_C(\bar{x} - \lambda_3A_3\bar{x})$

พิสูจน์. สำหรับการพิสูจน์ได้แบ่งออกเป็น 5 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1. จะแสดงว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

กำหนดให้ $x^* \in \Omega$ และ $\{T_{r_n}\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันที่กำหนดเหมือนในบทตั้ง 2.5.1 จากบทตั้ง 2.5.7

จะได้ว่า

$$x^* = P_C\big[P_C\big(P_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*) - \lambda_2 A_2 P_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)\big) \\ - \lambda_1 A_1 P_C\big(P_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*) - \lambda_2 A_2 P_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)\big)\big]$$

กำหนดให้ $y^* = P_C(z^* - \lambda_2 A_2 z^*)$, $z^* = P_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)$ และ $t_n = P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n)$ จะเห็นว่า $x^* = P_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)$ และ

$$x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) T t_n$$

เนื่องจาก $I - \lambda_i$ $(i = 1, 2, 3)$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ดังนั้น

$$\begin{aligned} \|t_n - x^*\| &= \|P_C(I - \lambda_1 A_1) y_n - P_C(I - \lambda_1 A_1) y^*\| \\ &\le \|y_n - y^*\| = \|P_C(I - \lambda_2 A_2) z_n - P_C(I - \lambda_2 A_2) z^*\| \\ &\le \|z_n - z^*\| = \|P_C(I - \lambda_3 A_3) u_n - P_C(I - \lambda_3 A_3) x^*\| \\ &\le \|u_n - x^*\| = \|T_{r_n} x_n - T_{r_n} x^*\| \le \|x_n - x^*\| \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

ซึ่งเป็นผลให้

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &= \|a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) T t_n - x^*\| \\ &\le a_n \|v - x^*\| + b_n \|x_n - x^*\| + (1 - a_n - b_n) \|t_n - x^*\| \\ &\le a_n \|v - x^*\| + b_n \|x_n - x^*\| + (1 - a_n - b_n) \|x_n - x^*\| \\ &\le \max\{\|v - x^*\|, \|x_1 - x^*\|\} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต ผลที่ตามมาคือ $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, $\{t_n\}$, $\{A_1 y_n\}$, $\{A_2 z_n\}$, $\{A_3 u_n\}$ และ $\{T t_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตด้วย

ขั้นตอนที่ 2. ในขั้นตอนนี้จะแสดงว่า $\|x_{n+1} - x_n\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$
เนื่องจากฟังก์ชัน P_C และ $I - \lambda_i A_i$ $(i = 1, 2, 3)$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ดังนั้น

$$\begin{aligned} \|t_{n+1} - t_n\| &= \|P_C(y_{n+1} - \lambda_1 A_1 y_{n+1}) - P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n)\| \le \|y_{n+1} - y_n\| \\ &= \|P_C(z_{n+1} - \lambda_2 A_2 z_{n+1}) - P_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n)\| \le \|z_{n+1} - z_n\| \\ &= \|P_C(u_{n+1} - \lambda_3 A_3 u_{n+1}) - P_C(u_n - \lambda_3 A_3 u_n)\| \\ &\le \|u_{n+1} - u_n\| \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

นอกจากนี้ เนื่องจาก $u_n = T_{r_n} x_n \in \mathrm{dom}\varphi$ และ $u_{n+1} = T_{r_{n+1}} x_{n+1} \in \mathrm{dom}\varphi$ ดังนั้น

$$F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \ge 0, \quad \forall y \in C \tag{3.2.4}$$

และ

$$F(u_{n+1}, y) + \varphi(y) - \varphi(u_{n+1}) + \frac{1}{r_{n+1}}\langle y - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1}\rangle \ge 0, \quad \forall y \in C \tag{3.2.5}$$

กำหนดให้ $y = u_{n+1}$ ในสมการ (3.2.4) และ $y = u_n$ ในสมการ (3.2.5) เพราะฉะนั้น

$$F(u_n, u_{n+1}) + \varphi(u_{n+1}) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle u_{n+1} - u_n, u_n - x_n\rangle \ge 0$$

และ

$$F(u_{n+1}, u_n) + \varphi(u_n) - \varphi(u_{n+1}) + \frac{1}{r_{n+1}}\langle u_n - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1}\rangle \geq 0$$

เนื่องจาก F เป็นฟังก์ชัน monotone ดังนั้น

$$\left\langle u_{n+1} - u_n, \frac{u_n - x_n}{r_n} - \frac{u_{n+1} - x_{n+1}}{r_{n+1}} \right\rangle \geq 0$$

และ

$$\left\langle u_{n+1} - u_n, u_n - u_{n+1} + u_{n+1} - x_n - \frac{r_n}{r_{n+1}}(u_{n+1} - x_{n+1}) \right\rangle \geq 0$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\|u_{n+1} - u_n\|^2 &\leq \left\langle u_{n+1} - u_n, x_{n+1} - x_n + (1 - \frac{r_n}{r_{n+1}})(u_{n+1} - x_{n+1}) \right\rangle \\ &\leq \|u_{n+1} - u_n\| \left\{ \|x_{n+1} - x_n\| + |1 - \frac{r_n}{r_{n+1}}| \|u_{n+1} - x_{n+1}\| \right\}\end{aligned}$$

และ

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{r_{n+1}}|r_{n+1} - r_n| \|u_{n+1} - x_{n+1}\| \tag{3.2.6}$$

ผลจากสมการ (3.2.3) และ (3.2.6) จะได้ว่า

$$\|t_{n+1} - t_n\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \frac{1}{r_{n+1}}|r_{n+1} - r_n| \|u_{n+1} - x_{n+1}\| \tag{3.2.7}$$

กำหนดให้ $x_{n+1} = b_n x_n + (1 - b_n) w_n$ สำหรับทุก $n \geq 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{x_{n+2} - b_{n+1}x_{n+1}}{1 - b_{n+1}} - \frac{x_{n+1} - b_n x_n}{1 - b_n} \\ &= \frac{a_{n+1}v + (1 - a_{n+1} - b_{n+1})Tt_{n+1}}{1 - b_{n+1}} - \frac{a_n v + (1 - a_n - b_n)Tt_n}{1 - b_n} \\ &= \frac{a_{n+1}}{1 - b_{n+1}}(v - Tt_{n+1}) + \frac{a_n}{1 - b_n}(Tt_n - v) + Tt_{n+1} - Tt_n \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

จากสมการ (3.2.7) และ (3.2.8) เป็นผลให้

$$\begin{aligned} \|w_{n+1} - w_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| &\leq \frac{a_{n+1}}{1 - b_{n+1}}\|v - Tt_{n+1}\| + \frac{a_n}{1 - b_n}\|Tt_n - v\| \\ &\quad + \|t_{n+1} - t_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \\ &\leq \frac{a_{n+1}}{1 - b_{n+1}}\|v - Tt_{n+1}\| + \frac{a_n}{1 - b_n}\|Tt_n - v\| \\ &\quad + \frac{1}{r_{n+1}}|r_{n+1} - r_n| \|u_{n+1} - x_{n+1}\| \end{aligned}$$

ดังนั้นโดยเงื่อนไข (C1)--(C3) ทำให้ได้ว่า

$$\limsup_{n\to\infty} \|w_{n+1} - w_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \leq 0$$

โดยบทตั้ง 2.5.4 จะได้ว่า $\|x_n - w_n\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n\to\infty} (1 - b_n)\|w_n - x_n\| = 0 \tag{3.2.9}$$

ขั้นตอนที่ 3. ในขั้นตอนนี้จะแสดงว่า $\|Tt_n - t_n\| \to 0$ เมื่อ $n \to 0$
เนื่องจาก

$$x_{n+1} - x_n = a_n(v - x_n) + (1 - a_n - b_n)(Tt_n - x_n)$$

เพราะฉะนั้น

$$\|Tt_n - x_n\| \to 0 \quad \text{เมื่อ} \quad n \to \infty \tag{3.2.10}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} \|x_n - u_n\| = 0$ จากบทตั้ง 2.5.1(3) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\|u_n - x^*\|^2 = \|T_{r_n}x_n - T_{r_n}x^*\|^2 &\le \langle T_{r_n}x_n - T_{r_n}x^*, x_n - x^*\rangle \\ &= \langle u_n - x^*, x_n - x^*\rangle = \frac{1}{2}\{\|u_n - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 - \|x_n - u_n\|^2\}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\|u_n - x^*\|^2 \le \|x_n - x^*\|^2 - \|x_n - u_n\|^2 \tag{3.2.11}$$

โดยบทตั้ง 2.5.3 สมการ (3.2.2) และ (3.2.11) จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x^*\|^2 &\le a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|t_n - x^*\|^2 \\ &\le a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|u_n - x^*\|^2 \\ &\le a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\ &\quad + (1 - a_n - b_n)\left[\|x_n - x^*\|^2 - \|x_n - u_n\|^2\right] \\ &\le a_n\|v - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 - (1 - a_n - b_n)\|x_n - u_n\|^2\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}&(1 - a_n - b_n)\|x_n - u_n\|^2 \le a_n\|v - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - x^*\|^2 \\ &\le a_n\|v - x^*\|^2 + (\|x_n - x^*\| + \|x_{n+1} - x^*\|)\|x_{n+1} - x_n\|\end{aligned}$$

โดยเงื่อนไข (C1) (C2) และสมการ (3.2.9) ทำให้ได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - u_n\| = 0 \tag{3.2.12}$$

ดังนั้นผลจากสมการ (3.2.10) และ (3.2.12) จะได้ว่า

$$\|Tt_n - u_n\| \le \|Tt_n - x_n\| + \|x_n - u_n\| \to 0 \quad \text{เมื่อ} \quad n \to \infty \tag{3.2.13}$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\|A_1y_n - A_1y^*\| \to 0$, $\|A_2z_n - A_2z^*\| \to 0$ และ $\|A_3u_n - A_3x^*\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ ผลจากสมการ (3.2.2) และ A_1 เป็นฟังก์ชัน α_1-inverse-strongly monotone ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 &\le a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|t_n - x^*\|^2 \\
&= a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\|P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - P_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\|^2 \\
&\le a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\|(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - (y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\|^2 \\
&\le a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\left[\|y_n - y^*\|^2 + \lambda_1(\lambda_1 - 2\alpha_1)\|A_1y_n - A_1y^*\|^2\right] \\
&\le a_n\|v - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\lambda_1(\lambda_1 - 2\alpha_1)\|A_1y_n - A_1y^*\|^2 \qquad (3.2.14)
\end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน สำหรับแต่ละ $i = 2, 3$ เนื่องจาก A_i เป็นฟังก์ชัน α_i-inverse-strongly monotone $\|t_n - x^*\| \le \|y_n - y^*\|$ และ $\|y_n - y^*\| \le \|z_n - z^*\|$ สามารถตรวจสอบได้โดยง่ายว่า

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 &\le a_n\|v - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\lambda_2(\lambda_2 - 2\alpha_2)\|A_2z_n - A_2z^*\|^2 \qquad (3.2.15)
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 &\le a_n\|v - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\lambda_3(\lambda_3 - 2\alpha_3)\|A_3u_n - A_3x^*\|^2 \qquad (3.2.16)
\end{aligned}$$

ดังนั้นโดยสมการ (3.2.14) (3.2.15) และ (3.2.16) จะได้

$$\begin{aligned}
-(1 - a_n - b_n)\lambda_1(\lambda_1 - 2\alpha_1)\|A_1y_n - A_1y^*\|^2 &\le a_n\|v - x^*\|^2 \\
&\quad + (\|x_n - x^*\| + \|x_{n+1} - x^*\|)\|x_{n+1} - x_n\|, \\
-(1 - a_n - b_n)\lambda_2(\lambda_2 - 2\alpha_2)\|A_2z_n - A_2z^*\|^2 &\le a_n\|v - x^*\|^2 \\
&\quad + (\|x_n - x^*\| + \|x_{n+1} - x^*\|)\|x_{n+1} - x_n\|
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
-(1 - a_n - b_n)\lambda_3(\lambda_3 - 2\alpha_3)\|A_3u_n - A_3x^*\|^2 &\le a_n\|v - x^*\|^2 \\
&\quad + (\|x_n - x^*\| + \|x_{n+1} - x^*\|)\|x_{n+1} - x_n\|
\end{aligned}$$

ดังนั้นโดยเงื่อนไข (C1) (C2) และสมการ (3.2.9) จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\|A_1y_n - A_1y^*\| = \lim_{n\to\infty}\|A_2z_n - A_2z^*\| = \lim_{n\to\infty}\|A_3u_n - A_3x^*\| = 0 \qquad (3.2.17)$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\|Tt_n - t_n\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ ผลจากสมการ (2.5.1) (3.2.2) และการที่ฟังก์ชัน $I - \lambda_2 A_2$ และ $I - \lambda_3 A_3$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\|y_n - y^*\|^2 &= \|P_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n) - P_C(z^* - \lambda_2 A_2 z^*)\|^2 \\
&\le \langle (z_n - \lambda_2 A_2 z_n) - (z^* - \lambda_2 A_2 z^*), y_n - y^* \rangle \\
&= \frac{1}{2}\big[\|(z_n - \lambda_2 A_2 z_n) - (z^* - \lambda_2 A_2 z^*)\|^2 + \|y_n - y^*\|^2 \\
&\quad - \|(z_n - \lambda_2 A_2 z_n) - (z^* - \lambda_2 A_2 z^*) - (y_n - y^*)\|^2\big] \\
&\le \frac{1}{2}\big[\|z_n - z^*\|^2 + \|y_n - y^*\|^2 \\
&\quad - \|(z_n - y_n) - (z^* - y^*) - \lambda_2(A_2 z_n - A_2 z^*)\|^2\big] \\
&\le \frac{1}{2}\big[\|x_n - x^*\|^2 + \|y_n - y^*\|^2 - \|(z_n - y_n) - (z^* - y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_2\langle (z_n - y_n) - (z^* - y^*), A_2 z_n - A_2 z^* \rangle - \lambda_2^2 \|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2\big]
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\|z_n - z^*\|^2 &= \|P_C(u_n - \lambda_3 A_3 u_n) - P_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)\|^2 \\
&\le \langle (u_n - \lambda_3 A_3 u_n) - (x^* - \lambda_3 A_3 x^*), z_n - z^* \rangle \\
&= \frac{1}{2}\big[\|(u_n - \lambda_3 A_3 u_n) - (x^* - \lambda_3 A_3 x^*)\|^2 + \|z_n - z^*\|^2 \\
&\quad - \|(u_n - \lambda_3 A_3 u_n) - (x^* - \lambda_3 A_3 x^*) - (z_n - z^*)\|^2\big] \\
&\le \frac{1}{2}\big[\|u_n - x^*\|^2 + \|z_n - z^*\|^2 \\
&\quad - \|(u_n - z_n) - (x^* - z^*) - \lambda_3(A_3 u_n - A_3 x^*)\|^2\big] \\
&\le \frac{1}{2}\big[\|x_n - x^*\|^2 + \|z_n - z^*\|^2 - \|(u_n - z_n) - (x^* - z^*)\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_3\langle (u_n - z_n) - (x^* - z^*), A_3 u_n - A_3 x^* \rangle - \lambda_3^2 \|A_3 u_n - A_3 x^*\|^2\big]
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\|y_n - y^*\|^2 \le \|x_n - x^*\|^2 &- \|(z_n - y_n) - (z^* - y^*)\|^2 \\
&+ 2\lambda_2\langle (z_n - y_n) - (z^* - y^*), A_2 z_n - A_2 z^* \rangle
\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

และ

$$\begin{aligned}
\|z_n - z^*\|^2 \le \|x_n - x^*\|^2 &- \|(u_n - z_n) - (x^* - z^*)\|^2 \\
&+ 2\lambda_3\langle (u_n - z_n) - (x^* - z^*), A_3 u_n - A_3 x^* \rangle
\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

จากสมการ (3.2.18) และ (3.2.19) จะได้

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2 &\le a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)\|y_n-y^*\|^2\\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\big[\|x_n-x^*\|^2-\|(z_n-y_n)-(z^*-y^*)\|^2\\
&\quad+2\lambda_2\langle(z_n-y_n)-(z^*-y^*),A_2z_n-A_2z^*\rangle\big]\\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad-(1-a_n-b_n)\|(z_n-y_n)-(z^*-y^*)\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)2\lambda_2\|(z_n-y_n)-(z^*-y^*)\|\|A_2z_n-A_2z^*\|
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2 &\le a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)\|z_n-z^*\|^2\\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\big[\|x_n-x^*\|^2-\|(u_n-z_n)-(x^*-z^*)\|^2\\
&\quad+2\lambda_3\langle(u_n-z_n)-(x^*-z^*),A_3u_n-A_3x^*\rangle\big]\\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2-(1-a_n-b_n)\|(u_n-z_n)-(x^*-z^*)\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)2\lambda_3\|(u_n-z_n)-(x^*-z^*)\|\|A_3u_n-A_3x^*\|
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
&(1-a_n-b_n)\|(z_n-y_n)-(z^*-y^*)\|^2\\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)2\lambda_2\|(z_n-y_n)-(z^*-y^*)\|\|A_2z_n-A_2z^*\|\\
&\quad+(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_{n+1}-x_n\|
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
&(1-a_n-b_n)\|(u_n-z_n)-(x^*-z^*)\|^2\\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)2\lambda_3\|(u_n-z_n)-(x^*-z^*)\|\|A_3u_n-A_3x^*\|\\
&\quad+(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_{n+1}-x_n\|
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นโดยเงื่อนไข (C1) (C2) และผลจากสมการ (3.2.9) (3.2.17) ทำให้ได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}\|(z_n-y_n)-(z^*-y^*)\|=\lim_{n\to\infty}\|(u_n-z_n)-(x^*-z^*)\|=0 \tag{3.2.20}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\|(u_n-y_n)-(x^*-y^*)\| &\le \|(z_n-y_n)-(z^*-y^*)\|\\
&\quad+\|(u_n-z_n)-(x^*-z^*)\|\to 0 \text{ เมื่อ } n\to\infty
\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

นอกจากนี้โดยบทตั้ง 2.5.6 และสมการ (2.5.2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\|^2 &= \|(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - (y^* - \lambda_1 A_1 y^*) \\
&\quad - \left[P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - P_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\right] + \lambda_1(A_1 y_n - A_1 y^*)\|^2 \\
&\le \|(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - (y^* - \lambda_1 A_1 y^*) - \left[P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - P_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\right]\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_1 \langle A_1 y_n - A_1 y^*, (y_n - t_n) + (x^* - y^*)\rangle \\
&\le \|(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - (y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\|^2 - \|P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - P_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_1 \|A_1 y_n - A_1 y^*\| \|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \\
&\le \|(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - (y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\|^2 - \|TP_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - TP_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_1 \|A_1 y_n - A_1 y^*\| \|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \\
&\le \|(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - (y^* - \lambda_1 A_1 y^*) \\
&\quad - (Tt_n - x^*)\| \left[\|(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - (y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\| + \|Tt_n - x^*\|\right] \\
&\quad + 2\lambda_1 \|A_1 y_n - A_1 y^*\| \|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \\
&= \|u_n - Tt_n + x^* - y^* - (u_n - y_n) \\
&\quad - \lambda_1 (A_1 y_n - A_1 y^*)\| \left[\|(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - (y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\| + \|Tt_n - x^*\|\right] \\
&\quad + 2\lambda_1 \|A_1 y_n - A_1 y^*\| \|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\|
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นจากสมการ (3.2.13) (3.2.17) และสมการ (3.2.21) จะได้ $\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \to 0$ เมื่อ $n \to \infty$ จากผลดังกล่าวและผลจากสมการ (3.2.13) และ (3.2.20) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\|Tt_n - t_n\| &\le \|Tt_n - u_n\| + \|(u_n - z_n) - (x^* - z^*)\| + \|(z_n - y_n) - (z^* - y^*)\| \\
&\quad + \|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \to 0 \quad \text{เมื่อ} \quad n \to \infty
\end{aligned} \tag{3.2.22}$$

ขั้นตอนที่ 4. ในขั้นตอนนี้จะแสดงว่า $\limsup_{n\to\infty}\langle v - \overline{x}, x_n - \overline{x}\rangle \le 0$ เมื่อ $\overline{x} = P_\Omega v$ ในข้อเท็จจริงแล้ว เนื่องจาก $\{t_n\}$ และ $\{Tt_n\}$ เป็นสองลำดับที่มีขอบเขตใน C ดังนั้นสามารถเลือกลำดับย่อย $\{t_{n_i}\}$ ของ $\{t_n\}$ ที่ทำให้ $t_{n_i} \rightharpoonup z \in C$ และ

$$\limsup_{n\to\infty}\langle v - \overline{x}, Tt_n - \overline{x}\rangle = \lim_{i\to\infty}\langle v - \overline{x}, Tt_{n_i} - \overline{x}\rangle$$

แต่ $\lim_{n\to\infty}\|Tt_n - t_n\| = 0$ ดังนั้น $Tt_{n_i} \rightharpoonup z$ เมื่อ $i \to \infty$

ต่อไปจะแสดงว่า $z \in \Omega$

เนื่องจาก $t_{n_i} \rightharpoonup z$ และ $\|Tt_n - t_n\| \to 0$ ดังนั้นโดยบทตั้ง 2.5.5 จะได้ว่า $z \in F(T)$

ผลจากสมการ (3.2.22) และ (3.2.10) จะได้ว่า

$$\|t_n - x_n\| \le \|Tt_n - t_n\| + \|Tt_n - x_n\| \to 0 \quad \text{เมื่อ} \quad n \to \infty$$

นอกจากนี้ โดยบทตั้ง 3.2.1 จะเห็นว่า $G : C \to C$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ดังนั้น

$$\begin{aligned}
&\|t_n - G(t_n)\| = \|P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - G(t_n)\| \\
&= \|P_C\big[P_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n) - \lambda_1 A_1 P_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n)\big] - G(t_n)\| \\
&= \|P_C\big[P_C(P_C(u_n - \lambda_3 A_3 u_n) - \lambda_2 A_2 P_C(u_n - \lambda_3 A_3 u_n)) \\
&\quad - \lambda_1 A_1 P_C(P_C(u_n - \lambda_3 A_3 u_n) - \lambda_2 A_2 P_C(u_n - \lambda_3 A_3 u_n))\big] - G(t_n)\| \\
&= \|G(u_n) - G(t_n)\| \le \|u_n - t_n\| \\
&\le \|u_n - x_n\| + \|x_n - t_n\|
\end{aligned}$$

เป็นผลให้ $\lim_{n\to\infty} \|t_n - G(t_n)\| = 0$ จากบทตั้ง 2.5.5 จะเห็นว่า $z \in GVI(C, A_1, A_2, A_3)$ เนื่องจาก $t_{n_i} \rightharpoonup z$ และ $\|x_n - t_n\| \to 0$ จะได้ว่า $x_{n_i} \rightharpoonup z$ เนื่องจาก $\|u_n - x_n\| \to 0$ ดังนั้น $u_{n_i} \rightharpoonup z$ โดยการใช้หลักการแสดงเช่นเดียวกับผลงานของ [, Theorem 3.1, pp. 1825] สามารถแสดงได้โดยง่าย ว่า $z \in MEP(F, \varphi)$ เพราะฉะนั้น $z \in \Omega$

นอกจากนี้จากสมการ (2.5.3) (3.2.10) และ $Tt_{n_i} \rightharpoonup z$ เมื่อ $i \to \infty$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\langle v - \overline{x}, x_n - \overline{x}\rangle &= \limsup_{n\to\infty}\langle v - \overline{x}, Tt_n - \overline{x}\rangle = \lim_{i\to\infty}\langle v - \overline{x}, Tt_{n_i} - \overline{x}\rangle \\
&= \langle v - \overline{x}, z - \overline{x}\rangle \le 0 \qquad (3.2.23)
\end{aligned}$$

ขั้นตอนที่ 5. ในขั้นตอนสุดท้ายนี้จะแสดงว่า $x_n \to \overline{x}$ เมื่อ $n \to \infty$
เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - \overline{x}\|^2 &= \langle a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n)Tt_n - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle \\
&= a_n\langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle + b_n\langle x_n - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\langle Tt_n - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle \\
&\le a_n\langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle + \frac{1}{2}b_n(\|x_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}(1 - a_n - b_n)(\|t_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2) \\
&\le a_n\langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle + \frac{1}{2}b_n(\|x_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}(1 - a_n - b_n)(\|x_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2) \\
&= a_n\langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle + \frac{1}{2}(1 - a_n)(\|x_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2)
\end{aligned}$$

จะได้ว่า

$$\|x_{n+1} - \overline{x}\|^2 \le (1 - a_n)\|x_n - \overline{x}\|^2 + 2a_n\langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle$$

ดังนั้นโดยเงื่อนไขของ (C1) และสมการ (3.2.23) ผลจากบทตั้ง 2.5.2 จะได้ว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\overline{x}$ □

ถ้าฟังก์ชัน $\varphi = 0$ จากทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้บทแทรกที่สำคัญตามมาดังนี้

บทแทรก 3.2.3. *ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ F เป็นฟังก์ชันจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3$ กำหนดให้ $A_i : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α_i-inverse-strongly monotone และ T เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C ที่ทำให้ $\Omega = F(T) \bigcap GVI(C, A_1, A_2, A_3) \bigcap EP(F) \neq \emptyset$ กำหนดให้ v และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใดๆใน C และ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}, \{u_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย*

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ z_n = P_C(x_n - \lambda_3 A_3 x_n), \\ y_n = P_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) T P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

ถ้า $\lambda_i \in (0, 2\alpha_i)$ สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3$ และ $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ $\{r_n\}$ เป็นลำดับที่มีเงื่อนไขเหมือนในทฤษฎีบท 3.2.2 แล้ว $\{x_n\}$ จะลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\overline{x} = P_\Omega v$ และ $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4.3) เมื่อ $\overline{y} = P_C(\overline{z} - \lambda_2 A_2 \overline{z})$ และ $\overline{z} = P_C(\overline{x} - \lambda_3 A_3 \overline{x})$

ถ้าฟังก์ชัน $A_3 = 0$, $\varphi = 0$, $F(x, y) = 0$ และ $r_n = 1$ สำหรับแต่ละ $x, y \in C$ และทุกค่า $n \in \mathbb{N}$ ในทฤษฎีบท 3.2.2 แล้ว $z_n = x_n$ ผลจากทฤษฎีบท 3.2.2 จะได้บทแทรกที่สำคัญตามมาดังนี้

บทแทรก 3.2.4. *[, Theorem 3.1] ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ $A_1, A_2 : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α_1-inverse-strongly monotone และ α_2-inverse-strongly monotone ตามลำดับ กำหนดให้ T เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C ที่ทำให้ $\Omega = F(T) \bigcap GVI(C, A_1, A_2) \neq \emptyset$ กำหนดให้ v และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใดๆใน C และ $\{x_n\}, \{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย*

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_2 A_2 x_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) T P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

ถ้า $\lambda_1 \in (0, 2\alpha_1)$, $\lambda_2 \in (0, 2\alpha_2)$ และ $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่มีเงื่อนไขเหมือนในทฤษฎีบท 3.2.2 แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\overline{x} = P_\Omega v$ และ $(\overline{x}, \overline{y})$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4.1) เมื่อ $\overline{y} = P_C(\overline{x} - \lambda_2 A_2 \overline{x})$

บทที่ 4

ผลดำเนินการวิจัย

การประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาระบบใหม่ของอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปในปริภูมิฮิลเบิร์ต เป็นงานวิจัยที่มุ่งแสวงหาข้อเท็จจริงเกี่ยวกับการหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยอาศัยความรู้ของทฤษฎีจุดตรึงเข้ามาช่วยในการวิจัย ผลจากการวิจัยได้ข้อเท็จจริงที่สำคัญโดยมีเนื้อหาสาระดังต่อไปนี้

4.1 ระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาวิจัย

ระเบียบวิธีทำซ้ำที่ใช้ศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย โดยกำหนดระเบียบวิธีทำซ้ำดังนี้: ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้เวกเตอร์ v และ $x_1 \in C$ และสร้างลำดับ $\{u_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ และ $\{x_n\}$ โดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ z_n = P_C(u_n - \lambda_3 A_3 u_n), \\ y_n = P_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) T P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

เมื่อ λ_i $(i = 1, 2, 3)$ เป็นจำนวนจริงที่มากกว่าศูนย์ $\{r_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $(0, \infty)$ $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $[0, 1]$ และ T เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C

4.2 ผลดำเนินการวิจัย

ผลจากการวิจัยการประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาระบบใหม่ของอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปในปริภูมิฮิลเบิร์ต ได้ทฤษฎีบทและองค์ความรู้ใหม่ที่สำคัญ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

บทตั้ง 1. ให้ C เป็นเซ็ตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซ็ตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3$ ถ้า $A_i : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน a_i -inverse-strongly monotone และ $\lambda_i \in (0, 2a_i]$ แล้ว $G : C \to C$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย เมื่อ G เป็นฟังก์ชันที่นิยามเหมือนใน บทตั้ง 2.5.7

ทฤษฎีบท 2. ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ F เป็นฟังก์ชันจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) และ $\varphi : C \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ เป็น

ฟังก์ชัน proper lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3$ กำหนดให้ $A_i : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α_i-inverse-strongly monotone และ T เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C ที่ทำให้ $\Omega = F(T) \bigcap GVI(C, A_1, A_2, A_3) \bigcap MEP(F, \varphi) \neq \emptyset$ สมมุติเงื่อนไข (B1) หรือ (B2) เป็นจริง กำหนดให้ v และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใดๆใน C และ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}, \{u_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ z_n = P_C(u_n - \lambda_3 A_3 u_n), \\ y_n = P_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) T P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda_i \in (0, 2\alpha_i)$ สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3$ ถ้า $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ เป็นสองลำดับใน $[0, 1]$ และ $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ สอดคล้องเงื่อนไขดังต่อไปนี้

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ และ $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$

แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\overline{x} = P_\Omega v$ และ $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4.3) เมื่อ $\overline{y} = P_C(\overline{z} - \lambda_2 A_2 \overline{z})$ และ $\overline{z} = P_C(\overline{x} - \lambda_3 A_3 \overline{x})$

บทแทรก 3. ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ F เป็นฟังก์ชันที่ส่งจาก $C \times C$ ไปยัง $\mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (A1)-(A5) สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3$ กำหนดให้ $A_i : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α_i-inverse-strongly monotone และ T เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C ที่ทำให้ $\Omega = F(T) \bigcap GVI(C, A_1, A_2, A_3) \bigcap EP(F) \neq \emptyset$ กำหนดให้ v และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใดๆใน C และ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}, \{u_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ z_n = P_C(x_n - \lambda_3 A_3 x_n), \\ y_n = P_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) T P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

ถ้า $\lambda_i \in (0, 2\alpha_i)$ สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3$ และ $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ $\{r_n\}$ เป็นลำดับที่มีเงื่อนไขเหมือนในทฤษฎีบท 3.2.2 แล้ว $\{x_n\}$ จะลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\overline{x} = P_\Omega v$ และ $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4.3) เมื่อ $\overline{y} = P_C(\overline{z} - \lambda_2 A_2 \overline{z})$ และ $\overline{z} = P_C(\overline{x} - \lambda_3 A_3 \overline{x})$

บทแทรก 4. ให้ C เป็นเซตย่อยปิด คอนเวกซ์ และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ $A_1, A_2 : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α_1-inverse-strongly monotone และ α_2-inverse-strongly monotone ตามลำดับ กำหนดให้ T เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C ที่ทำให้ $\Omega = F(T) \bigcap GVI(C, A_1, A_2) \neq \emptyset$ กำหนดให้ v และ x_1 เป็นเวกเตอร์ใดๆใน C และ $\{x_n\}, \{y_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_2 A_2 x_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) T P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

ถ้า $\lambda_1 \in (0, 2\alpha_1)$, $\lambda_2 \in (0, 2\alpha_2)$ และ $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่มีเงื่อนไขเหมือนในทฤษฎีบท 3.2.2 แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\overline{x} = P_\Omega v$ และ $(\overline{x}, \overline{y})$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (2.4.1) เมื่อ $\overline{y} = P_C(\overline{x} - \lambda_2 A_2 \overline{x})$

จากการศึกษาโครงการวิจัยเรื่อง"การประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาระบบใหม่ของอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปในปริภูมิฮิลเบิร์ต" ทำให้ได้ทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการอ้างอิงผลงานทางวิชาการ รวมทั้งนำไปประยุกต์ใช้กับวิทยาศาสตร์บริสุทธิ์ และวิทยาศาสตร์ประยุกต์

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต ซึ่งได้ทฤษฎีบทและองค์ความรู้ใหม่ที่สำคัญยิ่ง สำหรับเนื้อหาในบทนี้ผู้วิจัยได้ให้รายละเอียดเกี่ยวกับ ข้อสรุปจากการวิจัย อภิปรายผลการวิจัยและข้อเสนอแนะที่สำคัญ ดังต่อไปนี้

5.1 สรุปผลการวิจัย

การประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาระบบใหม่ของอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไปในปริภูมิฮิลเบิร์ต เป็นการวิจัยพื้นฐาน (basic research) เพื่อมุ่งแสวงหาข้อเท็จจริงเกี่ยวกับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต พร้อมทั้งพิสูจน์ทฤษฎีการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำที่สร้างขึ้น ผลจากการวิจัยได้ข้อสรุปที่สำคัญ คือ ได้ระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบปัญหาทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึง และปัญหาดุลยภาพผสมในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยที่ระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นใหม่นี้ได้ครอบคลุมระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาโดย Ceng และคณะ [ ] ผลการวิจัยพบว่าระเบียบวิธีทำซ้ำที่ใช้ในการศึกษานี้ได้ลู่เข้าแบบเข้มสู่ผลเฉลยร่วมของปัญหาดังกล่าว รวมทั้งทฤษฎีบทการลู่เข้าที่ได้จากการวิจัยได้ครอบคลุมทฤษฎีการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาโดย โดย Ceng และคณะ [ ]

5.2 อภิปรายผล

ผลจากการวิจัยเกี่ยวกับการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต จำเป็นอย่างยิ่งต้องอาศัยระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อใช้ในการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมดังกล่าว โดยระเบียบวิธีทำซ้ำที่ใช้ในการศึกษาคือ

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ z_n = P_C(u_n - \lambda_3 A_3 u_n), \\ y_n = P_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) T P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

เมื่อ λ_i $(i = 1, 2, 3)$ เป็นจำนวนจริงที่มากกว่าศูนย์ $\{r_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $(0, \infty)$ $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $[0, 1]$ และ T เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายบน C จากระเบียบวิธีทำซ้ำนี้จะเห็นว่า ถ้าวางเงื่อนไขบางอย่างแล้วจะคลอบคลุมระเบียบวิธีที่ศึกษามาก่อน รวมทั้งทฤษฎีการลู่เข้าที่ได้จากการวิจัยได้ครอบคลุมผลงานมาก่อนดังต่อไปนี้

1. ถ้าฟังก์ชัน $A_3 = 0$, $\varphi = 0$, $F(x, y) = 0$ และ $r_n = 1$ สำหรับแต่ละ $x, y \in C$ และทุกค่า $n \in \mathbb{N}$ แล้วระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษานี้จะลดรูปเป็นระเบียบวิธีทำซ้ำที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_2 A_2 x_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) T P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

   ซึ่งศึกษาโดย Ceng และคณะ [ ]

2. ถ้าฟังก์ชัน $A_3 = 0$, $\varphi = 0$, $F(x, y) = 0$ และ $r_n = 1$ สำหรับแต่ละ $x, y \in C$ และทุกค่า $n \in \mathbb{N}$ ในทฤษฎีบท 3.2.2 แล้ว $z_n = x_n$ ผลจากทฤษฎีบท 3.2.2 ทำให้ทฤษฎีบทการลู่เข้าที่ได้จากการวิจัยนี้ได้ครอบคลุมทฤษฎีการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาโดย โดย Ceng และคณะ [ ]

5.3 ข้อเสนอแนะ

การประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ตนั้น พอสรุปแนวทางดำเนินการวิจัยต่อดังต่อไปนี้

1. ผู้ดำเนินวิจัย สามารถศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำอื่นๆ ที่คลอบคลุมระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาในโครงการวิจัยนี้ อาทิเช่น

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ y_n = P_C(u_n - \mu B u_n), \\ x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n) S_n P_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1 \end{cases}$$

   เมื่อ $f : C \to C$ เป็นฟังก์ชัน contraction และ λ μ เป็นสองจำนวนจริงที่มากกว่าศูนย์ $\{r_n\}$ เป็นลำดับในช่วง $(0, \infty)$ $\{a_n\}, \{b_n\}$ เป็นลำดับ ในช่วง $[0, 1]$ และ S_n เป็น S-ฟังก์ชันที่ก่อกำเนิดโดย $T_1, T_2, \ldots, T_N$ และ $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_N^{(n)}$ ซึ่งจะเห็นว่าถ้า $f(x) = v$ $\forall x \in C$ จะได้ว่าระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นนี้ ครอบคลุมระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาในโครงการวิจัยนี้

2. ผู้สนใจสามารถศึกษาการประมาณค่าจุดตรึงของฟังก์ชันที่โตกว่า (คลาสใหญ่กว่า) ฟังก์ชันแบบไม่ขยาย เช่น ฟังก์ชัน strictly pseudo contractive mapping, quasai nonexpansive mapping asymptotically nonexpansive mapping ฯ

3. ผู้สนใจสามารถศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบอสมการการแปรผันแบบใหม่ เช่น ปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไป ซึ่งเป็นปัญหาที่ครอบคลุมปัญหาอสมการการแปรผัน ศึกษาโดย Yu และ Liang [ ] โดยที่ปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไป คือ การหาสมาชิก $u \in C$ ที่ทำให้

$$\langle u - \tau B u + \lambda A u, v - u\rangle \geq 0, \quad \forall v \in C$$

   เมื่อ $A, B : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน และ τ λ เป็นสองจำนวนจริงบวกใดๆ

4. ผู้สนใจสามารถศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาดุลยภาพผสม ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาจุดตรึงร่วม จากปริภูมิฮิลเบิร์ตสู่ปริภูมิบานาค

บรรณานุกรม

[1] L. C. Ceng, Q. H. Ansari and J. C. Yao, Mann type steepest and modified hybrid steepest-descent methods for variational inequalities in Banach spaces, Numerical Functional Analysis and Optimization, 29 (2008) 987--1033.

[2] L. C. Ceng, Q. H. Ansari and J. C. Yao, On relaxed viscosity iterative methods for variational inequalities in Banach spaces, J. Comput. App. Math. 230 (2009) 813--822.

[3] L. C. Ceng, G. Y. Chen, X. X. Huang and J. C. Yao, Existence theorems for generalized vector variational inequalities with pseudomonotonicity and their applications, Taiwanese Journal of Mathematics 12 (2008) 151--172.

[4] L. C. Ceng, C. Lee and J. C. Yao, Strong weak convergence theorems of implicit hybrid steepest-descent methods for variational inequalities, Taiwanese Journal of Mathematics 12 (2008) 227--244.

[5] L. C. Ceng, A. Petrusel and J. C. Yao, Iterative approaches to solving equilibrium problems and fixed point problems of infnitely many nonexpansive mappings, Journal of Optimization Theory and Applications 143 (2009) 37--58.

[6] L. C. Ceng, A. Petrusel and J. C. Yao, Weak convergence theorem by a modified extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings, Fixed Point Theory 9 (2008) 73--87.

[7] L. C. Ceng, S. Schaible and J. C. Yao, Hybrid steepest descent methods for zeros of nonlinear operator with applictions to variational inequalities, Journal of Optimization Theory and Applications 141 (2009) 75--91.

[8] L. C. Ceng, C. Y. Wang and J. C. Yao, Strong convergence theorems by a relaxed extragradient method for a general system of variational inequalities, Math Meth Oper Res 67 (2008) 375--390.

[9] L. C. Ceng, J. C. Yao, A hybrid iterative scheme for mixed equilibrium problems and fixed point problems, J. Comput. App. Math. 214 (2008) 186--201.

[10] L. C. Ceng, J. C. Yao, Relaxed viscosity approximation methods for fixed point problems and variational inequality problems, Nonlinear analysis Series A: Theory, Methods & Applications 69 (2008) 3299--3309.

[11] S. S. Chang, H. W. Joseph Lee and C. K. Chan, A new method for solving equilibrium problem fixed point problem and variational inequality problem with application to optimization, Nonlinear Analysis 70 (2009) 3307--3319.

[12] K. Goebel, W. A. Kirk, Topics on metric fixed-point theory. Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[13] B. Halpern, Fixed points of nonexpansive maps, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967) 957--961.

[14] S. Imnang, Hybrid projection algorithm for a new general system of variational inequalities in Hilbert spaces, ISRN Appl. Math. 2012 (2012), Article ID 482869.

[15] G. M. Korpelevich, An extragradient method for finding saddle points and for other problems, Ekon. Mat. Metody 12 (1976) 747--756.

[16] P. L. Lion, Approximation de points fixed de contractions, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 284 (1977) A1357--A1359.

[17] N. Nadezhkina, W. Takahashi, Weak convergence theorem by an extragradient method for nonexpansive mappings and monotone mappings, Journal of optimization theory and applications 128 (2006) 191-201.

[18] M. A. Noor, On iterative methods for solving a system of mixed variational inequalities, Applicable Analysis 87(1) (2008) 99--108.

[19] M. A. Noor, Projection methods for nonconvex variational inequalities, Optimization Letters 3(3) (2009) 411--418.

[20] M. A. Noor, Some developments in general variational inequalities, Applied Mathematics and Computation 152 (2004) 199--277.

[21] M. O. Osilike, D. I. Igbokwe, Weak and strong convergence theorems for fixed points of pseudocontractions and solutions of monotone type operator equations, Comput. Math. Appl. 40 (2000) 559--239.

[22] J. W. Peng, J. C. Yao, A modified CQ method for equilibrium problems, fixed points and variational inequality, Fixed Point Theory, 9 (2008) 515--531.

[23] J. W. Peng, J. C. Yao, A new hybrid-extragradient method for generalized mixed equilibrium problems and fixed point problems and variational inequality problems, Taiwanese Journal of Mathematics 12 (2008) 1401--1433.

[24] J. W. Peng, J. C. Yao, Some new iterative algorithms for generalized mixed equilibrium problems with strict pseudo-contractions and monotone mappings, Taiwanese Journal of Mathematics 13 (2009) 1537--1582.

[25] J. W. Peng, J. C. Yao, Strong convergence theorems of iterative schemes based on extragradient method for mixed equilibrium problems and fixed point problems, Mathematical and Computer Modelling 49 (2009) 1816--1828.

[26] S. Plubtieng, R. Punpaeng, A new iterative method for equilibrium problems and fixed point problems of nonexpansive mappings and monotone mappings, Applied Mathematics and Computation 197 (2008) 548--558.

[27] X. Qin, S. Y. Cho and S. M. Kang, Iterative algorithms for variational inequality and equilibrium problems with applications. J Glob Opim. (2009) Doi 10.1007/s10898-009-9498-8.

[28] G. Stampacchi, Formes bilineaires coercivites sur les ensembles convexes, C. R. Acad. Sci. Paris. 258 (1964) 4413-4416.

[29] S. Reich, Approximating fixed points of nonexpansive mappings, PanAmer. Math. J. 4(2) (1994) 23--28.

[30] T. Suzuki, Strong convergence of Krasnoselskii and Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals, J. Math. Anal. Appl. 305 (2005) 227--239.

[31] W. Takahashi, M. Toyoda, Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings, J. Optim. Theory Appl. 118 (2003) 417-428.

[32] R. U. Verma, On a new system of nonlinear variational inequalities and associated iterative algorithms, Math Sci Res Hot-Line 3 (1999) 65--68.

[33] R. Wittmann, Approximation of fixed points of nonexpansive mappings, Arch. Math. (Basel) 58 (1992) 486--491.

[34] H. K. Xu, Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl. 298 (2004) 279--291.

[35] Y. Yao, Y. C. Liou and S. M. Kang. (2010). Approach to common elements of variational inequality problems and fixed point problems via a relaxed extragradient method. Computers and Mathematics with Applications. 59, 3472-3480.

[36] Y. Yao, M. A. Noor, K. I. Noor, Y. C. Liou and H. Yaqoob, Modified extragradient method for a system of variational inequalities in Banach spaces, Acta Appl Math 110(3) (2010) 1211--1224.

[37] Y. Yao, J. C. Yao, On modified iterative method for nonexpansive mappings and monotone mappings, Appl. Math. Comput. 186 (2007) 1551-1558.

[38] L. Yu, M. Liang, Convergence theorems of solutions of a generalized variational inequality. Fixed Point Theory and Applications 19 (2011).

[39] L. C. Zeng, J. C. Yao, A hybrid extragradient method for general variational inequalities, Mathematical Methods of Operations Research 69 (2009) 141--158.

[40] J. Zhao, S. He, A new iterative method for equilibrium problems and fixed point problems of infinitely nonexpansive mappings and monotone mappings, Appl. Math. Comput. 215 (2009) 670--680.