

การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทน
ในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่าง
การจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์
กับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ

กันณารัตน์ หนูชุม

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
มหาวิทยาลัยทักษิณ

2549

ISBN 974 – 451 – 727 – 1



ใบรับรองวิทยานิพนธ์
ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์
มหาวิทยาลัยทักษิณ

ชื่อวิทยานิพนธ์ : การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้
วิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
ระหว่างการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์กับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ

ชื่อ – ชื่อสกุลผู้ทำวิทยานิพนธ์ : นางสาวกัญญารัตน์ หนูชุม
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

ประธานที่ปรึกษา

(รองศาสตราจารย์ ดร.สมใจ จิตพิทักษ์)

กรรมการที่ปรึกษา

(อาจารย์ ดร.กรวิภา ก่องกุล)

มหาวิทยาลัยทักษิณอนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยทักษิณ

(อาจารย์ ดร.สมศักดิ์ โชคนุกุล)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

สำเร็จการศึกษา เมื่อวันที่.....เดือนพฤษภาคม พ.ศ. 2549

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยทักษิณ

บทคัดย่อ

การวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างการจัดการเรียนรู้แบบ จัดกรอบมโนทัศน์กับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ และ 2) เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างการจัดการ เรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์กับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทุ่งสง อำเภอทุ่งสง จังหวัดนครศรีธรรมราช ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 เป็นนักเรียน กลุ่มทดลอง 47 คน และกลุ่มควบคุม 48 คน ซึ่งได้มาจากการเลือกกลุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง นักเรียนในกลุ่มทดลองได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ และนักเรียน กลุ่มควบคุมได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ ผู้วิจัยดำเนินการสอนนักเรียนทั้งสองกลุ่ม กลุ่มละ 12 ชั่วโมง หลังการทดลองทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติและหลังการทดลอง 2 สัปดาห์ทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ วิเคราะห์ ข้อมูลโดยคำนวณค่าเฉลี่ย ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและทดสอบด้วยที่ เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ แผนการจัดการเรียนรู้แบบปกติ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและแบบทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นเอง

ผลการวิจัยครั้งนี้พบว่า 1) นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบ จัดกรอบมโนทัศน์มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้ แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และ 2) นักเรียนที่ได้รับการสอนโดย การจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์มีความคงทนในการเรียนรู้สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอน โดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

Abstract

The purposes of this research were : 1) To compare the learning achievement in mathematics on the topic of trigonometric ratio of Mathayomsuksa IV students by using concept mapping learning and normal learning managements. 2) To compare the retention in mathematics learning on the topic of trigonometric ratio of Mathayomsuksa IV students by using concept mapping learning and normal learning managements.

The samples used in this research were Mathayomsuksa IV students at Thungsong School, Thungsong District, Nakornsrihummarat Province in the second semester of the academic year 2005. The samples obtained by purposive sampling and separated into two groups. The experimental group, consisted of 47 students, was taught by concept mapping learning management, while the controlled group consisted of 48 students, was taught by normal learning management. Both sample groups were taught by the researcher for 12 hours, and then took the mathematics achievement test on the topic of trigonometric ratio. The retention in mathematics learning test was taken on the topic of trigonometric ratio after the experiment two weeks. The statistics used to analyze the data were arithmetic mean, standard deviation and t – test. The instruments used for research were concept mapping learning management plans, normal learning management plans, learning achievement test and retention in mathematics learning test on the topic of trigonometric ratio.

The research findings were as follows : 1) The learning achievement in mathematics on the topic of trigonometric ratio of Mathayomsuksa IV students by using concept mapping learning management was higher than that of students by using normal learning management at significance level of .05. 2) The retention in mathematics learning on the topic of trigonometric ratio of Mathayomsuksa IV students by using concept mapping learning management was higher than that of students by using normal learning management at significance level of .01.

ประกาศคุณูปการ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จสมบูรณ์ได้ด้วยความกรุณาของ รองศาสตราจารย์ ดร.สมใจ จิตพิทักษ์ ประธานที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ และอาจารย์ ดร.กรวิกา ก้องกุล กรรมการที่ปรึกษา วิทยานิพนธ์ ที่ได้กรุณาเสียสละเวลาอันมีค่าของท่านในการให้คำปรึกษา แนะนำ ช่วยเหลือ ตลอดจนการตรวจแก้ไขข้อบกพร่องของวิทยานิพนธ์ด้วยความเอาใจใส่อย่างดียิ่ง ผู้วิจัยจึงขอ กราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้ด้วย

ขอกราบขอบพระคุณ อาจารย์ ดร.กรวิกา ก้องกุล อาจารย์เพ็ญศรี วงศ์แก้ว และ อาจารย์จินดา วิพลชัย ที่ได้กรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญในการตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ตลอดจนให้คำแนะนำและข้อเสนอแนะซึ่งเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้

ขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์เสกสรรค์ ดำกระบี่ และอาจารย์ ดร.เรวดี กระโหมวงศ์ ที่กรุณารับเป็นกรรมการสอบปากเปล่าวิทยานิพนธ์

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ผู้สอนทุกท่านที่ได้ถ่ายทอดความรู้ แนวคิด และให้ คำแนะนำต่าง ๆ เป็นอย่างดี ตลอดระยะเวลาที่ได้ศึกษาอยู่ในมหาวิทยาลัยทักษิณ

ขอกราบขอบพระคุณผู้อำนวยการ คณะครู และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2548 โรงเรียนทุ่งสง อำเภอทุ่งสง จังหวัดนครศรีธรรมราช ที่กรุณาให้ ความช่วยเหลือและอำนวยความสะดวกในการเก็บรวบรวมข้อมูลในการวิจัยครั้งนี้เป็นอย่างดี

ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ พี่ชาย น้องสาว และญาติ ๆ ที่คอยให้ คำปรึกษา สนับสนุนกำลังใจทรัพย์ ให้ความช่วยเหลือและเป็นกำลังใจในการทำวิทยานิพนธ์ครั้งนี้ จนสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

ขอขอบพระคุณพี่ ๆ เพื่อน ๆ น้อง ๆ สาขาวิชาคณิตศาสตร์และบุคคลที่ผู้วิจัยมี ความผูกพันซึ่งได้คอยไต่ถามถึงความคืบหน้าของวิทยานิพนธ์ ห่วงใยสุขภาพ และเป็นกำลังใจ ของผู้วิจัยตลอดมา

คุณค่าทั้งหลายที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบเป็นกตัญญูแก่เวทิตาแต่ บิดามารดา บุรพจารย์และญาติสนิทมิตรสหายที่ให้ความรู้ ความรัก ความเมตตาและสนับสนุน การศึกษาของผู้วิจัยตลอดมา

กัญจรัตน์ หนูชุม

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ภูมิหลัง	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย	3
สมมติฐานของการวิจัย	4
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย	4
ขอบเขตของการวิจัย	4
นิยามศัพท์เฉพาะ	5
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	7
มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์	7
การจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์	12
ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์	20
ความคงทนในการเรียนรู้	23
งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	25
3 วิธีดำเนินการวิจัย	30
ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย	30
เครื่องมือและวิธีสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล	30
แบบแผนการทดลอง	33
วิธีดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล	33
วิธีการวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	34
4 ผลการวิจัย	36
สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	36
ลำดับขั้นในการวิเคราะห์ข้อมูล	36
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	37

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
5 บทย่อ สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	39
บทย่อ	39
สรุปผลการวิจัย	41
อภิปรายผล	41
ข้อเสนอแนะ	44
บรรณานุกรม	46
ภาคผนวก	52
ภาคผนวก ก รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ	53
ภาคผนวก ข แผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์	55
ภาคผนวก ค สื่อการเรียนรู้	138
ภาคผนวก ง แบบทดสอบวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ	164
ภาคผนวก จ ผลการวิเคราะห์เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	175
ประวัติย่อผู้วิจัย	180

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
1 แสดง แบบแผนการทดลอง	33
2 แสดง ค่าเฉลี่ย (\bar{X}) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) ของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระยะก่อนการทดลองและหลังการทดลอง ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์กับ นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ	37
3 แสดง ค่าเฉลี่ย (\bar{X}) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) ของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระยะหลังการทดลองและหลังการทดลอง 2 สัปดาห์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบ – มโนทัศน์และนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ	38

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 ได้กำหนดแนวทางการจัดการศึกษาไว้ใน มาตรา 22 ว่า การจัดการศึกษาต้องยึดหลักว่าผู้เรียนทุกคนมีความสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้ และถือว่าผู้เรียนมีความสำคัญที่สุด กระบวนการจัดการศึกษาต้องส่งเสริมให้ผู้เรียนสามารถพัฒนาตามธรรมชาติและเต็มตามศักยภาพ (ราชกิจจานุเบกษาฉบับกฤษฎีกา เล่ม 116 ตอนที่ 74 ก. 2542 : 7) ในการจัดการเรียนรู้สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้กำหนดมาตรฐานการเรียนรู้ด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นไว้ 5 มาตรฐาน ซึ่งผู้สอนจะต้องจัดกิจกรรม กำหนดสถานการณ์หรือปัญหา เพื่อพัฒนาผู้เรียน ให้บรรลุมาตรฐานด้านทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

- 1) การแก้ปัญหา
- 2) การให้เหตุผล
- 3) การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ
- 4) การเชื่อมโยง และ
- 5) ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ (สสวท. 2545 : 190)

การจัดการศึกษาของไทยโดยเฉพาะในระดับมัธยมศึกษา นับได้ว่าเป็นเรื่องสำคัญ เป็นอย่างยิ่งในการพัฒนาศักยภาพของคนทั้งเพื่อนำไปสู่การศึกษาระดับที่สูงขึ้นและเพื่อนำวิชา ความรู้ที่ได้รับไปประกอบวิชาชีพที่มั่นคงต่อไป แต่จากรายงานผลการประเมินผลสัมฤทธิ์ทาง การเรียนของนักเรียนระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน ประจำปีการศึกษา 2547 ซึ่งดำเนินการโดย สำนักทดสอบทางการศึกษา สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน การสรุปผล การประเมินในภาพรวมระดับประเทศจากกลุ่มตัวอย่างนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 164,275 คน พบว่าคะแนนเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยรวมของนักเรียนต่ำกว่าร้อยละ 50 โดยเฉพาะอย่างยิ่งในวิชาคณิตศาสตร์นักเรียนมีคะแนนเฉลี่ยเพียงร้อยละ 34.74 ซึ่งให้เห็นว่า การจัดการศึกษาทางด้านวิชาคณิตศาสตร์ต้องได้รับการปรับปรุงแก้ไขอย่างเร่งด่วน (“สพฐ. ยังไม่เครียดผลประเมินนักเรียนต่ำกว่า 50 % ทุกวิชา,” เดลินิวส์. 1 กรกฎาคม 2548 : 27) ในปัจจุบันนับว่าเป็นยุคแห่งการปฏิรูปการศึกษาจึงทำให้เกิดการปฏิรูปทั้งทางด้านหลักสูตรและ กระบวนการเรียนรู้ เป็นผลให้การจัดการเรียนการสอนของครูต้องเปลี่ยนแปลงเพื่อให้สอดคล้อง กับยุคสมัย (ยุพิน พิพิธกุล. 2545 : 69)

มาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่ 4 ของกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามหลักสูตร การศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2544 ในสาระที่ 6 ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน ค 6.4 มุ่งให้ผู้เรียนมีความสามารถในด้าน 1) การเชื่อมโยงความคิดรวบยอด หลักการและวิธีการทางคณิตศาสตร์และศาสตร์อื่น ๆ เพื่ออธิบายข้อสรุปหรือเรื่องราวต่าง ๆ ได้ และ 2) การนำความรู้และทักษะที่ได้จากการเรียนคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในการเรียนรู้ งาน และในการดำรงชีวิต (กรมวิชาการ. 2546 : 10) ดังนั้นจึงเห็นได้ว่าวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ ควรส่งเสริมให้มีการคิดโดยใช้เหตุผลและการเรียนรู้ที่ก่อให้เกิดความเข้าใจในมโนทัศน์และ โครงสร้างต่าง ๆ มากกว่าการเรียนรู้โดยการท่องจำและจำวิธีการไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหา โดยไม่เข้าใจ ซึ่งตรงกับทฤษฎีการเรียนรู้ที่มีความหมายของออสเชเบล ที่มุ่งให้ผู้เรียนสามารถ เชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์ใหม่กับมโนทัศน์เดิมในโครงสร้างของความรู้ของผู้เรียน อย่างถูกต้องและต่อเนื่องกัน (Ausubel. 1968 : 38) ดังนั้นการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ซึ่งมี ระดับความยากมากขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อเรียนในระดับที่สูงขึ้น จึงจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องมีพื้นฐานของ ความเข้าใจที่ดี

การสอนคณิตศาสตร์เพื่อให้ผู้เรียนมีพื้นฐานทางความเข้าใจที่ดีนั้นควรสอนให้ผู้เรียน เกิดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งการเกิดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนสามารถดูได้จาก ความเข้าใจของผู้เรียนเกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์ที่ได้เรียนรู้ โดยผู้เรียนสามารถสรุปความเข้าใจที่ ได้ออกมาในรูปของบทนิยามหรือความหมายของเรื่องนั้น (Cooney, Davis and Henderson. 1975 : 85) สำหรับหลักการพื้นฐานในการสอนมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์นั้นผู้สอนไม่สามารถให้ หรือบอกมโนทัศน์แก่ผู้เรียนได้ ผู้เรียนจะต้องสร้างมโนทัศน์ขึ้นมาจากประสบการณ์และความคิด ของตนเอง การสอนมโนทัศน์ใด ๆ จะมีความหมายและมีประโยชน์มากขึ้นก็ต่อเมื่อผู้เรียน สามารถพัฒนาและประยุกต์ใช้ความรู้ในการแก้ปัญหาได้เป็นอย่างดี การที่ผู้เรียนสามารถสร้าง มโนทัศน์ขึ้นเองได้นั้นก็ขึ้นอยู่กับระดับความยากง่ายของมโนทัศน์ ความพร้อม แรงจูงใจและ ความสามารถของผู้เรียน (Donovan and Gerald. 1972 : 176 - 177) การให้ผู้เรียนสร้าง กรอบมโนทัศน์ของตนเองเป็นวิธีการหนึ่งที่ทำให้ผู้สอนสามารถทราบถึงสิ่งที่ผู้เรียนได้เรียนรู้ไปแล้ว และสามารถเข้าถึงโครงสร้างของความรู้ของผู้เรียนว่าผู้เรียนเกิดความเข้าใจและสามารถนำไป เชื่อมโยงกับความรู้เดิมที่ผู้เรียนมีได้หรือไม่ (Novak and Gowin. 1984 : 97 -108) การสอน วิธีนี้ช่วยให้ผู้เรียนได้เรียนรู้มโนทัศน์หรือหลักการต่าง ๆ ของเนื้อหาวิชาใดวิชาหนึ่งได้อย่างมี ความหมาย โดยการเชื่อมโยงความรู้ในวิชานั้นกับสิ่งที่มีอยู่ในโครงสร้างของความรู้แล้วสร้าง แผนผังของความเข้าใจเรื่องนั้นอย่างมีลำดับขั้นตอนที่ครอบคลุมและเป็นระบบ ซึ่งจะช่วยให้ ผู้เรียนสามารถเก็บความรู้ไว้ในหน่วยของความทรงจำระยะยาวและจะเป็นการเรียนรู้ที่คงทน ต่อไป

ในปัจจุบันได้มีการนำความรู้วิชาตรีโกณมิติไปใช้ในการหาระยะทาง พื้นที่ มุม และ ทิศทางที่ยากแก่การวัดโดยตรง เช่น การหาความสูงของภูเขา การหาความกว้างของแม่น้ำ ต่อมาวิชานี้ได้พัฒนาขึ้นโดยลำดับและได้มีการนำไปประยุกต์ใช้ในหลายสาขาวิชา เช่น ฟิสิกส์ วิศวกรรมศาสตร์ (สสวท. 2547 : 100) สำหรับเนื้อหาสาระเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติอยู่ใน สาระหลักเรื่องการวัด โดยในหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ได้กล่าวถึงอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม มุมฉาก ซึ่งได้แก่ ไซน์ โคไซน์และแทนเจนต์ของมุมที่มีขนาดระหว่าง 0° ถึง 90° และการหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติดังกล่าวจากตาราง รวมทั้งตัวอย่างการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้อง การวัด และกำหนดผลการเรียนรู้ที่คาดหวังไว้ว่า ผู้เรียนสามารถหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม ที่กำหนดให้และนำไปใช้แก้ปัญหาได้ (สสวท. 2546 : 94) จากรายงานการวิจัยเรื่องการวินิจฉัย ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษามหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช พบว่าเนื้อหาเรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติเป็นเนื้อหาที่นักศึกษามีปัญหามากที่สุดและมากกว่าทุกเนื้อหา ทั้งนี้เพราะ ต้องอาศัยทฤษฎีบทของพีทาโกรัสและบทนิยามที่นักศึกษาคำไม่ค่อยได้ เนื่องจากไม่ได้นำไปใช้ใน ชีวิตจริงมากนัก (สาคร บุญดาว, อุษาวดี จันทรสุนธิ และมณีรัตน์ สุวรรณพพมา. 2545 : 16)

ด้วยเหตุข้างต้นนี้ ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะนำการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ มาใช้ในการจัดกระบวนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เนื่องจากกำลังประสบปัญหาด้านการเรียนอยู่มากและเนื้อหาเรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติเป็นเนื้อหาที่สำคัญในการเรียน ซึ่งมีประโยชน์ไม่ว่าจะเป็นการศึกษาระดับสูง หรือในชีวิตประจำวัน ดังนั้นนักเรียนควรมีมโนทัศน์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติที่ถูกต้อง

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์กับการจัด การเรียนรู้แบบปกติ
2. เพื่อเปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์กับการจัด การเรียนรู้แบบปกติ

สมมติฐานของการวิจัย

1. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มที่ใช้การจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์สูงกว่ากลุ่มที่ใช้การจัดการเรียนรู้แบบปกติ
2. ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มที่ใช้การจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์สูงกว่ากลุ่มที่ใช้การจัดการเรียนรู้แบบปกติ

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

1. ทำให้ทราบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติระหว่างการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์กับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ เพื่อที่จะได้เลือกใช้วิธีการจัดการเรียนรู้ที่ทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติได้สูงกว่า มาใช้ในการสอนเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 และเนื้อหาอื่น ๆ ในโอกาสต่อไป
2. เป็นแนวทางสำหรับครูและผู้ที่เกี่ยวข้องในการจัดการศึกษา เพื่อนำไปใช้ในการปรับปรุง พัฒนาการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์และพัฒนาความสามารถของนักเรียนด้านทักษะกระบวนการคิด เพื่อนำความรู้ไปใช้เป็นพื้นฐานในการศึกษาระดับสูงขึ้นและใช้ในชีวิตประจำวันได้
3. เป็นแนวทางสำหรับผู้เรียน โดยที่ผู้เรียนสามารถนำการจัดกรอบมโนทัศน์ไปศึกษาหาความรู้ในวิชาต่าง ๆ ได้ด้วยตนเอง เพื่อให้เกิดการเรียนรู้อย่างมีความหมายและทำให้เกิดความคงทนในการเรียนรู้ได้นานยิ่งขึ้น

ขอบเขตของการวิจัย

1. ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทุ่งสง อำเภอทุ่งสง จังหวัดนครศรีธรรมราช
2. กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทุ่งสง อำเภอทุ่งสง จังหวัดนครศรีธรรมราช ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 ซึ่งได้มาจากการเลือกกลุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง (purposive sampling) โดยเลือกห้องที่เรียนแผนการเรียน

วิทย์ – คณิต ที่มีคะแนนเฉลี่ยของคะแนนสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2548 มีค่าใกล้เคียงกันจำนวน 2 ห้อง จำนวน 95 คน แล้ว จับฉลากห้องเรียนทั้งสองห้องเข้ากลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ดังนี้

กลุ่มทดลองจำนวน 1 ห้อง นักเรียน 47 คน ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้ แบบจัดกรอบมโนทัศน์

กลุ่มควบคุมจำนวน 1 ห้อง นักเรียน 48 คน ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้ แบบปกติ

3. เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544

4. เวลาที่ใช้ในการทดลอง ใช้เวลาทั้งสิ้น 14 ชั่วโมง แบ่งออกเป็น

4.1 ดำเนินการสอน 12 ชั่วโมง

4.2 ทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน 1 ชั่วโมง

4.3 ทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้ 1 ชั่วโมง

5. ตัวแปรที่ศึกษา

5.1 ตัวแปรอิสระ (independent variables) คือ วิธีการจัดการเรียนรู้ 2 แบบ ได้แก่ การจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์กับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ

5.2 ตัวแปรตาม (dependent variables) คือ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ

นิยามศัพท์เฉพาะ

1. กรอบมโนทัศน์ หมายถึง แผนผังหรือแผนภาพที่สร้างขึ้นเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของความคิดหรือข้อมูลสำคัญ ๆ ของมโนทัศน์เรื่องใดเรื่องหนึ่งอย่างมีระบบและเป็นลำดับขั้น จากมโนทัศน์ที่กว้างครอบคลุมไปสู่มโนทัศน์ที่แคบและมโนทัศน์ที่เฉพาะเจาะจง โดยใช้คำหรือข้อความเป็นตัวเชื่อมเพื่อให้เห็นความสัมพันธ์ของมโนทัศน์ต่าง ๆ

2. การจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ หมายถึง การจัดกระบวนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยให้นักเรียนนำมโนทัศน์ในเนื้อหาสาระที่ได้เรียนรู้มาจัดระบบ จัดลำดับและเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกันเข้าด้วยกัน แล้วให้นักเรียนสร้างกรอบมโนทัศน์เกี่ยวกับเนื้อหาที่เรียนด้วยตัวเอง

3. การจัดการเรียนรู้แบบปกติ หมายถึง การจัดกระบวนการจัดการเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติตามแนวคู่มือครูที่จัดทำขึ้นโดย สสวท.
4. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งวัดได้จากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยทำการทดสอบหลังการทดลอง
5. ความคงทนในการเรียนรู้ หมายถึง ความสามารถที่จะจดจำหรือย้อนระลึกถึง ความรู้และทักษะต่าง ๆ ที่ได้เรียนรู้มาก่อนแล้ว ซึ่งวัดได้จากแบบทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยทำการทดสอบ หลังการทดลอง 2 สัปดาห์
6. นักเรียน หมายถึง นักเรียนที่กำลังเรียนอยู่ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของ โรงเรียนทุ่งสง อำเภอทุ่งสง จังหวัดนครศรีธรรมราช ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 จำนวน 2 ห้อง ซึ่งได้มาจากการเลือกกลุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบ – มโนทัศน์ซึ่งประกอบด้วย มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ การจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ความคงทนในการเรียนรู้และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย ความหมายและความสำคัญของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หลักการสอนมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ และเอกสารสรุปมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1. ความหมายและความสำคัญของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

นักการศึกษาได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ พอสรุปได้ดังนี้ ฌัชชา กมล (2542 : 21) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า หมายถึง ความคิดและความเข้าใจเกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์ที่เกิดจากการได้รับประสบการณ์ในการเรียนคณิตศาสตร์ โดยสามารถสรุปความเข้าใจที่ได้ออกมาเป็นบทนิยาม และสามารถจัดประเภทของสิ่งที่เหมือนกันเข้าด้วยกันและแยกประเภทของสิ่งที่ไม่เหมือนกันออกจากกันได้

เพลินพิศ ภิรมย์ไกรภักดิ์ (2542 : 25) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า หมายถึง การจัดกิจกรรมที่มีการเตรียมการวางแผนไว้เพื่อส่งเสริมให้ได้มีประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะนำไปสู่การเกิดความคิด ความเข้าใจ แล้วสามารถสรุปหรือให้คำจำกัดความเกี่ยวกับคุณลักษณะทางคณิตศาสตร์

อัมพร ม้าคอง (2546 : 5) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า เป็นความคิดนามธรรมที่ทำให้มนุษย์สามารถแยกแยะวัตถุหรือเหตุการณ์ว่าเป็นตัวอย่างหรือไม่เป็นตัวอย่างของความคิดที่เป็นนามธรรมนั้น

คูนีย์, เดวิส และเฮนเดอร์สัน (Cooney, Davis and Henderson. 1975 : 85) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า หมายถึง ความเข้าใจเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่ได้เรียนรู้ โดยนักเรียนสามารถสรุปความเข้าใจที่ได้ออกมาในรูปของบทนิยามหรือความหมายของเรื่องนั้น

โดโนแวนและเจอร์รอลด์ (Donovan and Gerald. 1972 : 168) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า หมายถึง ความคิดของบุคคลซึ่งเป็นนามธรรมเกี่ยวกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ เช่น สมบัติของวัตถุ หรือเหตุการณ์ต่าง ๆ โดยสามารถบอกลักษณะร่วมและลักษณะที่แตกต่างของแต่ละมโนทัศน์ได้

จากความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้นสามารถสรุปได้ว่า หมายถึง ความคิด ความเข้าใจของบุคคลซึ่งเป็นนามธรรมเกี่ยวกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ ที่เกิดจากการได้รับประสบการณ์ในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ โดยสามารถจัดประเภทของสิ่งที่เหมือนกันเข้าด้วยกันและแยกประเภทของสิ่งที่ไม่เหมือนกันออกจากกันได้ แล้วสรุปความเข้าใจที่ได้ออกมาเป็นบทนิยามหรือคุณสมบัติหรือสัญลักษณ์แทนคุณสมบัติได้

นักการศึกษาได้กล่าวถึงความสำคัญของมโนทัศน์ พอสรุปได้ดังนี้

โสภานพวรรณ ศิริรัตน์ (2527 : 16) กล่าวถึงความสำคัญของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1) ช่วยลดความซับซ้อนในเรื่องที่เรียนเพราะถ้าผู้เรียนมุ่งที่จะจำหรือเข้าใจรายละเอียดทั้งหมดก็จะก่อให้เกิดความยุ่งยากในการทำความเข้าใจเนื้อหาคณิตศาสตร์ของเรื่องที่เรียน

2) ช่วยในการจัดลำดับความคิด จำแนกเรื่องและเนื้อหาที่เป็นประเภทเดียวกันให้เป็นหมวดหมู่ เพื่อให้การเรียนรู้เกิดขึ้นได้เร็วและมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

3) ประหยัดเวลาในการเรียนรู้เพราะเมื่อเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเรื่องใดเรื่องหนึ่งแล้วก็ไม่ต้องเสียเวลาเรียนมโนทัศน์นั้นซ้ำอีก

4) ความเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เป็นรากฐานของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้น

5) ช่วยให้มีแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน

เพลินพิศ ภิรมย์ไกรภักดิ์ (2542 : 26) กล่าวถึงความสำคัญของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า เป็นเครื่องมือพัฒนาความสามารถในการทำความเข้าใจเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ในระดับอื่น ๆ

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ช่วยลดความซับซ้อนในเรื่องที่เรียนทำให้การเรียนรู้เกิดขึ้นได้เร็วและมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น ตลอดจนเป็นเครื่องมือที่สามารถนำไปใช้ในการทำความเข้าใจเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้น

2. หลักการสอนมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

โดโนแวนและเจอร์รอลด์ (Donovan and Gerald. 1972 : 176 – 177) ได้กล่าวถึงแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1) มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์นั้นครูไม่สามารถมอบให้แก่ นักเรียนได้ นักเรียนต้องสร้างมโนทัศน์ด้วยความคิดและประสบการณ์ของเขาเอง การสอนมโนทัศน์ให้มีประสิทธิภาพต้องมีการเตรียมประสบการณ์การเรียนรู้ให้เหมาะสมสำหรับนักเรียนทุกคน

2) มโนทัศน์ใด ๆ ที่เรียนไปแล้วจะมีความหมายและมีประโยชน์มากขึ้นเมื่อมโนทัศน์ที่เรียนได้ถูกนำไปเป็นส่วนหนึ่งในโครงสร้างทางความคิด มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ย่อยที่นักเรียนเรียนไปแต่ละวันนั้นควรมีการนำไปสัมพันธ์กับโครงสร้างของเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ที่เรียนในแต่ละบทเรียน

3) การเรียนรู้มโนทัศน์สามารถเกิดได้ดีจากการจัดประสบการณ์ที่หลากหลายให้แก่ นักเรียนมากกว่าการสอนโดยการบอกหรือพูดซ้ำ ๆ สำหรับการสอนโดยใช้การแก้ปัญหา การจัดกิจกรรมให้เกิดการค้นพบ การใช้คำถามที่ท้าทาย เป็นวิธีการสอนที่ทำให้เกิดการเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ได้ดียิ่งขึ้น

4) การที่นักเรียนจะเกิดการเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์นั้นขึ้นอยู่กับความพร้อมของนักเรียน ความสามารถทางการเรียนของนักเรียนและการตั้งใจในการเรียน การเตรียมกิจกรรม การเรียนการสอนต้องเตรียมโดยคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลของนักเรียนและต้องมีการสร้างแรงจูงใจให้นักเรียนอยากรู้มโนทัศน์ในบทเรียนคณิตศาสตร์ในแต่ละวัน

5) มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์จะถูกสร้างขึ้นเมื่อนักเรียนกระตือรือร้นและสนใจต่อกิจกรรมการเรียนการสอนที่จัดขึ้น จากนั้นนักเรียนจะปรับโครงสร้างทางความคิดในการเรียนรู้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของพวกเขามากกว่าการรับรู้มาแบบง่าย ๆ การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนควรมีการจัดกิจกรรมกลุ่มให้เกิดการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นเกี่ยวกับมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

6) การได้เรียนรู้จากของจริงเป็นรูปธรรมหรือการใช้สื่อการสอน จะทำให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้มโนทัศน์ได้ดีและนักเรียนควรได้ลองพยายามปฏิบัติจริง ลองผิดลองถูก ได้ฝึกการเขียนประโยค การเขียนสัญลักษณ์ การตั้งคำถามในสิ่งที่สงสัย การหาคำตอบและสรุปสิ่งที่เรียนด้วยตนเอง

การสอนให้เกิดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์นั้นครูต้องเตรียมกิจกรรมการเรียนการสอนให้เหมาะสมกับความสามารถทางการเรียนของนักเรียน ให้ตัวอย่างทั้งทางบวกและทางลบของ

มโนทัศน์ กระตุ้นให้นักเรียนอภิปรายถึงมโนทัศน์หรือสิ่งที่นักเรียนสงสัยและที่สำคัญนั้นนักเรียนต้องได้ฝึกปฏิบัติจริง โดยทั่วไปการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนมี 3 ขั้นตอนที่สำคัญ คือ ขั้นนำ ขั้นสอนและขั้นสรุป ซึ่งในแต่ละขั้นตอนของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนควรมีบทบาทดังนี้

1) ขั้นนำ ครูจะต้องกำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ ทบทวนความรู้เดิมที่เรียนผ่านมา เพื่อเตรียมมโนทัศน์ขั้นพื้นฐาน

2) ขั้นสอน ครูจะต้องคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลของนักเรียนและสร้างแรงจูงใจ โดยใช้กิจกรรมที่หลากหลายซึ่งอาจจะเป็นรูปภาพ สื่อ สัญลักษณ์ ฯลฯ และเพื่อให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์ที่ดียิ่งขึ้นครูควรจัดกิจกรรมให้นักเรียนได้เรียนรู้จากสิ่งของที่เป็นรูปธรรม มีการทดลองปฏิบัติจริง ค้นหาคำตอบและสรุปสิ่งที่เรียนด้วยตนเอง

3) ขั้นสรุป ครูจะต้องให้นักเรียนสรุปมโนทัศน์ที่ได้เรียนรู้ โดยการให้นักเรียนสรุปความเข้าใจที่ได้ออกมาเป็นบทนิยาม คุณสมบัติหรือสัญลักษณ์แทนคุณสมบัติ

3. เอกสารสรุปมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

เอกสารสรุปมโนทัศน์ (concept worksheet) เป็นเอกสารประกอบการเรียนการสอนที่ช่วยให้ผู้เรียนวิเคราะห์ลักษณะสำคัญของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ และช่วยให้ผู้สอนวิเคราะห์ความเข้าใจของผู้เรียน (อัมพร ม้าคนอง. 2546 : 80 – 81) โดยทั่วไปเอกสารสรุปมโนทัศน์มีองค์ประกอบดังนี้ 1) มโนทัศน์หรือความคิดรวบยอด 2) คำนิยามหรือบทนิยาม 3) ลักษณะสำคัญของมโนทัศน์ 4) ตัวอย่างที่มีลักษณะตามมโนทัศน์และเหตุผลของการเป็นตัวอย่าง และ 5) ตัวอย่างที่ไม่มีลักษณะตามมโนทัศน์แต่มีความใกล้เคียงที่จะเป็นมโนทัศน์และเหตุผลของการไม่เป็นตัวอย่าง

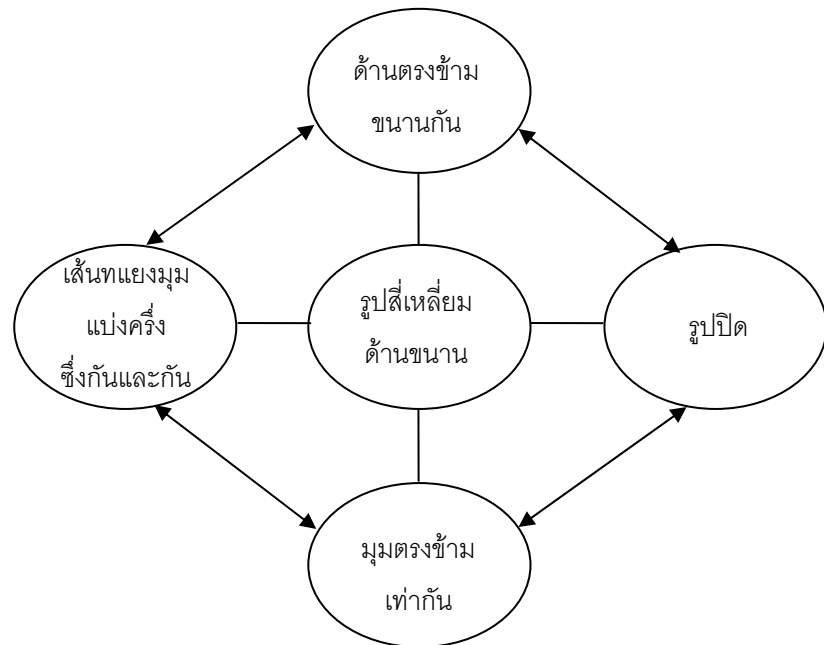
ทูมาซิส (Toumasis. 1995 : 98 – 100) ได้นำเสนอเอกสารสรุปมโนทัศน์เรื่องรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังนี้

1) มโนทัศน์ รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

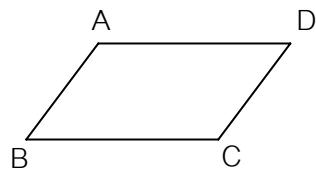
2) คำนิยามหรือบทนิยาม

รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามขนานกัน เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

3) ลักษณะสำคัญของมโนทัศน์

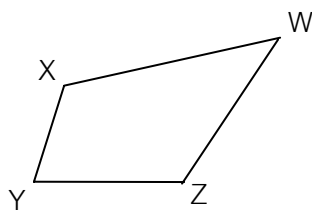


4) ตัวอย่าง



รูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
 เหตุผล : ด้าน AB ขนานกับ ด้าน DC
 ด้าน AD ขนานกับ ด้าน BC

5) สิ่งที่ไม่ใช่ตัวอย่าง



รูปสี่เหลี่ยม XYZW ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
 เหตุผล : ไม่มีด้านตรงข้ามคู่ใดขนานกัน

การจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์

ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ ซึ่งประกอบด้วย ความหมายของกรอบมโนทัศน์ ประเภทของกรอบมโนทัศน์ ส่วนประกอบของกรอบมโนทัศน์ ทฤษฎีและแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์ การสอนให้ผู้เรียนสร้างกรอบมโนทัศน์ ประโยชน์ของการนำกรอบมโนทัศน์ไปใช้ในการเรียนการสอน การนำรูปแบบการจัดการจัดกรอบมโนทัศน์ไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ และข้อดีและข้อจำกัดของการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ ดังนี้

1. ความหมายของกรอบมโนทัศน์

กรอบมโนทัศน์ (concept map) มีความหมายเช่นเดียวกับคำอีกหลายคำ เช่น แผนผังมโนทัศน์ แผนภูมิมโนทัศน์ แผนผังโนมตี ผังมโนภาพ แผนผังความคิด แผนภาพ – โครงเรื่อง ฯลฯ ในภาษาอังกฤษมีหลายคำ เช่น webbing, content mapping, mind – mapping และ knowledge maps นักการศึกษาได้ให้ความหมายของกรอบมโนทัศน์ พอสรุปได้ดังนี้

กรมวิชาการ (2542 : 62) ได้ให้ความหมายของกรอบมโนทัศน์ไว้ว่า หมายถึง ผังที่สร้างขึ้นเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของมโนทัศน์ โดยเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์ อย่างน้อยสองมโนทัศน์เข้าด้วยกันอย่างมีลำดับชั้นด้วยคำเชื่อมหรือเชื่อมโยงมโนทัศน์ใหม่เข้ากับ โครงสร้างของความรู้เดิม ช่วยให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้มโนทัศน์อย่างมีความหมายและเก็บความรู้ นั้นไว้ในหน่วยความทรงจำระยะยาว ทำให้การเรียนรู้ที่มีความคงทนต่อไป

สุวิทย์ มูลคำ (2547 : 12) ได้ให้ความหมายของกรอบมโนทัศน์ไว้ว่า หมายถึง แผนผังหรือแผนภาพที่แสดงความสัมพันธ์ของความคิดหรือข้อมูลสำคัญ ๆ ของมโนทัศน์เรื่องใดเรื่องหนึ่งอย่างมีระบบและเป็นลำดับชั้น โดยอาศัยคำหรือข้อความเป็นตัวเชื่อมเพื่อให้ความสัมพันธ์ของมโนทัศน์ต่าง ๆ เป็นไปอย่างมีความหมาย

โนแวก (Novak. 1991 : 45) ได้ให้ความหมายของกรอบมโนทัศน์ไว้ว่า เป็นเครื่องมือสำหรับการจัดการระบบความคิด โดยการเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์ เพื่อให้เกิดประโยคที่มีความหมายและแสดงออกถึงความรู้ของผู้สร้างกรอบมโนทัศน์

บอลท์ (Bolte. 1999 : 19) ได้ให้ความหมายของกรอบมโนทัศน์ไว้ว่า หมายถึง แผนผังที่แสดงถึงความสัมพันธ์ของมโนทัศน์แต่ละมโนทัศน์ โดยการเขียนแยกออกจากกันและมี คำเชื่อมที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์ โดยเขียนคำเชื่อมไปตามเส้นเชื่อมโยงของมโนทัศน์นั้น ๆ

จากความหมายของกรอบมโนทัศน์ที่กล่าวมาข้างต้นสามารถสรุปได้ว่า หมายถึง แผนผังหรือแผนภาพที่สร้างขึ้นเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของความคิดหรือข้อมูลสำคัญ ๆ ของมโนทัศน์เรื่องใดเรื่องหนึ่งอย่างมีระบบและเป็นลำดับชั้นจากมโนทัศน์ที่กว้างครอบคลุมไปสู่ มโนทัศน์ที่แคบและมโนทัศน์ที่เฉพาะเจาะจง โดยใช้คำหรือข้อความเป็นตัวเชื่อมเพื่อให้เห็น ความสัมพันธ์ของมโนทัศน์ต่าง ๆ ซึ่งแผนผังหรือแผนภาพนี้จะแสดงออกถึงความรู้ของผู้สร้างที่มี ต่อมโนทัศน์เรื่องนั้น ๆ กรอบมโนทัศน์จึงเป็นเครื่องมือที่นำมาใช้สำหรับการจัดระบบความคิด และยังช่วยให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้มโนทัศน์อย่างมีความหมายและเก็บความรู้ที่ได้นั้นไว้ในหน่วยของ ความทรงจำระยะยาว ทำให้การเรียนรู้ที่มีความคงทนต่อไป

2. ประเภทของกรอบมโนทัศน์

นักการศึกษาได้จำแนกประเภทของกรอบมโนทัศน์ออกเป็นหลายรูปแบบ ในที่นี้ ผู้วิจัยขอนำเสนอประเภทของกรอบมโนทัศน์ที่ได้จากการจำแนกประเภทของกรมวิชาการ (2542 : 67 – 70) ซึ่งได้แบ่งกรอบมโนทัศน์ออกเป็น 4 รูปแบบ ดังนี้

- 1) แบบเครือข่ายต้นไม้ (network tree) รูปแบบนี้เป็นลักษณะที่มีมโนทัศน์หลัก หรือมโนทัศน์สำคัญอยู่ส่วนบน มโนทัศน์รองอยู่ในลำดับถัดมาและมโนทัศน์เฉพาะอยู่ในลำดับ ล่างต่อไป
- 2) แบบลำดับเหตุการณ์ (events chain) รูปแบบนี้เหมาะสำหรับจัดเรียงลำดับ มโนทัศน์ตามลำดับกาลเวลาของเหตุการณ์ นักเรียนสามารถใช้กรอบมโนทัศน์แบบนี้ในการสรุป เรื่องที่มีลำดับเหตุการณ์หรือลำดับพัฒนาการ ตลอดจนเหตุการณ์ทางประวัติศาสตร์
- 3) แบบวัฏจักร (cycle) รูปแบบนี้เหมาะสำหรับแสดงความสัมพันธ์ของมโนทัศน์ที่ เป็นวัฏจักร โดยแสดงให้เห็นถึงความต่อเนื่องของมโนทัศน์ย่อยเหล่านั้นและเวียนกลับเป็นวัฏจักร ดังเดิมได้
- 4) แบบใยแมงมุม (web) รูปแบบนี้เหมาะสำหรับแสดงความสัมพันธ์เชื่อมโยง เกี่ยวพันกับสิ่งที่กำลังศึกษา ทำได้โดยการเขียนมโนทัศน์ที่ต้องการศึกษาไว้ตรงกลาง แล้วลากเส้น เชื่อมโยงไปยังมโนทัศน์สำคัญอื่น ๆ ถ้าพิจารณามโนทัศน์ที่สัมพันธ์เหล่านั้นแล้วมีมโนทัศน์ย่อย อะไรเพิ่มเติมก็สามารถเพิ่มได้เรื่อย ๆ

จากการจำแนกประเภทของกรอบมโนทัศน์จะพบว่า กรอบมโนทัศน์แต่ละประเภท มีลักษณะที่แตกต่างกันทั้งข้อดีและข้อจำกัด บางประเภทสามารถใช้เขียนได้ซับซ้อนกว้างขวาง แต่บางประเภทเขียนได้ค่อนข้างจำกัด โดยทั่วไปวิธีการเลือกใช้กรอบมโนทัศน์ประเภทใดนั้น

ขึ้นอยู่กับเหตุผลของผู้ใช้เป็นสำคัญ

3. ส่วนประกอบของกรอบมโนทัศน์

ในที่นี้ผู้วิจัยขอเสนอส่วนประกอบของกรอบมโนทัศน์แบบเครือข่ายต้นไม้ เนื่องจากเป็นลักษณะของกรอบมโนทัศน์ที่นิยมใช้กันมากและเป็นลักษณะที่ผู้วิจัยนำมาใช้ในการวิจัยครั้งนี้

โนแวก (Novak. 1991 : 45 – 46) แบ่งส่วนประกอบของกรอบมโนทัศน์แบบเครือข่ายต้นไม้ออกเป็น 4 ส่วน ได้แก่ มโนทัศน์ (concept) ความสัมพันธ์หรือการเชื่อมโยงระหว่างประพจน์ (prepositional – linkages) ลำดับของมโนทัศน์ (hierarchy map) และการเชื่อมโยงตามแนวขวาง (cross – links)

จากลักษณะและส่วนประกอบของแผนผังมโนทัศน์ที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่า ส่วนประกอบที่สำคัญของกรอบมโนทัศน์คือ มโนทัศน์ คำเชื่อมและเส้นเชื่อมโยง นอกจากนี้ หากผู้สร้างสามารถเพิ่มเติมการเชื่อมโยงข้ามสายได้ก็เป็นการแสดงให้เห็นถึงความเข้าใจในความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์ในแต่ละสายของมโนทัศน์หลัก มโนทัศน์รองหรือมโนทัศน์เฉพาะ และแสดงให้เห็นถึงความสามารถในการเชื่อมโยงมโนทัศน์ของผู้สร้างกรอบมโนทัศน์อีกด้วย

4. ทฤษฎีและแนวคิดที่เกี่ยวข้องกับการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์

4.1 ทฤษฎีการเรียนรู้ที่มีความหมายของออสซูเบล

ออสซูเบล (David P. Ausubel) เป็นนักการศึกษาชาวอเมริกันที่เป็นนักทฤษฎีในกลุ่มพุทธินิยม ออสซูเบลเป็นผู้ก่อตั้งทฤษฎีการเรียนรู้ที่มีความหมาย (A theory of meaningful verbal learning) โดยอธิบายว่าการเรียนรู้จะเกิดขึ้นเมื่อผู้เรียนได้รวมหรือเชื่อมโยงสิ่งที่เรียนรู้ใหม่ซึ่งอาจจะเป็นความคิดรวบยอดหรือความรู้ที่ได้รับใหม่ในโครงสร้างทางสติปัญญา กับความรู้เดิมที่มีอยู่ในสมองของผู้เรียนแล้ว และปัจจัยที่สำคัญที่สุดที่มีอิทธิพลต่อการเรียนรู้คือผู้สอนต้องค้นหว่าเขารู้อะไรบ้างแล้วสอนพวกเขาให้สอดคล้องกับสิ่งนั้น นั่นคือผู้สอนควรสอนในสิ่งที่มีความสัมพันธ์กับความรู้เดิมที่ผู้เรียนมีอยู่ ซึ่งความรู้ที่มีอยู่เดิมนั้นอยู่ในโครงสร้างทางปัญญา (cognitive structure) เป็นข้อมูลที่สะสมอยู่ในสมองและมีการจัดระบบไว้เป็นอย่างดี มีการเชื่อมโยงระหว่างความรู้เก่ากับความรู้ใหม่ ทำให้คนเราเกิดการเรียนรู้ได้อย่างต่อเนื่องตลอดเวลาที่ได้รับประสบการณ์ใหม่ ๆ (Ausubel. 1968 : 57)

ออสซูเบล (Ausubel. 1968 : 20 – 26) กล่าวว่า ผู้เรียนอาจเรียนรู้ด้วยการรับหรือด้วยการค้นพบและวิธีที่เลือกเรียนอาจจะเป็นการเรียนรู้ด้วยความเข้าใจที่มีความหมาย

หรือเป็นการเรียนรู้ด้วยการท่องจำโดยไม่คิดก็ได้ ออซูเบลจึงแบ่งการเรียนรู้ออกเป็น 4 ประเภท คือ

- 1) การเรียนรู้ด้วยการรับอย่างมีความหมาย
- 2) การเรียนรู้ด้วยการรับแบบท่องจำโดยไม่คิดหรือแบบนกแก้วนกขุนทอง
- 3) การเรียนรู้ด้วยการค้นพบอย่างมีความหมาย
- 4) การเรียนรู้ด้วยการค้นพบแบบท่องจำโดยไม่คิดหรือแบบนกแก้วนกขุนทอง

ในการเรียนรู้ด้วยการรับอย่างมีความหมายนั้นออซูเบลและโรบินสัน (Ausubel and Robinson. 1969 : 53) อธิบายว่า เป็นการเรียนรู้ที่ผู้เรียนได้รับมาจากที่ผู้สอนอธิบาย สิ่งที่จะต้องเรียนรู้ให้ฟังและผู้เรียนรับฟังด้วยความเข้าใจ โดยผู้เรียนมองเห็นความสัมพันธ์ของโครงสร้างความรู้ที่เก็บไว้ในความทรงจำและจะสามารถนำไปใช้ในอนาคต ซึ่งตัวแปรที่สำคัญในการเรียนรู้ด้วยการรับอย่างมีความหมายมี 3 ประการ คือ 1) สิ่งที่จะเรียนรู้จะต้องมีความหมาย 2) ผู้เรียนจะต้องมีการเชื่อมโยงความคิดซึ่งมีความสัมพันธ์กับสิ่งที่จะเรียนรู้ และ 3) ผู้เรียนจะต้องมีความตั้งใจที่จะเชื่อมโยงความคิดเหล่านี้กับสิ่งที่เคยเรียนรู้และเก็บไว้ในโครงสร้างความรู้

4.2 แนวคิดเกี่ยวกับการจัดกรอบมโนทัศน์ของโนแวก

โนแวก (Joseph D. Novak) เป็นอาจารย์ประจำภาควิชาการศึกษา วิทยาลัยเกษตรกรรมและชีววิทยา มหาวิทยาลัยคอร์เนล ประเทศสหรัฐอเมริกา เป็นบุคคลสำคัญในการคิดค้นและประยุกต์การสร้างกรอบมโนทัศน์มาใช้ในการเรียนการสอน โนแวกได้อาศัยแนวคิดจากทฤษฎีการเรียนรู้อย่างมีความหมายของออซูเบลเกี่ยวกับการจัดโครงสร้างความรู้ในสมองและหลักการเรียนรู้อย่างมีความหมายเป็นพื้นฐาน แล้วพัฒนากลยุทธ์การเรียนการสอนที่เรียกว่าแผนผังแสดงความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์ โดยฝึกให้ผู้เรียนนามโนทัศน์ที่ได้เรียนรู้ในแต่ละเรื่องมาจัดเป็นแผนผังแสดงความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์ ซึ่งความรู้ในเรื่องใดก็ตามจะประกอบด้วยมโนทัศน์หลายมโนทัศน์ และมโนทัศน์เหล่านั้นควรมีการจัดความสัมพันธ์กันอย่างเป็นระบบจากมโนทัศน์ที่กว้างและครอบคลุมไปสู่มโนทัศน์ที่แคบและเฉพาะเจาะจง และจะมีคำเชื่อมสำหรับเชื่อมความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์เพื่อให้เกิดประโยคที่มีความหมาย ซึ่งแผนผังนี้จะช่วยให้ผู้เรียนเกิดการคิดและเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์อย่างต่อเนื่อง เป็นระบบและเป็นลายลักษณ์อักษร (Novak and Gowin. 1984 : 12)

5. การสอนให้ผู้เรียนสร้างกรอบมโนทัศน์

ในการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์มีความจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องสอนให้ผู้เรียนสร้างกรอบมโนทัศน์ ซึ่งการสร้างกรอบมโนทัศน์นั้นเป็นกิจกรรมเชิงสร้างสรรค์หรือก่อให้เกิดความคิด

สร้างสรรคดีได้เป็นอย่างดี (มนัส บุญประกอบ. 2533 ก : 22) บารูดีและบาร์เทล (Baroody and Bartels. 2000 : 608 – 609) ได้เสนอแนะวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยให้ผู้เรียนสร้างกรอบมโนทัศน์ พอสรุปได้ดังนี้

1) ผู้สอนชี้แจงและแนะนำให้ผู้เรียนรู้จักวิธีการสร้างกรอบมโนทัศน์ โดยผู้สอนสร้างกรอบมโนทัศน์เป็นตัวอย่าง จากนั้นให้ผู้เรียนได้เรียนรู้และเข้าใจเชื่อมโยงมโนทัศน์ต่าง ๆ ที่จะนำมาสร้างเป็นกรอบมโนทัศน์และร่วมกันสร้างกรอบมโนทัศน์ทั้งห้อง

2) ผู้สอนให้ผู้เรียนฝึกสร้างกรอบมโนทัศน์ โดยเริ่มจากงานที่ง่ายที่สุดก่อนเพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้สึกว่าจะไม่ยากเกินความสามารถของพวกเขา เช่น การสร้างกรอบมโนทัศน์แบบเติมมโนทัศน์ (fill – in task) ต่อด้วยการสร้างกรอบมโนทัศน์แบบเพิ่มมโนทัศน์ (add – on task) จากนั้นจึงฝึกการสร้างกรอบมโนทัศน์แบบปลายปิด (close – ended list task) และต่อการสร้างกรอบมโนทัศน์แบบปลายเปิด (open – ended list task)

3) ผู้สอนควรเริ่มสอนด้วยกรอบมโนทัศน์ที่ไม่ซับซ้อนมีมโนทัศน์ไม่มากให้ผู้เรียนเริ่มสร้างโดยการวางมโนทัศน์หลัก ๆ เพียง 3 – 4 มโนทัศน์แล้วจึงค่อย ๆ เพิ่มมโนทัศน์ที่มีความสำคัญรองลงมาและตัวอย่างที่เฉพาะเจาะจงทีหลัง

4) ผู้สอนควรเริ่มสอนด้วยการสร้างกรอบมโนทัศน์ในหัวข้อเดียวก่อน จากนั้นจึงนำไปเชื่อมกับกรอบมโนทัศน์ที่สัมพันธ์กันในหัวข้ออื่น ๆ ต่อไป

5) ผู้สอนควรจัดกิจกรรมให้มีการทำงานร่วมกัน อาจจะร่วมกันทั้งชั้นในการประเมินความถูกต้องหรือปรับปรุงกรอบมโนทัศน์ให้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น เนื่องจากผู้เรียนยังคงต้องการความช่วยเหลือในการสร้างกรอบมโนทัศน์

6) ผู้สอนควรให้มีการแบ่งกลุ่มกันทำงานเป็นทีมและให้ผู้สอนหมั่นตรวจสอบและให้ผลย้อนกลับบ่อย ๆ รวมถึงย้ำถึงวิธีการสร้างว่าจะต้องเอามโนทัศน์ที่กว้างที่สุดไว้บนสุดของกรอบมโนทัศน์จนถึงมโนทัศน์ที่มีความเฉพาะเจาะจงที่สุด

7) ผู้สอนให้ผู้เรียนสร้างกรอบมโนทัศน์คร่าว ๆ เสียก่อน แล้วให้มีการตรวจสอบความถูกต้องด้วยตนเองก่อน จากนั้นจึงเขียนกรอบมโนทัศน์ที่ได้รับการตรวจสอบจากตนเองแล้วส่งให้ผู้สอนตรวจต่อไป ขั้นตอนนี้จะทำให้ผู้เรียนได้ฝึกวิเคราะห์งานของตนและตระหนักว่าการปรับปรุงเป็นธรรมชาติของงานที่ซับซ้อนหรือการต้องการงานที่มีคุณภาพ

8) ผู้สอนจะต้องพยายามกระตุ้นให้ผู้เรียนใช้คำเชื่อมที่แสดงเฉพาะเจาะจง ไม่ใช่แค่เชื่อมให้มโนทัศน์มีความสัมพันธ์กันเท่านั้น แต่ต้องบอกให้ได้ว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้นำการสร้างกรอบมโนทัศน์มาใช้ในชั้นสรุปของการจัดกระบวนการจัดการเรียนรู้สำหรับผู้เรียนในกลุ่มทดลอง โดยให้ผู้เรียนสร้างกรอบมโนทัศน์เพื่อใช้สรุปเรื่องที่เรียน ผู้วิจัยได้ปรับเปลี่ยนกิจกรรมการสร้างกรอบมโนทัศน์เพื่อให้เหมาะสมกับผู้เรียนซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนต่าง ๆ 6 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ผู้สอนให้ผู้เรียนระบุมโนทัศน์ที่เกี่ยวข้องกับบทเรียน

ขั้นที่ 2 ผู้สอนให้ผู้เรียนเรียงลำดับมโนทัศน์จากมโนทัศน์ที่กว้างไปสู่มโนทัศน์ที่แคบ

ขั้นที่ 3 ผู้สอนให้ผู้เรียนจัดกลุ่มมโนทัศน์ที่มีความสัมพันธ์กัน

ขั้นที่ 4 ผู้สอนให้ผู้เรียนหาคำเชื่อมและเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์แล้ว

เขียนลงบนกระดาษ

ขั้นที่ 5 ผู้สอนให้ผู้เรียนนำเสนอและร่วมกันอภิปราย

ขั้นที่ 6 ผู้สอนนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่เตรียมมาและให้ผู้เรียนสรุปมโนทัศน์ที่เรียน

ลงในเอกสารสรุปมโนทัศน์ที่ผู้สอนเตรียมมาให้

6. ประโยชน์ของการนำกรอบมโนทัศน์ไปใช้ในการเรียนการสอน

กรอบมโนทัศน์จัดเป็นนวัตกรรมการศึกษาอย่างหนึ่ง ซึ่งมีลักษณะเฉพาะและสามารถนำมาใช้ประโยชน์ได้อย่างกว้างขวาง ง่ายต่อการศึกษาและสามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการเรียนการสอนได้อย่างดีกับทุก ๆ วิชา ครบทุกขั้นตอนของกระบวนการเรียนการสอน ตั้งแต่การวางแผนจนกระทั่งการประเมินผล ใช้ดึงศักยภาพของผู้เรียนออกมาให้ตรวจสอบได้ (มนัส บุญประกอบ. 2533 ข : 15, 24 – 25) นักการศึกษากล่าวถึงประโยชน์ของการนำกรอบมโนทัศน์ไปใช้ในการเรียนการสอน พอสรุปได้ดังนี้

สุวิทย์ มูลคำ (2547 : 45) กล่าวถึงประโยชน์ของการจัดกรอบมโนทัศน์ไว้ดังนี้

1) ช่วยแสดงผลของการคิดที่สามารถมองเห็น อธิบายได้อย่างเป็นระบบชัดเจน และเป็นรูปธรรม

2) ช่วยจัดข้อมูลหรือความคิดให้เป็นระบบระเบียบ

3) ช่วยให้เกิดความเข้าใจเนื้อหาสาระได้ง่าย รวดเร็วและประหยัดเวลา

4) ช่วยให้จดจำเนื้อหาสาระนั้นได้นาน

โนแวกและโกวิน (Novak and Gowin. 1984 : 40 – 54) กล่าวถึงประโยชน์ของกรอบมโนทัศน์ไว้ดังนี้

1) ใช้กรอบมโนทัศน์ในการสำรวจความรู้พื้นฐานของผู้เรียน โดยสำรวจความรู้ที่

ผู้เรียนมีมาก่อน เพื่อใช้ในการเตรียมการสอนให้เหมาะสมกับผู้เรียน

- 2) ใช้กรอบมโนทัศน์แสดงความสัมพันธ์ของมโนทัศน์ต่าง ๆ ที่อยู่ในความคิดของผู้เรียน ซึ่งทำให้ทราบว่าผู้เรียนกำลังคิดอะไรและกำลังคิดจะทำอะไร
- 3) ใช้กรอบมโนทัศน์ในการสรุปความหมายจากตำรา ทำให้ประหยัดเวลาในการอ่านครั้งต่อไป ไม่เกิดความเบื่อหน่ายในการอ่าน
- 4) ใช้กรอบมโนทัศน์ในการสรุปความหมายจากการปฏิบัติการ เป็นแนวทางแก่ผู้เรียนว่าควรจะทำอะไรบ้าง สังเกตสิ่งใดบ้าง เพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์
- 5) ใช้กรอบมโนทัศน์เป็นเครื่องมือในการจัดบันทึกต่าง ๆ จะทำให้จดจำได้ง่ายและทำให้จับใจความสำคัญได้

6) ใช้กรอบมโนทัศน์ในการวางแผนเขียนรายงานหรือการบรรยาย

จากประโยชน์ของการนำกรอบมโนทัศน์ไปใช้ในการเรียนการสอนที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่าการจัดกรอบมโนทัศน์จะก่อให้เกิดประโยชน์ทั้งผู้เรียนและผู้สอนมาก กล่าวคือ

- 1) การจัดกรอบมโนทัศน์เป็นประโยชน์สำหรับนักเรียน ถ้านักเรียนนำเนื้อหาที่เรียนมาสรุปเป็นกรอบมโนทัศน์จะทำให้นักเรียนเข้าใจบทเรียนได้ดียิ่งขึ้น ทำให้นักเรียนสามารถจดจำเนื้อหาที่เรียนได้นาน ช่วยประหยัดเวลาอ่านหนังสือในครั้งต่อไป และทำให้นักเรียนทราบว่าตนเองเข้าใจเนื้อหาที่เรียนหรือไม่ นอกจากนี้ถ้าครูนำกรอบมโนทัศน์มาใช้ในการเรียนการสอน จะช่วยให้นักเรียนมองเห็นความต่อเนื่องและความสัมพันธ์ของเนื้อหาที่เรียนทั้งหมด ซึ่งจะทำให้ให้นักเรียนเข้าใจบทเรียนยิ่งขึ้น ช่วยพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและให้มีความคงทนในการเรียนรู้
- 2) การจัดกรอบมโนทัศน์เป็นประโยชน์สำหรับครู คือ ครูสามารถนำไปใช้ในการวางแผนการสอนเพื่อให้บรรลุจุดประสงค์ที่กำหนดไว้ โดยนำกรอบมโนทัศน์ไปใช้ในขั้นตอนการเตรียมการสอน การจัดลำดับเนื้อหาที่จะสอน ใช้เป็นเครื่องมือในการประเมินผลการเรียนรู้ของนักเรียนทำให้ทราบว่านักเรียนเข้าใจถูกต้องหรือไม่ หรือยังเรียนยังไม่เข้าใจในเรื่องใดบ้าง เพื่อจะได้นำไปปรับปรุงการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในครั้งต่อไป

7. การนำรูปแบบการจัดกรอบมโนทัศน์ไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

การจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าเทคนิคการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์ เป็นกระบวนการที่ให้ผู้เรียนนำมโนทัศน์ในเนื้อหาสาระที่ได้เรียนรู้จัดระบบ จัดลำดับและเชื่อมโยงความสัมพันธ์แต่ละมโนทัศน์ที่มีความเกี่ยวข้องกันเข้าด้วยกันทำให้เกิดเป็นกรอบมโนทัศน์ขึ้น

สุวิทย์ มูลคำ (2547 : 70 - 71) ได้กล่าวถึงวัตถุประสงค์และขั้นตอนของการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ไว้ดังนี้

วัตถุประสงค์ของการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์มีดังนี้

1) เพื่อฝึกให้ผู้เรียนรู้จักสังเกต เปรียบเทียบ สรุปและจำแนกแยกแยะสิ่งต่าง ๆ จัดเป็นระบบ หรือหมวดหมู่ได้อย่างถูกต้อง

2) ฝึกให้ผู้เรียนศึกษา ค้นคว้า คิดเพื่อให้ได้ความรู้และสามารถสร้างความคิดรวบยอดด้วยตนเอง

3) เพื่อให้ผู้เรียนสามารถสร้างและสรุปความรู้ด้วยการจัดกรอบมโนทัศน์รูปแบบต่าง ๆ

ขั้นตอนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ มีขั้นตอนสำคัญดังต่อไปนี้

1) ขั้นตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐาน ผู้สอนจะต้องทำการตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของผู้เรียนเกี่ยวกับเรื่องที่จะให้ผู้เรียนเรียนรู้ ซึ่งอาจทำได้โดยผู้เรียนทำแบบทดสอบหรือการตั้งคำถามให้ผู้เรียนตอบ

2) ขั้นระบุมโนทัศน์พื้นฐานที่ผู้เรียนขาด ผู้สอนจะต้องระบุมโนทัศน์พื้นฐานที่ผู้เรียนยังขาดให้ชัดเจน

3) ขั้นเสริมมโนทัศน์พื้นฐานให้ผู้เรียน ในกรณีที่ผู้เรียนยังขาดมโนทัศน์พื้นฐาน ผู้สอนจะต้องเสริมให้ผู้เรียน ซึ่งอาจจะใช้วิธีการอธิบายโดยใช้สื่อต่าง ๆ ประกอบก็ได้

4) ขั้นเรียนรู้ เพื่อให้ผู้เรียนเกิดมโนทัศน์ การจัดการเรียนรู้ควรประกอบไปด้วยขั้นตอนย่อย ๆ ดังนี้

4.1) ให้ผู้เรียนศึกษาเนื้อหาและระบุมโนทัศน์ที่สำคัญจากบทเรียนที่กำลังเรียน โดยผู้สอนช่วยอธิบายความหมายของแต่ละมโนทัศน์ให้ผู้เรียนเข้าใจ

4.2) ให้ผู้เรียนจัดลำดับมโนทัศน์ที่เรียนมาจากมโนทัศน์ที่กว้างไปยังมโนทัศน์ที่รองลงมาตามลำดับจนกระทั่งถึงมโนทัศน์ที่เฉพาะเจาะจง

4.3) ให้ผู้เรียนจัดมโนทัศน์ที่มีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกัน

4.4) ให้ผู้เรียนหาค่าเชื่อมและทำการเชื่อมโยงมโนทัศน์ต่าง ๆ เข้าด้วยกันโดยให้เส้นโยงทุกเส้นที่โยงมีค่าเชื่อมบอกความหมายไว้

5) ขั้นสรุปด้วยกรอบมโนทัศน์ ประกอบด้วย

5.1) ผู้สอนคัดเลือกตัวอย่างกรอบมโนทัศน์ที่ผู้เรียนสร้างขึ้น

5.2) ให้ผู้เรียนที่ได้รับการคัดเลือกนำเสนอให้เพื่อนฟัง

- 5.3) ผู้เรียนช่วยกันวิจารณ์ให้ข้อเสนอแนะ
- 5.4) ผู้สอนเสนอกรอบมโนทัศน์ที่ผู้สอนเตรียมมา
- 5.5) ผู้สอนและผู้เรียนช่วยกันสรุป
- 6) ขั้นการประเมินผล ผู้สอนและผู้เรียนร่วมกันประเมินผลการเรียนรู้ของผู้เรียน ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้นำขั้นตอนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ของ สุวิทย์ มูลคำ มาใช้ในการจัดกระบวนการจัดการเรียนรู้ให้กับกลุ่มตัวอย่างที่เป็นกลุ่มทดลอง

8. ข้อดีและข้อจำกัดของการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์

สุวิทย์ มูลคำ (2547 : 73) ได้กล่าวถึงข้อดีและข้อจำกัดของการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ไว้ดังนี้

ข้อดี

- 1) เกิดมโนทัศน์ในเรื่องที่เรียนอย่างถูกต้อง
- 2) ปรับเปลี่ยนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนให้ถูกต้อง
- 3) นำความรู้เรื่องมโนทัศน์ไปอธิบายปรากฏการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้น
- 4) นำแนวคิดในการจัดกรอบมโนทัศน์ไปศึกษาหาความรู้หรือสรุปบทเรียนต่าง ๆ ด้วยตนเองได้

- 5) ใช้ได้กับผู้เรียน ทุกเพศ ทุกวัย และทุกวิชา
- 6) ใช้ได้ดีกับลักษณะการเรียนรู้ที่มีการอ่านตำรา ฟังคำบรรยาย การสังเกต การสาธิต

ข้อจำกัด

- 1) ผู้สอนต้องเรียนรู้และทำความเข้าใจรูปแบบและประโยชน์ของกรอบมโนทัศน์รูปแบบต่าง ๆ จึงจะสามารถสอนหรือแนะนำผู้เรียนให้เกิดการเรียนรู้ได้ดี
- 2) ผู้เรียนอาจเกิดความเบื่อหน่ายหรือไม่มีความอดทนต่อบางมโนทัศน์ที่ไม่กระจ่างชัดเจน

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ดังนี้

1. ความหมายของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์

การที่ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้โดยได้ทั้งความรู้ความเข้าใจ ความสามารถในการคำนวณและการแก้โจทย์ปัญหาได้ ล้วนเป็นการเกิดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของผู้เรียนทั้งสิ้น

วิลสัน (Wilson. 1971 : 643 – 696) กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ (achievement of mathematics) คือ ความสามารถทางสติปัญญาในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จากแนวคิดของวิลสันอาจกล่าวได้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ก็คือผลการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่ประเมินพฤติกรรมด้านสติปัญญาในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ออกมาเป็นระดับความสามารถนั่นเอง วิลสันได้แบ่งพฤติกรรมทางสติปัญญาในการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยอิงลำดับขั้นของพฤติกรรมด้านพุทธิพิสัยของบลูมไว้เป็น 4 ระดับดังนี้

1) ความรู้ความจำด้านการคำนวณ (computation) เป็นความสามารถในการระลึกถึงสิ่งที่เรียนมาแล้วเป็นพฤติกรรมที่อยู่ในระดับพื้นฐานแรกสุด แบ่งความรู้ความจำด้านการคำนวณออกเป็น 3 ขั้นคือ ข้อเท็จจริง ศัพท์และนิยาม และกระบวนการคำนวณ

2) ความเข้าใจ (comprehension) เป็นความสามารถในการนำความรู้ที่ได้เรียนมาแล้วมาสัมพันธ์กับโจทย์หรือปัญหาใหม่ เป็นพฤติกรรมที่ถัดจากความรู้ด้านการคำนวณ แบ่งความรู้และความสามารถที่เกี่ยวกับความเข้าใจออกเป็น 6 ขั้นคือ ความคิดรวบยอด หลักการ กฎและข้อสรุปอ้างอิงทั่วไป โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ การแปลงโจทย์จากรูปแบบหนึ่งไปเป็นอีกรูปแบบหนึ่ง การคิดตามแนวของเหตุผล และการอ่านและตีความโจทย์

3) การนำไปใช้ (application) เป็นความสามารถในการแก้ปัญหาค่คล้ายกับปัญหาที่เคยเรียนหรือคล้ายกับแบบฝึกหัด ผู้เรียนสามารถเลือกกระบวนการแก้ปัญหาค่าดำเนินการแก้ปัญหาค่าได้ไม่ยาก พฤติกรรมในระดับนี้แบ่งความสามารถที่เกี่ยวกับการนำไปใช้ ออกเป็น 4 ขั้นคือ การแก้ปัญหาค่าที่คุ้นเคย การเปรียบเทียบ การวิเคราะห์ข้อมูล และการมองเห็นแบบแผน ลักษณะโครงสร้างที่เหมือนกันและการสมมาตร

4) การวิเคราะห์ (analysis) เป็นพฤติกรรมขั้นสูงสุดของสมรรถภาพทางสติปัญญาในการเรียนคณิตศาสตร์ วัตถุประสงค์สูงสุดของการเรียนการสอนคณิตศาสตร์จะอยู่ในระดับการวิเคราะห์ ซึ่งแบ่งความสามารถที่เกี่ยวกับการวิเคราะห์ออกเป็น 5 ขั้นคือ การแก้ปัญหาค่าไม่เคยประสบมาก่อน การค้นพบความสัมพันธ์ การสร้างข้อพิสูจน์ การวิพากษ์วิจารณ์ข้อพิสูจน์ และการสร้างและทดสอบความถูกต้องของข้อสรุปอ้างอิงทั่วไป

2. ปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

นักการศึกษาได้กล่าวถึงปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน พอสรุปได้ดังนี้
 จารุวรรณ ยังรักษา (2542 : 50) พบว่า เวลาและคุณภาพของการสอนมีอิทธิพลโดยตรงต่อปริมาณความรู้ที่ผู้เรียนได้รับ และผลสัมฤทธิ์ของแต่ละบุคคลขึ้นอยู่กับองค์ประกอบของสติปัญญาและความสามารถทางสมองร้อยละ 50 – 60 ขึ้นอยู่กับโอกาสและสิ่งแวดล้อมร้อยละ 10 – 15

คลอสเมียร์ (Klausmeier. 1980 อ้างถึงในนิภา บุญธรรม. 2538 : 66 – 67) กล่าวว่า ปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน มีดังนี้

- 1) คุณลักษณะของผู้เรียน ซึ่งได้แก่ ความพร้อมทางสมองและทางสติปัญญา ความพร้อมทางด้านร่างกายและความสามารถด้านทักษะของร่างกาย คุณลักษณะทางจิตใจ ซึ่ง ได้แก่ ความสนใจ แรงจูงใจ เจตคติและค่านิยม ความเข้าใจเกี่ยวกับตนเอง ความเข้าใจในสถานการณ์ อายุ เพศ
- 2) คุณลักษณะของผู้สอน ซึ่งได้แก่ สติปัญญา ความรู้ในวิชาที่สอน การพัฒนาความรู้ ทักษะทางร่างกาย คุณลักษณะทางจิตใจ สุขภาพ ความเข้าใจเกี่ยวกับตนเอง ความเข้าใจในสถานการณ์ อายุ เพศ
- 3) พฤติกรรมระหว่างผู้สอนและผู้เรียน ซึ่งได้แก่ ปฏิสัมพันธ์ระหว่างผู้สอนกับผู้เรียนที่ต้องมีพฤติกรรมอันเป็นมิตรต่อกัน เข้าใจกัน มีความสัมพันธ์ที่ดีและมีความรู้สึกที่ดีต่อกัน
- 4) คุณลักษณะของกลุ่มผู้เรียน ซึ่งได้แก่ โครงสร้างของกลุ่ม ความสัมพันธ์ของกลุ่ม เจตคติ ความสามัคคี ภาวะผู้นำและผู้ตามที่ดี
- 5) คุณลักษณะของพฤติกรรมเฉพาะตัว ซึ่งได้แก่ การตอบสนองต่อการเรียน ความพร้อมของเครื่องมือและอุปกรณ์ในการเรียน ความสนใจต่อบทเรียน
- 6) แรงผลักดัน ซึ่งได้แก่ การมีครอบครัวที่อบอุ่น การอยู่ในสิ่งแวดล้อมที่ดีและการมีคุณธรรมพื้นฐานที่ดี เช่น ความขยันหมั่นเพียร ความประพฤติดี

จากปัจจัยที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่า มีองค์ประกอบหลายประการที่ส่งผลกระทบต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แต่ปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนมากที่สุดคือ ผู้เรียน ผู้สอนและสิ่งแวดล้อม

3. การวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

การวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นการตรวจสอบความรู้ของนักเรียนในสิ่งที่เรียนไปแล้วว่าบรรลุตามจุดมุ่งหมายที่ครูตั้งไว้หรือไม่ เพื่อจะได้ปรับปรุงการเรียนการสอนต่อไป

ในการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนจะต้องใช้เครื่องมือในการวัด ซึ่งเครื่องมือนั้นก็คือแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน นักการศึกษาได้กล่าวถึงแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนพอสรุปได้ดังนี้

ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ (2538 : 171 – 172) กล่าวว่า แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นแบบทดสอบที่ใช้วัดความรู้ของนักเรียนที่ได้เรียนไปแล้ว ซึ่งมักจะเป็นข้อคำถามให้นักเรียนตอบด้วยกระดาษและดินสอกับให้นักเรียนปฏิบัติจริง โดยแบ่งแบบทดสอบประเภทนี้ออกเป็น 2 ประเภท คือ แบบทดสอบของครูและแบบทดสอบมาตรฐาน

พวงรัตน์ ทวีรัตน์ (2540 : 96 – 97) กล่าวว่า แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นแบบทดสอบที่ใช้วัดความรู้ ทักษะและสมรรถภาพด้านต่าง ๆ ที่นักเรียนได้รับจากประสบการณ์ทั้งจากที่บ้านและสถาบันการศึกษา แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนนี้แบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ แบบทดสอบที่ครูสร้างขึ้นเองและแบบทดสอบที่เป็นมาตรฐาน แบบทดสอบทั้งสองประเภทนี้จะถามเนื้อหาเหมือนกัน คือ ถามสิ่งทีนักเรียนได้รับการเรียน – การสอน ซึ่งจัดเป็นกลุ่มพฤติกรรมได้ 6 ประเภท คือ ความรู้-ความจำ ความเข้าใจ การนำไปใช้ การวิเคราะห์ การสังเคราะห์ และการประเมินค่า

จากการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่า การวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นการตรวจสอบความรู้ของนักเรียนในสิ่งที่เรียนไปแล้วโดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ซึ่งมี 2 ประเภท คือ แบบทดสอบที่ครูสร้างขึ้นเองและแบบทดสอบที่เป็นมาตรฐาน

ความคงทนในการเรียนรู้

ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับความคงทนในการเรียนรู้ ซึ่งประกอบด้วย ความหมายของความคงทนในการเรียนรู้ ปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อความคงทนในการเรียนรู้ และการวัดความคงทนในการเรียนรู้ ดังนี้

1. ความหมายของความคงทนในการเรียนรู้

ความคงทนในการเรียนรู้ (retention) มีความจำเป็นและสำคัญมากสำหรับ วิชาคณิตศาสตร์ เพราะในธรรมชาติของการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ต้องใช้ความรู้เดิมเป็นพื้นฐาน สำหรับการเรียนรู้เนื้อหาในระดับสูงที่มีความต่อเนื่องกันไปตามลำดับ การที่จะจดจำได้มากน้อยเพียงใดนั้นมีส่วนหนึ่งขึ้นอยู่กับกระบวนการเรียนรู้ นักการศึกษาได้ให้ความหมายของความคงทนในการเรียนรู้ พอสรุปได้ดังนี้

สุชา จันท์เอม (2541 : 181) ได้ให้ความหมายของความคงทนในการเรียนรู้ไว้ว่า เป็นการเก็บหรือรักษาการรับรู้และความเข้าใจไว้ได้นาน

ออซุเบลและโรบินสัน (Ausubal and Robinson. 1969 : 105) ได้ให้ความหมายของความคงทนในการเรียนรู้ไว้ว่า เป็นกระบวนการของการคงสภาพของความหมายใหม่ทั้งหมดหรือบางส่วน และคงปริมาณของความหมายเดิมที่ได้รับในขณะใดขณะหนึ่ง

จากความหมายของความคงทนในการเรียนรู้ที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า หมายถึงความสามารถในการจดจำหรือย้อนระลึกถึงในความรู้ ทักษะและประสบการณ์ต่าง ๆ ที่ได้เรียนรู้มาก่อนแล้ว เพื่อนำมาใช้ในสถานการณ์ที่กำลังประสบในปัจจุบัน

2. ปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อความคงทนในการเรียนรู้

นักการศึกษาได้กล่าวถึงปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อความคงทนในการเรียนรู้ไว้หลายปัจจัย ในที่นี้ผู้วิจัยขอเสนอของวรวรรณี ลิมาอักษร (2540 : 107) ซึ่งกล่าวไว้ว่า ปัจจัยที่มีอิทธิพลต่อการจำ มีดังนี้

1) วัย ผู้ใหญ่ที่มีอายุไม่เกิน 35 ปี จะจำได้มากและจำได้เร็วกว่าเด็ก ทั้งนี้เพราะผู้ใหญ่มีสมองที่มีพัฒนาการเต็มที่แล้ว มีเทคนิคและเครื่องมือในการจำมากกว่าเด็ก

2) ระดับสติปัญญา นักจิตวิทยาไม่พบความสัมพันธ์โดยตรงระหว่างระดับสติปัญญากับความจำ แต่พบว่าผู้ที่มีสติปัญญาสูงมักจะมีเทคนิคในการจำที่ดีกว่าและใช้เวลาในการจำน้อยกว่าผู้ที่มีสติปัญญาต่ำ และยังพบว่าผู้ที่มีสติปัญญาต่ำจะจำสิ่งต่าง ๆ ได้นาน เนื่องจากต้องใช้ความพยายามในการจำและต้องใช้จำนวนครั้งในการทบทวนมากกว่า จึงทำให้เกิดรอยความทรงจำลึกและชัดเจนกว่า

3) ความใส่ใจและแรงจูงใจ เมื่อบุคคลมีความใส่ใจในเรื่องใดเป็นพิเศษ มักจะมีความจดจำและเอาใจใส่ในเรื่องนั้นมาก จะส่งผลให้มีการบันทึกในความจำระยะยาวได้มาก

4) ความประทับใจ ความประทับใจทั้งด้านดีและไม่ดีจะกระตุ้นให้บุคคลเกิดอารมณ์ ซึ่งอารมณ์จะไปกระตุ้นการกระทำ จะช่วยเพิ่มความสามารถในการบันทึกความจำให้มากขึ้น

5) เพศ มีแนวโน้มว่าเพศหญิงสนใจที่จะจำและมีการพัฒนาความจำมากกว่าเพศชายและมักจะมีการฝึกฝนความจำอยู่เสมอ ๆ

3. การวัดความคงทนในการเรียนรู้

นักการศึกษาได้กล่าวถึงการวัดความคงทนในการเรียนรู้ไว้หลายวิธี ในที่นี้ผู้วิจัยขอ นำเสนอของกฤษี คำชาย (2540 : 172 – 173) ซึ่งแบ่งวิธีการวัดความจำออกเป็น 3 วิธี ดังนี้

1) การวัดการระลึก วิธีการวัดวิธีนี้จะเป็นการดึงเอาข้อมูลที่นักเรียนมีอยู่ออกมาโดยใช้สิ่งกระตุ้นความจำน้อยที่สุด วิธีการวัดนี้จัดว่ามีประสิทธิภาพน้อยที่สุดในการวัดความจำระยะยาว อีกทั้งยังไม่สามารถบอกถึงความแตกต่างระหว่างการเรียนรู้ที่นักเรียนไม่ทราบอะไรเลยกับการที่นักเรียนมีปัญหาด้านความจำ

2) การวัดการรู้จัก วิธีการวัดวิธีนี้จะใช้ตัวกระตุ้นความจำมากกว่าการวัดความระลึก

3) การเรียนรู้ซ้ำ เป็นวิธีการวัดความจำที่ค่อนข้างจะละเอียดอ่อนที่สุด ผลต่างระหว่างจำนวนหรือเวลาที่ต้องการในการใช้เรียนครั้งแรกกับจำนวนหรือเวลาที่ต้องการในการใช้เรียนซ้ำคุณด้วยร้อยละ คิดเป็นร้อยละของการประหยัดเวลาเรียน การวัดการเรียนรู้ซ้ำเป็นวิธีที่มีประโยชน์มากกว่าการวัดการระลึกหรือการรู้จักในกรณีที่ใช้วัดสิ่งที่เรียนไปแล้วและดูเหมือนจะลืมไปแล้ว

เนื่องจากความคงทนในการเรียนรู้เป็นปัจจัยที่มีความสำคัญต่อการเรียนคณิตศาสตร์เป็นอย่างยิ่ง ดังนั้นในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยจึงต้องการวัดความคงทนในการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ โดยทำการทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้หลังการทดลอง 2 สัปดาห์

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้ดังต่อไปนี้

1. งานวิจัยในประเทศ

งานวิจัยในประเทศที่เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ทางด้านคณิตศาสตร์ยังมีอยู่น้อย จากที่ได้พบมาส่วนใหญ่จะเป็นงานวิจัยทางด้านวิทยาศาสตร์

กาญจนารักษ์ เผือกนาค (2535 : บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัยเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาวิทยาศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องบรรยากาศ ที่ได้รับการสอนโดยใช้แผนภูมิโนมติกกับการสอนปกติ ผลการวิจัยพบว่านักเรียนที่เรียนโดยใช้แผนภูมิโนมติกมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาวิทยาศาสตร์เรื่องบรรยากาศสูงกว่านักเรียนที่เรียนโดยวิธีปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

สุนีย์ สอนตระกูล (2535 : บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัยเพื่อพัฒนาระบบการเรียนการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์สำหรับวิชาชีววิทยาระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยนำระบบการเรียนการสอนดังกล่าวไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4, 5 และ 6 ในโรงเรียนบวรมงคล ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนโดยใช้ระบบการเรียนการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาชีววิทยาสูงกว่านักเรียนที่เรียนโดยวิธีปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ทุกระดับชั้น

ศุภลักษณ์ ทองสนธิ (2536 : บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลของการใช้เทคนิคการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์ในการเปลี่ยนแปลงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนในวิชาเคมี ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนวัดเขมาภิรตาราม ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนในกลุ่มทดลองมีการเปลี่ยนแปลงมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเป็นมโนทัศน์ที่ถูกต้อง 7 มโนทัศน์ จากมโนทัศน์ทั้งหมด 10 มโนทัศน์ ส่วนนักเรียนในกลุ่มควบคุมไม่มีการเปลี่ยนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนเป็นมโนทัศน์ที่ถูกต้องในทุกมโนทัศน์และนักเรียนกลุ่มทดลองมีคะแนนทดสอบหลังเรียนในวิชาเคมีสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

วิภา เกียรติธนะบำรุง (2537 : บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลของการใช้เทคนิคการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาชีววิทยาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 และเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาชีววิทยา นักเรียนกลุ่มทดลองสอนโดยใช้เทคนิคการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์ ส่วนนักเรียนกลุ่มควบคุมสอนตามปกติ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่ต่ำกว่าร้อยละ 60 และมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และนักเรียนกลุ่มทดลองมีเจตคติต่อวิชาชีววิทยาทางบวก

ประดับ แก้วแดง (2542 : บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัยเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาพยาบาลก่อนและหลังได้รับการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์และเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้ของนักศึกษาพยาบาลระหว่างกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์กับกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ กลุ่มตัวอย่างคือนักศึกษาชั้นปีที่ 1 หลักสูตรพยาบาลศาสตรบัณฑิต วิทยาลัยพยาบาลพระปกเกล้า จันทบุรี ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้ของนักศึกษาพยาบาลกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

อังคณา ไชยธรรมาตรี (2547 : บทคัดย่อ) ได้ทำการวิจัยเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องพาราโบล่าของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ระหว่างกลุ่มที่สอนแบบใช้กิจกรรมสร้างแผนภูมิโมโนทัศน์ แบบใช้แผนภูมิโมโนทัศน์นำเรื่องและแบบปกติ พบว่า 1) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบใช้กิจกรรมสร้างแผนภูมิโมโนทัศน์ แบบใช้แผนภูมิโมโนทัศน์นำเรื่องและแบบปกติมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ส่วนกลุ่มที่สอนแบบใช้แผนภูมิโมโนทัศน์นำเรื่องมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนแตกต่างจากกลุ่มที่สอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และ 2) ความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบใช้กิจกรรมสร้างแผนภูมิโมโนทัศน์ แบบใช้แผนภูมิโมโนทัศน์นำเรื่องและแบบปกติมีความคงทนในการเรียนรู้แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ส่วนกลุ่มที่สอนแบบใช้แผนภูมิโมโนทัศน์นำเรื่องและกลุ่มที่สอนแบบปกติมีความคงทนในการเรียนรู้ไม่แตกต่างกัน

2. งานวิจัยต่างประเทศ

งานวิจัยต่างประเทศที่เกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ได้มีการศึกษากันอย่างกว้างขวาง โดยศึกษาในด้านต่าง ๆ เช่น ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความคงทนในการเรียนรู้

โนแวก, โกวิน และโจฮานเซน (Novak, Gowin and Johansen. 1983) ได้วิจัยเรื่องการใช้กรอบมโนทัศน์และการใช้ไดอะแกรมวีในการเรียนวิชาวิทยาศาสตร์ของนักเรียนเกรด 7 และเกรด 8 การวิจัยพบว่า นักเรียนเกรด 7 และนักเรียนเกรด 8 สามารถใช้กรอบมโนทัศน์และไดอะแกรมวีในการเรียนวิทยาศาสตร์ได้ โดยที่นักเรียนเกรด 7 สามารถใช้ได้ดีกว่านักเรียนเกรด 8 แต่ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับลักษณะของเนื้อหาวิชาและระยะเวลาที่ทดลองด้วย

โบโดลัส (Bodolus. 1987 : 3387 – A) ได้ทำการวิจัยเรื่องการใช้กรอบมโนทัศน์เพื่อช่วยในการเรียนรู้ที่มีความหมายสำหรับนักเรียน ในวิชาวิทยาศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 9 แบ่งนักเรียนออกเป็น 3 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ 1 สอนโดยใช้กรอบมโนทัศน์ กลุ่มที่ 2 สอนตามปกติ กลุ่มที่ 3 เป็นกลุ่มควบคุม การวิจัยพบว่า กลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้กรอบมโนทัศน์ได้คะแนนจากการทดสอบหลังเรียนสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนตามปกติและพบว่าเพศชายมีความสามารถในการสร้างกรอบมโนทัศน์สูงกว่าเพศหญิง แต่เพศหญิงมีการปรับปรุงเจตคติด้านวิทยาศาสตร์มากกว่าเพศชาย

บูม (Boehm. 1996 : 2399 – A) ได้ทำการวิจัยเรื่องความเข้าใจในการเชื่อมโยงมโนทัศน์ของการสอนวิชาคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนเกรด 5 จำนวน 3 ห้องเรียน ใช้เนื้อหาเรื่องจำนวน ทศนิยม เศษส่วน เรขาคณิต ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการปฏิบัติการสร้างมโนทัศน์มีความเข้าใจการเชื่อมโยงมโนทัศน์ในเรื่องเศษส่วนและเรขาคณิตได้ดีกว่านักเรียนที่เรียนตามหนังสือ แต่ในเรื่องจำนวนและทศนิยมพบว่าไม่แตกต่างกัน สรุปได้ว่านักเรียนที่ได้รับการปฏิบัติการสร้างมโนทัศน์จะมีการเชื่อมโยงของบทเรียนได้ดีกว่านักเรียนที่เรียนตามหนังสือ

วิลเลียม (Williams. 1998 : 414 – 421) ได้ทำการวิจัยเรื่องการใช้แผนผังมโนทัศน์ในการประเมินผลการเรียนรู้เกี่ยวกับมโนทัศน์ในเรื่องฟังก์ชัน เพื่อศึกษาเปรียบเทียบแผนผังมโนทัศน์ที่สร้างโดยนักศึกษาและแผนผังมโนทัศน์ที่สร้างโดยผู้เชี่ยวชาญ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษามหาวิทยาลัยที่เรียนวิชาแคลคูลัสจำนวน 28 คน และอาจารย์วิชาคณิตศาสตร์จำนวน 8 คน วิเคราะห์ข้อมูลเชิงคุณภาพพบว่า แผนผังมโนทัศน์ที่สร้างโดยนักศึกษาและอาจารย์คณิตศาสตร์มีความแตกต่างกัน และพบว่าแผนผังมโนทัศน์เป็นเครื่องมือที่สามารถประเมินความเข้าใจมโนทัศน์ได้ดี

บอลท์ (Bolte. 1999 : 19 – 30) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาการใช้แผนผังมโนทัศน์และการเขียนอธิบายความในแผนผังมโนทัศน์ในการประเมินผลในวิชาคณิตศาสตร์โดยมีตัวอย่างประชากร คือ นักศึกษามหาวิทยาลัยในภูมิภาคตะวันตกเฉียงเหนือ ประเทศสหรัฐอเมริกา ผลการวิจัยพบว่า 1) การนำแผนผังมโนทัศน์และการเขียนอธิบายความในแผนผังมโนทัศน์มาใช้ในการประเมินผลให้ผลดี ทำให้เห็นการเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาและ 2) การใช้แผนผังมโนทัศน์และการเขียนอธิบายความในแผนผังมโนทัศน์ในการประเมินผลมีความสัมพันธ์กับคะแนนจากการทดสอบในชั้นเรียนและผลการเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

ไฮ – ฮุน (II – Hyun. 2001 : 62 – 04A) ได้ทำการวิจัยเพื่อศึกษาผลของการใช้แผนผังมโนทัศน์ประกอบการเรียนการสอนที่มีต่อความเข้าใจของนักศึกษาที่เรียนวิชาเทคโนโลยีการศึกษาชั้นนำของมหาวิทยาลัยฟลอริดาโดยนักศึกษาห้องหนึ่งเรียนโดยใช้แผนผังมโนทัศน์ประกอบการเรียนการสอนคือมีการให้นักศึกษาฝึกสร้างแผนผังมโนทัศน์ในเนื้อหาที่เรียน และอีกห้องหนึ่งเรียนโดยครูเป็นผู้เตรียมแผนผังมโนทัศน์ไว้ใช้ประกอบการเรียนการสอนในชั้นสรุปบทเรียน ผลการวิจัยพบว่า นักศึกษากลุ่มที่เรียนโดยการฝึกสร้างแผนผังมโนทัศน์มีความเข้าใจและจดจำเนื้อหาที่เรียนได้ดีกว่านักศึกษากลุ่มที่เรียนโดยครูใช้แผนผังมโนทัศน์ประกอบการเรียนการสอนในชั้นสรุปบทเรียน

จากงานวิจัยภายในประเทศและต่างประเทศที่กล่าวมาข้างต้นจะพบว่า การจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้ดีขึ้นและพบว่างานวิจัยที่เกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ใน วิชาคณิตศาสตร์ยังมีน้อย จึงทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะนำรูปแบบการจัดการเรียนรู้แบบ จัดกรอบมโนทัศน์มาใช้ในการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เนื่องจากเนื้อหาเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติเป็นเนื้อหาที่สำคัญสำหรับ การศึกษาในระดับที่สูงขึ้นและในปัจจุบันนักเรียนกำลังประสบปัญหาด้านการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติอยู่มาก ซึ่งผู้วิจัยคิดว่าการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์จะเป็น แนวทางในการพัฒนาการเรียนรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของผู้เรียนให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ผู้วิจัยได้กำหนดขั้นตอนการดำเนินการดังนี้ คือ ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย เครื่องมือและวิธีสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล แบบแผนการทดลอง วิธีดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล และวิธีการวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทุ่งสง อำเภอทุ่งสง จังหวัดนครศรีธรรมราช

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทุ่งสง อำเภอทุ่งสง จังหวัดนครศรีธรรมราช ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 ซึ่งได้มาจากการเลือกกลุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง โดยเลือกห้องที่เรียนแผนการเรียนวิทย์ – คณิต ที่มีคะแนนเฉลี่ยของคะแนนสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ปลายภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2548 มีค่าใกล้เคียงกัน จำนวน 2 ห้อง จำนวน 95 คน แล้วจับฉลากห้องเรียนทั้งสองห้องเข้ากลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม ดังนี้

กลุ่มทดลองจำนวน 1 ห้อง นักเรียน 47 คน ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์

กลุ่มควบคุมจำนวน 1 ห้อง นักเรียน 48 คน ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ

เครื่องมือและวิธีสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ แผนการจัดการเรียนรู้แบบปกติ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และแบบทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ซึ่งผู้วิจัยสร้างขึ้นโดยมีรายละเอียดดังนี้

1. แผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ ได้ดำเนินการดังนี้

1.1 ศึกษาหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ พุทธศักราช 2544 ช่วงชั้นที่ 4 และคู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ซึ่งจัดทำโดย สสวท. กระทรวงศึกษาธิการ

1.2 ศึกษาเนื้อหา จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมและกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ จากหนังสือเรียนและหนังสือคู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ และแบ่งเนื้อหาให้เหมาะสมกับเวลาที่จะดำเนินการสอน

1.3 ดำเนินการเขียนแผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ โดยจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเป็นรายคาบ

1.4 นำแผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์เสนอต่อคณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์และผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 คน เพื่อตรวจสอบความถูกต้องและทำการปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องตามคำแนะนำ

1.5 นำแผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ที่ปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องแล้วไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทุ่งสง อำเภอทุ่งสง จังหวัดนครศรีธรรมราช ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 45 คน

1.6 นำข้อบกพร่องของแผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์มาปรับปรุงแก้ไขก่อนนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างที่เป็นกลุ่มทดลอง

2. แผนการจัดการเรียนรู้แบบปกติ ได้ดำเนินการดังนี้

2.1 ศึกษาหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ พุทธศักราช 2544 ช่วงชั้นที่ 4 และคู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ซึ่งจัดทำโดย สสวท. กระทรวงศึกษาธิการ

2.2 ศึกษาเนื้อหา จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมและกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ จากหนังสือเรียนและหนังสือคู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ และแบ่งเนื้อหาให้เหมาะสมกับเวลาที่จะดำเนินการสอน

2.3 ดำเนินการเขียนแผนการจัดการเรียนรู้แบบปกติตามแนวคู่มือครูที่จัดทำขึ้นโดย สสวท. โดยจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเป็นรายคาบ

2.4 นำแผนการจัดการเรียนรู้แบบปกติเสนอต่อคณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์และผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 คน เพื่อตรวจสอบความถูกต้องและทำการปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องตามคำแนะนำ

2.5 นำข้อบกพร่องของแผนการจัดการเรียนรู้แบบปกติมาปรับปรุงแก้ไขก่อนนำไปใช้กับกลุ่มตัวอย่างที่เป็นกลุ่มควบคุม

3. แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ได้ดำเนินการดังนี้

3.1 ศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับการสร้างแบบทดสอบเพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ โดยศึกษาจากเอกสาร ตำรา งานวิจัยและปรึกษาผู้เชี่ยวชาญ

3.2 ศึกษาหลักสูตร เนื้อหา จุดประสงค์เชิงพฤติกรรมและกิจกรรมการเรียนการสอน เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 แล้วสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยสร้างให้ครอบคลุมเนื้อหาและตรงตามจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม ซึ่งแบบทดสอบเป็นแบบปรนัยชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 40 ข้อ ให้คะแนนข้อละ 1 คะแนน

3.3 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเสนอต่อคณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์และผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 คน เพื่อตรวจสอบความตรงตามเนื้อหาและให้ข้อเสนอแนะเพื่อนำไปปรับปรุงแก้ไข

3.4 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่ปรับปรุงไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนทุ่งสง ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 46 คน

3.5 นำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์หาคุณภาพของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเป็นรายข้อ โดยคัดเลือกข้อสอบที่มีค่าความยากง่ายตั้งแต่ .28 ถึง .78 และมีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ .21 ขึ้นไป จำนวน 20 ข้อ

3.6 นำแบบทดสอบที่คัดเลือกไว้ทั้งหมดมาหาค่าความเชื่อมั่นโดยวิธีของคูเดอร์-ริชาร์ดสัน (KR-20) ได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ .78

3.7 นำแบบทดสอบที่ได้ในข้อ 3.6 มาพิมพ์เป็นแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ฉบับสมบูรณ์จำนวน 20 ข้อ แล้วนำแบบทดสอบไปใช้ทดสอบหลังการทดลอง

4. แบบทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ได้ดำเนินการดังนี้

4.1 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ฉบับสมบูรณ์จำนวน 20 ข้อมาสลับข้อและสลับตัวเลือกในแต่ละข้อ แล้วนำมาพิมพ์เป็นแบบทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ฉบับสมบูรณ์

4.2 นำแบบทดสอบไปใช้ทดสอบหลังการทดลอง 2 สัปดาห์

แบบแผนการทดลอง

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยกึ่งทดลอง ประกอบด้วยกลุ่มทดลอง 1 กลุ่ม และกลุ่มควบคุม 1 กลุ่ม โดยแบบแผนการทดลองมีลักษณะดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 แบบแผนการทดลอง

กลุ่มตัวอย่าง	การทดลอง	การทดสอบหลังการทดลอง
ER	X	T
CR	$\sim X$	T

สัญลักษณ์ที่ใช้ในแบบแผนการทดลอง

- R แทน การกำหนดกลุ่มตัวอย่างแบบสุ่ม
- E แทน กลุ่มทดลอง
- C แทน กลุ่มควบคุม
- T แทน การทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
- X แทน การสอนคณิตศาสตร์โดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์
- $\sim X$ แทน การสอนคณิตศาสตร์โดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ

วิธีดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลด้วยตนเองที่โรงเรียนทุ่งสง อำเภอทุ่งสง จังหวัดนครศรีธรรมราช ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 โดยมีขั้นตอนดังนี้

1. ผู้วิจัยดำเนินการสอนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยใช้เวลาสอนกลุ่มละ 12 ชั่วโมง
2. หลังการทดลองผู้วิจัยได้ทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มตัวอย่างโดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น
3. หลังการทดลอง 2 สัปดาห์ผู้วิจัยได้ทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้ของกลุ่มตัวอย่างโดยใช้แบบทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

4. นำข้อมูลที่ได้มาวิเคราะห์โดยใช้วิธีการทางสถิติ เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้อาชีวศึกษา

วิธีการวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยทำการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดลองโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (SPSS/PC⁺) โดยมีการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

1. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอาชีวศึกษาเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์และกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ โดยใช้คะแนนสอบหลังการทดลองจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอาชีวศึกษาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยคำนวณค่าเฉลี่ย ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยด้วยการทดสอบด้วยที (t - test)

2. เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้อาชีวศึกษาเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์และกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ โดยใช้คะแนนสอบหลังการทดลองจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอาชีวศึกษาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นและคะแนนหลังการทดลอง 2 สัปดาห์จากแบบทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้อาชีวศึกษาที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยคำนวณค่าเฉลี่ย ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยด้วยการทดสอบด้วยที (t - test)

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ใช้สถิติในการคำนวณหาคุณภาพของแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอาชีวศึกษา ดังนี้

1. หาค่าความตรงตามเนื้อหา (content – validity) จากความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญที่มีต่อความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม คำนวณจากสูตรของโรวินELLI และแฮมเบลตัน (Rowinelli and Hambleton)

$$IOC = \frac{\sum R}{N}$$

เมื่อ IOC แทน ดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

$\sum R$ แทน ผลรวมของคะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ

N แทน จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

(ที่มา : ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2543 : 247 – 249)

2. หาค่าความยากง่าย (level of difficulty) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ คำนวณจากสูตร

$$P = \frac{R}{N}$$

เมื่อ P แทน ดัชนีความยากง่าย

R แทน จำนวนนักเรียนที่ทำข้อสอบถูก

N แทน จำนวนนักเรียนที่ทำข้อสอบทั้งหมด

(ที่มา : บุญธรรม กิจปรีดาบริสุทธิ์. 2537 : 156)

3. หาค่าอำนาจจำแนก (power of discrimination) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ คำนวณจากสูตร

$$B = \frac{U}{n_1} - \frac{L}{n_2}$$

เมื่อ B แทน ดัชนีค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบอิงเกณฑ์

U แทน จำนวนนักเรียนที่ทำข้อสอบถูกของกลุ่มที่สอบผ่านเกณฑ์

L แทน จำนวนนักเรียนที่ทำข้อสอบถูกของกลุ่มที่สอบไม่ผ่านเกณฑ์

n_1 แทน จำนวนนักเรียนที่สอบผ่านเกณฑ์

n_2 แทน จำนวนนักเรียนที่สอบไม่ผ่านเกณฑ์

(ที่มา : บุญธรรม กิจปรีดาบริสุทธิ์. 2537 : 156)

4. หาค่าความเชื่อมั่น (reliability) ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ คำนวณจากสูตร KR – 20 ของคูเดอร์ – ริชาร์ดสัน (Kuder Richardson)

$$r_{tt} = \frac{n}{n-1} \left[1 - \frac{\sum pq}{S_t^2} \right]$$

เมื่อ r_{tt} คือ ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

n คือ จำนวนข้อของแบบทดสอบ

p คือ สัดส่วนของผู้ที่ทำได้ในข้อหนึ่ง ๆ

q คือ สัดส่วนของผู้ที่ทำได้ในข้อหนึ่ง ๆ

S_t^2 คือ คะแนนความแปรปรวนของคะแนนทั้งหมด

(ที่มา : ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. 2541 : 226)

บทที่ 4

ผลการวิจัย

ผู้วิจัยได้นำเสนอผลการวิจัยตามลำดับดังนี้ สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล
ลำดับชั้นในการวิเคราะห์ข้อมูลและผลการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

สัญลักษณ์ที่ผู้วิจัยได้ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลมีดังนี้

n แทน จำนวนนักเรียน

\bar{X} แทน คะแนนเฉลี่ย

S.D. แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

df แทน ระดับความเป็นอิสระ

t แทน ค่าสถิติจากการทดสอบด้วยที

ER แทน นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบ
จัดกรอบมโนทัศน์

CR แทน นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ

ลำดับชั้นในการวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยได้ดำเนินการวิเคราะห์ข้อมูลตามลำดับดังนี้

1. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของ
นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์และกลุ่มที่ได้รับการ
การสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ โดยใช้คะแนนสอบหลังการทดลองจากแบบทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยคำนวณค่าเฉลี่ย ค่าส่วน
เบี่ยงเบนมาตรฐานและทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยด้วยการทดสอบด้วยที (t - test)

2. เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของ
นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์และกลุ่มที่ได้รับการ
การสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ โดยใช้คะแนนสอบหลังการทดลองจากแบบทดสอบ

วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นและคะแนนหลังการทดลอง 2 สัปดาห์จากแบบทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยคำนวณค่าเฉลี่ย ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยด้วยการทดสอบด้วยที่ (t - test)

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

1. ผลการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วน – ตรีโกณมิติของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์และนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ

ตารางที่ 2 ค่าเฉลี่ย (\bar{X}) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) ของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระยะก่อนการทดลองและหลังการทดลองของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์กับนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	ER (n = 47)		CR (n = 48)		df	t
	\bar{X}	S.D.	\bar{X}	S.D.		
ก่อนการทดลอง	12.27	2.20	12.22	2.05	93	.108
หลังการทดลอง	12.94	2.36	11.94	2.09	93	2.18*

*มีนัยสำคัญทางสถิติ .05

จากตารางที่ 2 แสดงว่า ก่อนการทดลองค่าเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์กับนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติไม่แตกต่างกัน และหลังการทดลองค่าเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

จากผลการทดลอง แสดงให้เห็นว่า นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อที่ 1

2. ผลการเปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วน –
ตรีโกณมิติของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์และนักเรียน
ที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ

ตารางที่ 3 ค่าเฉลี่ย (\bar{X}) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) ของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระยะเวลาหลังการทดลองและหลังการทดลอง 2 สัปดาห์
ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์และนักเรียน
ที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	ER (n = 47)		CR (n = 48)		df	t
	\bar{X}	S.D.	\bar{X}	S.D.		
หลังการทดลอง	12.94	2.36	11.94	2.09	93	2.18*
หลังการทดลอง 2 สัปดาห์	14.43	2.40	10.35	2.08	93	8.84**
df	46		47			
t	3.41**		4.80**			

*มีนัยสำคัญทางสถิติ .05

**มีนัยสำคัญทางสถิติ .01

จากตารางที่ 3 แสดงว่า หลังการทดลอง 2 สัปดาห์ค่าเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทาง
การเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์สูงกว่านักเรียนที่
ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และ
หลังการทดลองกับหลังการทดลอง 2 สัปดาห์ค่าเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่
ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์และนักเรียนที่ได้รับการสอนโดย
การจัดการเรียนรู้แบบปกติแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

จากผลการทดลอง แสดงให้เห็นว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบ
จัดกรอบมโนทัศน์มีความคงทนในการเรียนรู้สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้
แบบปกติ ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานข้อที่ 2

บทที่ 5

บทย่อ สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยเรื่อง “การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์กับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ ผู้วิจัยได้ดำเนินการวิจัยโดยมีขั้นตอนดังนี้

บทย่อ

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์กับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ
2. เพื่อเปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์กับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ

วิธีดำเนินการวิจัย

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย
ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทุ่งสง อำเภอทุ่งสง จังหวัดนครศรีธรรมราช
กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนทุ่งสง อำเภอทุ่งสง จังหวัดนครศรีธรรมราช ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 ซึ่งได้มาจากการเลือกกลุ่มตัวอย่างแบบเจาะจง จำนวน 2 ห้อง จำนวน 95 คน แบ่งเป็น นักเรียนกลุ่มทดลอง จำนวน 1 ห้อง จำนวน 47 คน ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ และนักเรียนกลุ่มควบคุมจำนวน 1 ห้อง จำนวน 48 คน ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ

2. เครื่องมือและวิธีสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้สร้างขึ้นด้วยตนเอง ประกอบด้วย

2.1 แผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์และแผนการจัดการเรียนรู้แบบปกติ

2.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วน – ตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เป็นข้อสอบแบบปรนัย 4 ตัวเลือก จำนวน 20 ข้อ มีค่าความยากง่ายตั้งแต่ .28 ถึง .78 มีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ .21 ขึ้นไป และมีค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ .78

2.3 แบบทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วน – ตรีโกณมิติ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งนำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ฉบับสมบูรณ์จำนวน 20 ข้อมาสลับข้อและสลับตัวเลือกในแต่ละข้อ

3. วิธีดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยดำเนินการวิจัยและการเก็บรวบรวมข้อมูลด้วยตนเองที่โรงเรียนทุ่งสง อำเภอทุ่งสง จังหวัดนครศรีธรรมราช ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 ผู้วิจัยดำเนินการสอนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมโดยใช้เวลาสอนกลุ่มละ 12 ชั่วโมง หลังการทดลองผู้วิจัยได้ทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มตัวอย่าง และหลังการทดลอง 2 สัปดาห์ผู้วิจัยได้ทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้ของกลุ่มตัวอย่าง แล้วนำข้อมูลที่ได้มาวิเคราะห์โดยใช้วิธีการทางสถิติเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์

4. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ใช้สถิติในการคำนวณหาคุณภาพของแบบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วย การหาค่าความตรงตามเนื้อหา ค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนกและค่าความเชื่อมั่น

วิธีการวิเคราะห์ข้อมูล

ผู้วิจัยทำการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดลองโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป SPSS โดยมีการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

1. เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของ

นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์และนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ โดยใช้คะแนนสอบหลังการทดลองจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยคำนวณค่าเฉลี่ย ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยด้วยการทดสอบด้วยที (t – test)

2. เปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์และนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ โดยใช้คะแนนสอบหลังการทดลองจากแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น และคะแนนสอบหลังการทดลอง 2 สัปดาห์จากแบบทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยคำนวณค่าเฉลี่ย ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยด้วยการทดสอบด้วยที (t – test)

สรุปผลการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้สามารถสรุปผลการวิจัยตามลำดับดังนี้

1. นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์มีความคงทนในการเรียนรู้สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

อภิปรายผล

การวิจัยครั้งนี้สามารถอภิปรายผลตามลำดับดังนี้

1. จากการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานที่ตั้งไว้ แสดงว่าการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงขึ้นกว่าเดิม อาจจะเป็นเพราะการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์เป็นการจัดกระบวนการจัดการเรียนรู้โดยให้นักเรียนนำมโนทัศน์ในเนื้อหาสาระที่ได้เรียนรู้มาจัดระบบ จัดลำดับและเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างมโนทัศน์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกันเข้าด้วยกันแล้วให้ผู้เรียนสร้าง

กรอบมโนทัศน์เกี่ยวกับเนื้อหาที่เรียนด้วยตัวเอง จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาที่เรียนได้ดียิ่งขึ้น จึงทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น ในขณะที่เดียวกันการจัดการเรียนรู้แบบปกติซึ่งส่วนใหญ่จะเป็นการสอนแบบบรรยายซึ่งอาจจะทำให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาได้ไม่ลึกซึ้ง จึงทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ ซึ่งผลการวิจัยที่ได้สอดคล้องกับงานวิจัยของวิภา เกียรติธนะบำรุง (2537 : บทคัดย่อ) ที่ได้ทำการศึกษาผลของการใช้เทคนิคการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาชีววิทยา นักเรียนกลุ่มทดลองสอนโดยใช้เทคนิคการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์ ส่วนนักเรียนกลุ่มควบคุมสอนตามปกติ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่ต่ำกว่าร้อยละ 60 และมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และผลการวิจัยในครั้งนี้ยังสอดคล้องกับผลการวิจัยของโบโดลัส (Bodolus. 1987 : 3387 – A) ที่ทำการศึกษารายการใช้กรอบมโนทัศน์เพื่อช่วยในการเรียนรู้ที่มีความหมายสำหรับนักเรียน ในวิชาวิทยาศาสตร์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 9 แบ่งนักเรียนออกเป็น 3 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ 1 สอนโดยใช้กรอบมโนทัศน์ กลุ่มที่ 2 สอนตามปกติ กลุ่มที่ 3 เป็นกลุ่มควบคุม การวิจัยพบว่า กลุ่มที่ได้รับการสอนโดยใช้กรอบมโนทัศน์ได้คะแนนจากการทดสอบหลังเรียนสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนตามปกติและพบว่าเพศชายมีความสามารถในการสร้างกรอบมโนทัศน์สูงกว่าเพศหญิงแต่เพศหญิงมีการปรับปรุงเจตคติด้านวิทยาศาสตร์มากกว่าเพศชาย

ดังนั้นการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์จึงเป็นอีกวิธีการหนึ่งที่จะทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้นกว่าเดิม และกรอบมโนทัศน์ยังเป็นเครื่องมือที่นักเรียนสามารถนำมาใช้ในการเรียนรู้ด้วยตนเองได้

2. จากการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์มีความคงทนในการเรียนรู้สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานที่ตั้งไว้ แสดงว่าการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ทำให้นักเรียนมีความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ได้ดีขึ้น อาจจะเป็นเพราะการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์เป็นการจัดกระบวนการจัดการเรียนรู้โดยให้นักเรียนสร้างกรอบมโนทัศน์เกี่ยวกับเนื้อหาที่เรียนด้วยตัวเอง ซึ่งกรอบมโนทัศน์จะช่วยให้นักเรียนสามารถเรียนรู้มโนทัศน์อย่างมีความหมายและเก็บความรู้ที่นั้นไว้ในหน่วยของความจำระยะยาว ทำให้การเรียนรู้ที่มีความคงทนต่อไป (กรมวิชาการ. 2542 : 62) ส่วนการจัดการเรียนรู้แบบปกตินั้นส่วนใหญ่จะเป็นการสอนแบบบรรยายไม่มีกิจกรรมที่ให้นักเรียนได้ฝึกคิดและเชื่อมโยง

ความรู้ต่าง ๆ กับเนื้อหาที่เรียนด้วยตนเอง อาจทำให้นักเรียนเข้าใจเนื้อหาได้ไม่ดีพอ ไม่สามารถเก็บความรู้ไว้ในความทรงจำระยะยาวได้ จึงทำให้มีความคงทนในการเรียนรู้ต่ำกว่านักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ ซึ่งผลการวิจัยที่ได้สอดคล้องกับงานวิจัยของสุนีย์ สอนตระกูล (2535 : บทคัดย่อ) ที่ได้ทำการวิจัยเพื่อพัฒนาระบบการเรียนการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์สำหรับวิชาชีววิทยาระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยนำระบบการเรียนการสอนดังกล่าวไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4, 5 และ 6 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนโดยใช้ระบบการเรียนการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์มีความคงทนในการเรียนรู้วิชาชีววิทยาสูงกว่านักเรียนที่เรียนโดยวิธีปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ทุกระดับชั้น และยังสอดคล้องกับผลการวิจัยของประดับ แก้วแดง (2542 : บทคัดย่อ) ที่ได้ทำการศึกษาเปรียบเทียบความคงทนในการเรียนรู้ของนักศึกษาพยาบาลระหว่างกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์กับกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติ ผลการวิจัยพบว่า ความคงทนในการเรียนรู้ของนักศึกษาพยาบาลกลุ่มที่ได้รับการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการสอนแบบปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และผลการวิจัยในครั้งนี้อย่างสอดคล้องกับงานวิจัยของไอ – ฮุน (II – Hyun. 2001 : 62 – 04A) ที่ได้ทำการศึกษาผลของการใช้แผนผังมโนทัศน์ประกอบการเรียนที่มีต่อความเข้าใจของนักศึกษาที่เรียนวิชาเทคโนโลยีการศึกษาชั้นนำของมหาวิทยาลัยฟลอริดา โดยนักศึกษาห้องหนึ่งเรียนโดยให้นักศึกษาฝึกสร้างแผนผังมโนทัศน์ในเนื้อหาที่เรียน และอีกห้องหนึ่งเรียนโดยครูเป็นผู้เตรียมแผนผังมโนทัศน์ไว้ใช้ประกอบการเรียนการสอนในชั้นสรุปบทเรียน ผลการวิจัยพบว่า นักศึกษากลุ่มที่เรียนโดยการฝึกสร้างแผนผังมโนทัศน์มีความเข้าใจและจดจำเนื้อหาที่เรียนได้ดีกว่านักศึกษากลุ่มที่เรียนโดยครูใช้แผนผังมโนทัศน์ประกอบการเรียนการสอนในชั้นสรุปบทเรียน

จากผลการทดลองจะเห็นว่า ค่าเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังการทดลอง 2 สัปดาห์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์สูงกว่าหลังการทดลอง ซึ่งผลการวิจัยนี้ไม่เป็นไปตามลักษณะของความคงทนในการเรียนรู้ โดยทั่วไปผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังการทดลอง 2 สัปดาห์น่าจะต่ำกว่าหลังการทดลอง แต่ผลการวิจัยนี้ผลสัมฤทธิ์หลังการทดลอง 2 สัปดาห์มีค่าเฉลี่ยสูงกว่าหลังการทดลอง ซึ่งอาจจะมีสาเหตุเนื่องมาจาก 1) ค่าเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังการทดลองมีค่าค่อนข้างต่ำซึ่งอาจจะเป็นเพราะนักเรียนมีเวลาในการทบทวนเนื้อหาเพื่อเตรียมพร้อมในการสอบน้อย เนื่องจากอีก 2 สัปดาห์จะมีการสอบปลายภาค จึงทำให้มีการทบทวนย่อยในหลาย ๆ วิชา ต้องเรียนเพิ่มเติมบางวิชาในคาบที่ว่างและต้องส่งรายงานก่อนสอบปลายภาคหลายฉบับ และ 2) ค่าเฉลี่ยของ

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังการทดลอง 2 สัปดาห์มีค่าค่อนข้างสูง ซึ่งอาจเป็นเพราะนักเรียนมีเวลาในการเตรียมตัวทบทวนเนื้อหาและสัปดาห์นี้จะมีการสอบปลายภาค และเนื่องจากนักเรียนได้ผ่านการทดสอบมาแล้วครั้งหนึ่งซึ่งคะแนนที่ได้จากการสอบจะเป็นการให้ข้อมูลย้อนกลับแก่นักเรียนว่าสิ่งใดที่เขาเรียนรู้แล้วหรือยังไม่ได้เรียนรู้ จึงทำให้นักเรียนมีความอยากรู้อยากเห็นและคิดอยากหาคำตอบที่ถูกต้องด้วยตนเองให้ได้ ซึ่งวิธีการนั้นอาจจะเป็นการลองผิดลองถูก การที่นักเรียนได้ค้นพบด้วยตัวเขาเองแล้วนักเรียนจะเข้าใจและจดจำเนื้อหาได้นานยิ่งขึ้นซึ่งจะทำให้เมื่อนักเรียนได้รับประสบการณ์เดิมอีกครั้งหนึ่งนักเรียนจะเกิดการรับรู้และคิดหาคำตอบได้ถูกต้อง (ยุพิน พิพิธกุล. 2545 : 4) ดังนั้นอาจเป็นเพราะสาเหตุ 2 ประการนี้จึงทำให้ค่าเฉลี่ยของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังการทดลอง 2 สัปดาห์ของนักเรียนที่ได้รับการสอนโดยการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์สูงกว่าหลังการทดลอง

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่า การจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ที่เน้นให้นักเรียนสร้างกรอบมโนทัศน์เพื่อช่วยในการเรียนรู้ด้วยตนเอง ทำให้นักเรียนสามารถจดจำความรู้ นั้นไปได้ยาวนานและจะเป็นการเรียนรู้ที่คงทนต่อไป

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะทั่วไป

1. การจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์เป็นการจัดการเรียนรู้ที่ช่วยให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้ให้ดีขึ้นกว่าเดิม ดังนั้นครูและผู้ที่เกี่ยวข้องในการจัดการศึกษาควรนำการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ไปใช้ในการปรับปรุงและพัฒนาการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อพัฒนาความสามารถของนักเรียนด้านทักษะกระบวนการคิด ซึ่งจะทำให้นักเรียนสามารถนำความรู้ไปใช้เป็นพื้นฐานในการศึกษาระดับที่สูงขึ้นและใช้ในชีวิตรประจำวันได้

2. ในการนำการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ไปใช้ ครูควรมีความสามารถในการสร้างกรอบมโนทัศน์และก่อนที่จะสอนครูควรอธิบายหลักการสร้างกรอบมโนทัศน์แบบต่าง ๆ และสร้างให้ดูเป็นตัวอย่างเพื่อให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจก่อน หลังจากนั้นจึงให้นักเรียนสร้างกรอบมโนทัศน์จากเนื้อหาที่เรียนด้วยตนเอง

3. ในการนำการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ไปใช้ ครูควรแบ่งเวลาให้เหมาะสมกับเนื้อหาและระดับความสามารถในการสร้างกรอบมโนทัศน์ของนักเรียนแต่ละคน เพื่อให้นักเรียนจะได้มีเวลาในการนำเสนอพร้อมอภิปรายกันได้มากขึ้น และควรเปิดโอกาสให้นักเรียนทุกคนมี

ส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็นเพื่อหาข้อสรุปของเนื้อหาที่เรียนร่วมกัน

4. ครูควรให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการประเมินผลว่าการนำการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์มาใช้ในกระบวนการเรียนการสอนนั้นดีหรือไม่ มีข้อดีข้อเสียอย่างไรบ้าง และควรปรับปรุงแก้ไขอย่างไร เพื่อให้นักเรียนได้รับประโยชน์จากการจัดกระบวนการเรียนการสอนมากที่สุด

5. ครูควรฝึกฝนให้นักเรียนนำการจัดกรอบมโนทัศน์ไปศึกษาหาความรู้ในวิชาต่าง ๆ ด้วยตนเอง เพื่อให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ที่มีความหมายและทำให้เกิดความคงทนในการเรียนรู้ได้นานยิ่งขึ้น

ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรมีการศึกษาเปรียบเทียบผลของการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่มีระดับความสามารถทางสติปัญญาแตกต่างกัน

2. ควรมีการศึกษาผลของการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ที่มีต่อสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ในเนื้อหาอื่น ๆ ระดับชั้นอื่น ๆ

3. ควรมีการศึกษาผลของการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ที่มีต่อนักเรียนทางด้านอื่น ๆ ที่นอกเหนือจากการศึกษาทางด้านผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้ เช่น ความสามารถในการสร้างกรอบมโนทัศน์ แรงจูงใจ และเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์

4. ควรมีการศึกษาเปรียบเทียบผลของการนำการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์กับการจัดการเรียนรู้แบบอื่น ๆ ที่ไม่ใช่การจัดการเรียนรู้แบบปกติไปใช้ในการจัดกระบวนการเรียนการสอน เพื่อวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้ของนักเรียนว่าแตกต่างกันหรือไม่

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กาญจนภรณ์ เขื่อนภาค. (2535). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาวิทยาศาสตร์เรื่องบรรยากาศโดยใช้แผนภูมิโนมิตีของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนเขาทวาย จังหวัดพิจิตร. วิทยานิพนธ์ปริญญา มหาบัณฑิต กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- กฤษี คำชาย. (2540). จิตวิทยาการเรียนการสอน. กรุงเทพฯ : เทคนิคพรีนติ้ง.
- จาวรอน ยังรักษา. (2542). การศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่ได้รับการสอนแบบค้นพบโดยใช้กิจกรรมการเรียนการสอนแบบคอนสตรัคติวิซิมเป็นกลุ่มกับเป็นรายบุคคลและการสอนตามคู่มือครู. วิทยานิพนธ์มหาบัณฑิต กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- ณชชา กมล. (2542). ผลของการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟฟีกที่มีต่อมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตสังกัดทบวงมหาวิทยาลัย. วิทยานิพนธ์ปริญญา มหาบัณฑิต กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- นิภา บุญธรรม. (2538). ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิทยาศาสตร์เรื่องพลังงานกับชีวิตและความสามารถในการสร้างมโนมิตีของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนโดยใช้แผนภูมิโนมิตี. วิทยานิพนธ์ปริญญา มหาบัณฑิต กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัย – เกษตรศาสตร์.
- บุญธรรม กิจปรีดาบริสุทธิ์. (2537). เทคนิคการสร้างเครื่องมือรวบรวมข้อมูลสำหรับการวิจัย. กรุงเทพฯ : พลับลิชชิง.
- ประดับ แก้วแดง. (2542). ผลของการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์ที่มีต่อความคงทนในการเรียนรู้และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักศึกษาพยาบาล. วิทยานิพนธ์ปริญญา มหาบัณฑิต กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พุทธศักราช 2542. (2542, 19 สิงหาคม). ราชกิจจานุเบกษา ฉบับกฤษฎีกา. เล่ม 116 ตอนที่ 74 ก.
- พวงรัตน์ ทวีรัตน์. (2540). วิธีการวิจัยทางพฤติกรรมศาสตร์และสังคมศาสตร์. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.

- เพลินพิศ ภิรมย์ไกรภักดิ์. (2542). การศึกษาความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของเด็กปฐมวัยที่ได้รับการจัดกิจกรรมคณิตศาสตร์ตามแนวคอนสตรัคติวิสต์. ปรินญาณิพนธ์ มหาวิทยาลัย มหาบัณฑิต กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร.
- มนัส บุญประกอบ. (2533 ก). “แผนภูมิโน้ตส์กับแผนภูมิอื่น,” วารสาร สสวท. 70, 22 – 25.
- _____. (2533 ข). “แผนภูมิโน้ตส์ : การนำไปใช้ในชั้นเรียน,” วารสาร สสวท. 71, 15 – 25.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2545). การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ยุคปฏิรูปการศึกษา. กรุงเทพฯ : บริษัทกริมพ์.
- _____. (2545). “แนวโน้มการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียน,” วิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีเพื่อพัฒนาภูมิปัญญาไทย (วทว.12). 69 – 71.
- ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ. (2538). เทคนิคการวิจัยทางการศึกษา. กรุงเทพฯ : สุวีริยาสาส์น.
- _____. (2541). เทคนิคการสร้างและสอบ ข้อสอบความถนัดทางการเรียน. กรุงเทพฯ : สุวีริยาสาส์น.
- _____. (2543). เทคนิคการวัดผลการเรียนรู้. กรุงเทพฯ : สุวีริยาสาส์น.
- วรรณิ ลิ้มอักษร. (2540). จิตวิทยาการศึกษา. สงขลา : มหาวิทยาลัยทักษิณ.
- วิชากร, กรม. (2542). การสังเคราะห์รูปแบบการพัฒนาศักยภาพของเด็กไทยด้านทักษะการจัดการ. กรุงเทพฯ : การศาสนา.
- _____. (2546). การจัดสาระการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 – 6 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. กรุงเทพฯ : องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์ (ร.ส.พ.).
- วิภา เกียรติธนะบำรุง. (2537). ผลของการใช้เทคนิคการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาชีววิทยาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ศุภลักษณ์ ทองสนธิ. (2536). ผลของการใช้เทคนิคการสอนแบบจัดกรอบมโนทัศน์ที่มีต่อการเปลี่ยนมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนของนักเรียนในวิชาเคมี. วิทยานิพนธ์ปริญญาโทมหาบัณฑิต กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

- ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. (2545). คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์. กรุงเทพฯ : คุรุสภาลาดพร้าว.
- _____. (2546). คู่มือครูสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. กรุงเทพฯ : คุรุสภาลาดพร้าว.
- _____. (2547). หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐานคณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. กรุงเทพฯ : คุรุสภาลาดพร้าว.
- “สพฐ. ยังไม่เครียดผลประเมินนักเรียนต่ำกว่า 50 % ทุกวิชา.” (2548, 1 กรกฎาคม). เดลินิวส์. หน้า 27.
- สาคร บุญดาว, อุชาวดี จันทร์สนธิ และมณีนีรัตน์ สุวรรณพรหมา. (2545). รายงานการวิจัยเรื่องการวินิจฉัยความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษมหาวิทาลัยสุโขทัย ธรรมชาติราช. นนทบุรี : มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมชาติราช.
- สุชา จันทร์เอม. (2541). จิตวิทยาทั่วไป. กรุงเทพฯ : ไทยวัฒนาพานิช.
- สุนีย์ สอนตระกูล. (2535). การพัฒนากระบวนการเรียนการสอนแบบจัดรอบมโนทัศน์สำหรับวิชาชีววิทยาระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย. วิทยานิพนธ์ปริญญาคุษฎีบัณฑิต กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สุวิทย์ มูลคำ. (2547). กลยุทธ์การสอนคิดเชิงมโนทัศน์. กรุงเทพฯ : ห้างหุ้นส่วนจำกัดภาพพิมพ์.
- โสภภาพรรณ ศิริรัตน์. (2527). การเปรียบเทียบความเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ที่มีความคิดต่างกัน. วิทยานิพนธ์ปริญญาามหาบัณฑิต กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- อังคณา โฆษิตาตรี. (2547). การศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องพาราโบลาของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยการสอนแบบใช้แผนภูมิมโนทัศน์. วิทยานิพนธ์ปริญญาามหาบัณฑิต สงขลา : มหาวิทยาลัยทักษิณ.
- อัมพร ม้าคอง. (2546). คณิตศาสตร์ : การสอนและการเรียนรู้. กรุงเทพฯ : ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการ คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- Ausubel, D. P. (1968). Education Psychology : A Cognitive View. New York : Holt, Rinehart and Winston.

- Ausubel, D. P. and Robinson, F. G. (1969). School Learning : An Introduction to Education Psychology. New York : Holt, Rinehart and Winston.
- Baroody, Arthur J. and Bartels, Bobby H. (2000). "Using Concept Maps to Link Mathematical Ideas," Mathematics Teacher in the Middle School. 5(9), 604 – 609.
- Bodolus, James Edward. (1987, March). "The Use of Concept Mapping Strategy to Facilitate Meaning for Ninth Grade Students in Science," Dissertation Abstract International. 47 : 3387 – A.
- Boehm, Elizabeth Jane. (1996). "Linking Conceptual Understanding in Teaching with Learning 5th Grade Mathematics," Dissertation Abstracts International. 57(6) : 2399 – A.
- Bolte, Linda A. (1999). "Using Concept Maps and Interpretive Essays for Assessment in Mathematics," School Science and Mathematics. 99, 19 – 30.
- Cooney, Thomas J., Davis, Edward J. and Henderson, K. B. (1975). Dynamics of Teaching Mathematics. Boston : Houghton Mifflin Company.
- Donovan, Johnson A. and Gerald, Rising R. (1972). Guidelines for Teaching Mathematics. California : Wadsworth Publishing.
- Il – Hyun, Jo. (2001). "Relativity : The Effects of Concept Mapping on College Student's Comprehension of Expository Text," Dissertation Abstracts International (Online). from <http://www.thailisdb.car.ac.th/dao/detail.nsp>.
- Novak, Joseph D. (1991). "Clarify with Concept Maps," The Science Teacher. 1 : 45 – 49.
- Novak, Joseph D. and Gowin, Bob D. (1984). Learning How to Learn. New York : Cambridge University Press.
- Novak, Joseph D. Gowin, Bob D and Johansen, G. T. (1983, October) "The Use of Concept Mapping and Knowledge Vee Mapping with Junior High School Science Student," Science Education. 67(5) : 625 – 645.

- Toumasis, C. (1995, February). "Concept Worksheet : An Important Tool for Learning," The Mathematics Teacher. 2 : 98 – 100.
- Williams, Carol G. (1998, April) "Using Concept Maps to Assess Conceptual Knowledge of Function," Journal for Research in Mathematics Education. 29 : 414 – 421.
- Wilson, James W. (1971). "Evaluation of Learning in Secondary School Mathematics," in Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning. Benjamin S. Bloom editor. New York : McGraw – Hill Book Co.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ

1. อาจารย์ ดร.กรวิภา ก้องกุล อาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ
อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา
2. อาจารย์เพ็ญศรี วงศ์แก้ว อาจารย์ 2 ระดับ 7
โรงเรียนทุ่งสง
อำเภอทุ่งสง จังหวัดนครศรีธรรมราช
3. อาจารย์จินดา วิพลชัย อาจารย์ 2 ระดับ 7
โรงเรียนสตรีทุ่งสง
อำเภอทุ่งสง จังหวัดนครศรีธรรมราช

ภาคผนวก ข
แผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์

แผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ (1)

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ชื่อหน่วยการเรียนรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ชื่อหน่วยย่อยการเรียนรู้ ชื่อของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จำนวน 1 ชั่วโมง

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ : นักเรียนสามารถ

1. บอกชื่อของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดได้
2. สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามที่โจทย์กำหนดให้ได้
3. หาความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้โดยใช้

ทฤษฎีบทของพีทาโกรัสได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ : นักเรียนมีความสามารถ

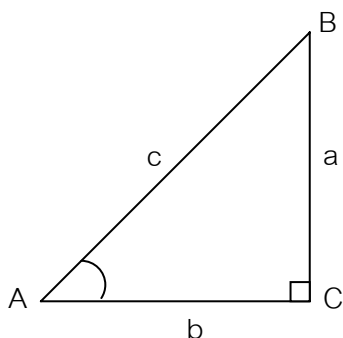
4. ในการสร้างความคิดรวบยอด
5. ในการคิดคำนวณ
6. สื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอ
7. เชื่อมโยงความรู้ที่เรียนกับเนื้อหาที่เกี่ยวข้องได้

ด้านคุณลักษณะ : ปลูกฝังให้นักเรียน

8. เป็นคนช่างสังเกต
9. มีความรับผิดชอบ
10. มีความเชื่อมั่นในตนเอง
11. กล้าแสดงออก
12. มีจินตนาการในการวาดและมองภาพ
13. มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

สาระการเรียนรู้

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก



จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC เมื่อพิจารณามุม A ซึ่งเป็นมุมแหลม จะได้ว่า

\overline{AB} เป็นด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมฉาก ยาว c หน่วย

\overline{BC} เป็นด้านที่อยู่ตรงข้ามมุม A ยาว a หน่วย

\overline{AC} เป็นด้านประชิดมุม A ยาว b หน่วย

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

ขั้นที่ 1 ขั้นตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียน

1. ครูทำการตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียนเรื่องรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและ

ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส โดยให้นักเรียนทำใบกิจกรรม 1 – A

ขั้นที่ 2 ขั้นระดมมโนทัศน์พื้นฐานที่นักเรียนขาด

2. เมื่อนักเรียนทำใบกิจกรรม 1 – A เสร็จแล้วครูเฉลยใบกิจกรรม โดยให้นักเรียนจับคู่แล้วเปลี่ยนกันตรวจ เมื่อเฉลยเสร็จแล้วครูระดมมโนทัศน์พื้นฐานที่นักเรียนยังขาดออกมาเป็นข้อ ๆ

ขั้นที่ 3 ขั้นเสริมมโนทัศน์พื้นฐานให้นักเรียน

3. ถ้านักเรียนยังตอบคำถามในใบกิจกรรม 1 – A ไม่ได้ ครูจะต้องทบทวนให้นักเรียนฟังอีกครั้งหนึ่งโดยให้นักเรียนดูกรอบมโนทัศน์ที่ 1 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากและกรอบมโนทัศน์ที่ 2 ทฤษฎีบทของพีทาโกรัสที่ครูเตรียมมา แล้วครูอธิบายเพิ่มเติม

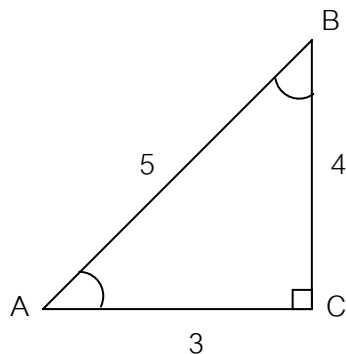
ขั้นสอน

ขั้นที่ 4 ขั้นเรียนรู้

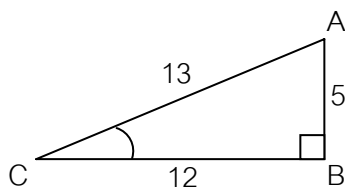
ครูสอนให้นักเรียนเข้าใจมโนทัศน์ที่เกี่ยวข้องกับชื่อของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยมี

ขั้นตอนดังนี้

4. ศึกษารูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉากลงบนกระดานดำดังนี้



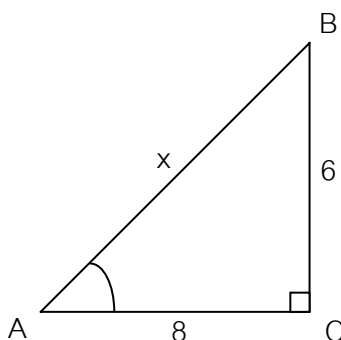
5. ครูให้นักเรียนพิจารณารูปบนกระดานดำแล้วถามนักเรียนว่า
- 5.1 รูปสามเหลี่ยมมุมฉากประกอบด้วยด้านทั้งหมดกี่ด้าน
 - 5.2 \overline{AB} ยาวกี่หน่วย
 - 5.3 \overline{BC} ยาวกี่หน่วย
 - 5.4 \overline{AC} ยาวกี่หน่วย
6. ครูให้นักเรียนพิจารณามุม A มุม B และมุม C แล้วถามนักเรียนว่า
- 6.1 มุม A เป็นมุมชนิดใด
 - 6.2 มุม B เป็นมุมชนิดใด
 - 6.3 มุม C เป็นมุมชนิดใด
7. ครูอธิบายว่า จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC เมื่อพิจารณามุม A ซึ่งเป็นมุมแหลม จะได้ว่า
- 7.1 \overline{AB} เป็นด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมฉาก ยาว 5 หน่วย
 - 7.2 \overline{BC} เป็นด้านที่อยู่ตรงข้ามมุม A ยาว 4 หน่วย
 - 7.3 \overline{AC} เป็นด้านประชิดมุม A ยาว 3 หน่วย
8. ครูแจกใบกิจกรรม 1-B แล้วให้นักเรียนตอบคำถามในข้อ 1 เมื่อทำเสร็จแล้วครูสุ่มให้นักเรียนตอบ
9. ครูยกตัวอย่างการสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามที่โจทย์กำหนดให้ ดังนี้
- ตัวอย่างที่ 1 จงสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม B เป็นมุมฉาก และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 13 หน่วย ด้านประชิดมุม C ยาว 12 หน่วย และด้านตรงข้ามมุม C ยาว 5 หน่วย

วิธีทำ

10. ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรม 1 – B ข้อ 2 เมื่อทำเสร็จแล้วครูสุ่มให้นักเรียนออกมาสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามที่โจทย์กำหนดให้บนกระดานดำ

11. ครูยกตัวอย่างการหาความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้โดยใช้ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2 จงสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก ด้านประชิดมุม A ยาว 8 หน่วย และด้านตรงข้ามมุม A ยาว 6 หน่วย พร้อมทั้งหาความยาวของด้านที่เหลือ

วิธีทำ

จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ให้ x เป็นความยาวของด้านที่เหลือ

จากทฤษฎีบทของพีทาโกรัสจะได้ว่า

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$x^2 = 8^2 + 6^2$$

$$x^2 = 64 + 36$$

$$x^2 = 100$$

$$x = 10$$

ดังนั้น ด้านที่เหลือยาว 10 หน่วย

12. ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรม 1 – B ข้อ 3 เมื่อทำเสร็จแล้วครูสุ่มให้นักเรียนออกมาแสดงวิธีทำบนกระดานดำ

ขั้นสรุป

ขั้นที่ 5 ขั้นสรุปด้วยกรอบมโนทัศน์

13. ครูให้นักเรียนช่วยกันระดมโนทัศน์ที่สำคัญจากเนื้อหาเกี่ยวกับชื่อของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยเรียงลำดับมโนทัศน์จากมโนทัศน์ที่กว้างไปสู่มโนทัศน์ที่แคบและร่วมกันอภิปราย เมื่อได้ข้อสรุปแล้วครูเขียนลงบนกระดานดำ แล้วอธิบายโดยสรุป

14. ครูให้นักเรียนแต่ละคนเขียนกรอบมโนทัศน์เรื่องที่เรียนลงในกระดาษที่ครูแจกให้

ขั้นที่ 6 ขั้นการประเมินผล

15. ครูให้นักเรียนนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่นักเรียนสร้างขึ้นประมาณ 3–5 คน แล้วครูและนักเรียนช่วยกันวิจารณ์

16. ครูแจกเอกสารสรุปมโนทัศน์ให้นักเรียนแต่ละคนสรุปมโนทัศน์ที่เรียนในชั่วโมงนี้

17. ครูนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่ 3 ที่เตรียมมาให้ให้นักเรียนดู แล้วครูและนักเรียนช่วยกันสรุปมโนทัศน์ที่เรียนอีกครั้งหนึ่ง

18. ครูแจกใบงาน 1 ให้นักเรียนแต่ละคนทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนรู้

1. กรอบมโนทัศน์ที่ 1 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
2. กรอบมโนทัศน์ที่ 2 ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส
3. กรอบมโนทัศน์ที่ 3 ชื่อของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
4. ใบกิจกรรม 1 – A รูปสามเหลี่ยมมุมฉากและทฤษฎีบทของพีทาโกรัส
5. ใบกิจกรรม 1 – B ชื่อของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
6. ใบงาน 1 ชื่อของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
7. เอกสารสรุปมโนทัศน์

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. สังเกตจากการถาม – ตอบ และ การร่วมอภิปรายในชั้นเรียน	1. นักเรียนส่วนมากถาม – ตอบ และ ร่วมอภิปรายในชั้นเรียน
2. ตรวจจากการเขียนกรอบมโนทัศน์ และการนำเสนองานของนักเรียน	2. การเขียนกรอบมโนทัศน์ของนักเรียน ส่วนมากนั้นเขียนได้ถูกต้อง
3. ตรวจจากเอกสารสรุปมโนทัศน์ของ นักเรียน	3. นักเรียนส่วนมากสรุปมโนทัศน์ที่เรียนได้ ถูกต้อง
4. ตรวจจากใบกิจกรรม 1 – B และ ใบงาน 1 ของนักเรียน	4. โดยเฉลี่ยนักเรียนทำใบกิจกรรมและใบงาน ได้ถูกต้องร้อยละ 80

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

ผลการจัดการเรียนรู้.....

.....

.....

ปัญหาอุปสรรค.....

.....

.....

ข้อเสนอแนะ.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ (2)

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ชื่อหน่วยการเรียนรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ชื่อหน่วยย่อยการเรียนรู้ บทนิยามของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ จำนวน 1 ชั่วโมง

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ : นักเรียนสามารถ

1. บอกบทนิยามของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมแหลมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้
2. หาค่าไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมแหลมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้โดยใช้บทนิยามได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ : นักเรียนมีความสามารถ

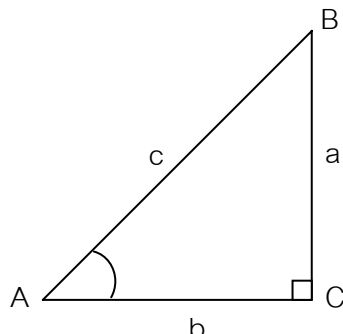
3. ในการสร้างความคิดรวบยอด
4. ในการคิดคำนวณ
5. สื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอ
6. เชื่อมโยงความรู้ที่เรียนกับเนื้อหาที่เกี่ยวข้องได้

ด้านคุณลักษณะ : ปลูกฝังให้นักเรียน

7. เป็นคนช่างสังเกต
8. มีความรับผิดชอบ
9. มีความเชื่อมั่นในตนเอง
10. กล้าแสดงออก
11. มีจินตนาการในการวาดและมองภาพ
12. มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

สาระการเรียนรู้

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก



อัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุม A ต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

หรือ $\frac{a}{c}$ เรียกว่า “ไซน์ (sine)” ของมุม A

อัตราส่วนของความยาวของด้านประชิดมุม A ต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

หรือ $\frac{b}{c}$ เรียกว่า “โคไซน์ (cosine)” ของมุม A

อัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุม A ต่อความยาวของด้านประชิดมุม A

หรือ $\frac{a}{b}$ เรียกว่า “แทนเจนต์ (tangent)” ของมุม A

เรียกอัตราส่วนทั้งสามนี้ว่า “อัตราส่วนตรีโกณมิติ”

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

ขั้นที่ 1 ขั้นตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียน

1. ครูทำการตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียนเรื่องทฤษฎีบทของพีทาโกรัสและ

ชื่อของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยครูตั้งคำถามให้นักเรียนตอบ

ขั้นที่ 2 ขั้นระดมมโนทัศน์พื้นฐานที่นักเรียนขาด

2. เมื่อนักเรียนตอบเสร็จแล้วครูเฉลยคำตอบ เมื่อเฉลยเสร็จแล้วครูระดมมโนทัศน์

พื้นฐานที่นักเรียนยังขาดออกมาเป็นข้อ ๆ

ขั้นที่ 3 ขั้นเสริมมโนทัศน์พื้นฐานให้นักเรียน

3. ถ้านักเรียนยังตอบคำถามของครูไม่ได้ ครูจะต้องทบทวนให้นักเรียนฟังอีกครั้งหนึ่ง

โดยให้นักเรียนดูกรอบมโนทัศน์ที่ 2 ทฤษฎีบทของพีทาโกรัสและกรอบมโนทัศน์ที่ 3 ชื่อของด้าน

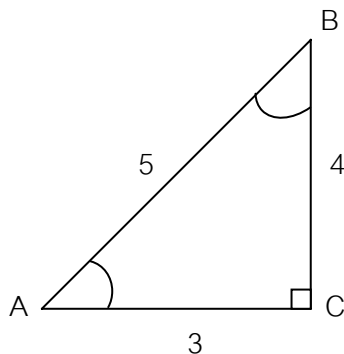
ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ครูเตรียมมา แล้วครูอธิบายเพิ่มเติม

ขั้นสอน

ขั้นที่ 4 ขั้นเรียนรู้

ครูสอนให้นักเรียนเข้าใจมโนทัศน์โดยมีขั้นตอนดังนี้

4. ครูวาดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉากบนกระดานดำดังนี้



ครูให้นักเรียนพิจารณารูปบนกระดานดำโดยให้พิจารณามุม A แล้วถามนักเรียนว่า ด้านทั้ง 3 ด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนั้นแต่ละด้านเรียกว่าด้านอะไร และแต่ละด้านมีความยาวด้านละกี่หน่วย เมื่อนักเรียนตอบคำถามได้แล้วให้พิจารณามุม B แล้วตั้งคำถามเช่นเดียวกัน

5. จากรูปบนกระดานครูให้นักเรียนหาอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก ดังนี้

- 1) อัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุม A ต่อด้านตรงข้ามมุมฉาก
- 2) อัตราส่วนของความยาวของด้านประชิดมุม A ต่อด้านตรงข้ามมุมฉาก
- 3) อัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุม A ต่อด้านประชิดมุม A

6. เมื่อนักเรียนหาอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉากที่ครูกำหนดให้ได้ถูกต้อง แล้วครูอธิบายว่า

- 1) อัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุม A ต่อด้านตรงข้ามมุมฉาก หรือ

$\frac{4}{5}$ เรียกว่า ไซน์ (sine) ของมุม A

- 2) อัตราส่วนของความยาวของด้านประชิดมุม A ต่อด้านตรงข้ามมุมฉาก หรือ $\frac{3}{5}$

เรียกว่า โคไซน์ (cosine) ของมุม A

- 3) อัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุม A ต่อด้านประชิดมุม A หรือ $\frac{4}{3}$

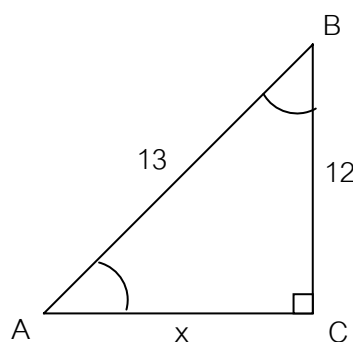
เรียกว่า แทนเจนต์ (tangent) ของมุม A

ครูอธิบายเพิ่มเติมว่า เราเรียกอัตราส่วนทั้งสามนี้ว่า อัตราส่วนตรีโกณมิติ และโดยปกตินิยมเขียน sin แทนไซน์ cos แทนโคไซน์ และ tan แทนแทนเจนต์

7. ครูให้นักเรียนหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม B จากรูปที่กำหนดให้บนกระดานดำ เมื่อนักเรียนสามารถหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม B ได้ถูกต้องแล้วครูให้นักเรียนหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่ครูกำหนดให้อีก 3 ข้อ

8. ครูยกตัวอย่างการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$ จากรูปต่อไปนี้



วิธีทำ

จากรูป ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
หาค่า x โดยใช้ทฤษฎีบทของพีทาโกรัสดังนี้

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$13^2 = x^2 + 12^2$$

$$x^2 = 13^2 - 12^2$$

$$x^2 = 169 - 144$$

$$x^2 = 25$$

$$x = 5$$

ดังนั้น $\sin A = \frac{12}{13}$

$$\cos A = \frac{5}{13}$$

$$\tan A = \frac{12}{5}$$

$$\sin A = \frac{12}{13}$$

$$\cos A = \frac{5}{13}$$

$$\tan A = \frac{12}{5}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\sin B$, $\cos B$ และ $\tan B$ จากรูปในตัวอย่างที่ 1

วิธีทำ

$$\sin B = \frac{5}{13}$$

$$\cos B = \frac{12}{13}$$

$$\tan B = \frac{5}{12}$$

10. ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรม 2-A เมื่อทำเสร็จแล้วครูสุ่มให้นักเรียนตอบ

ขั้นสรุป

ขั้นที่ 5 ขั้นสรุปด้วยกรอบมโนทัศน์

11. ครูให้นักเรียนช่วยกันระดมมโนทัศน์ที่สำคัญจากเนื้อหาเกี่ยวกับชื่อของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและบทนิยามของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ โดยเรียงลำดับมโนทัศน์จากมโนทัศน์ที่กว้างไปสู่มโนทัศน์ที่แคบและร่วมกันอภิปราย เมื่อได้ข้อสรุปแล้วครูเขียนลงบนกระดานดำ แล้วอธิบายโดยสรุป

12. ครูให้นักเรียนแต่ละคนเขียนกรอบมโนทัศน์เรื่องที่เรียนลงในกระดาษที่ครูแจกให้ โดยเขียนกรอบมโนทัศน์ละ 1 แผ่น

ขั้นที่ 6 ขั้นการประเมินผล

13. ครูให้นักเรียนนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่นักเรียนสร้างขึ้นประมาณ 3-5 คน แล้วครูและนักเรียนช่วยกันวิจารณ์

14. ครูแจกเอกสารสรุปมโนทัศน์ให้นักเรียนแต่ละคนสรุปมโนทัศน์ที่เรียนในช่วงนี้

15. ครูนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่ 4 ที่เตรียมมาให้ให้นักเรียนดู แล้วครูและนักเรียนช่วยกันสรุปมโนทัศน์ที่เรียนอีกครั้งหนึ่ง

16. ครูแจกใบงาน 2 ให้นักเรียนแต่ละคนทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนรู้

1. กรอบมโนทัศน์ที่ 2 ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส
2. กรอบมโนทัศน์ที่ 3 ชื่อของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
3. กรอบมโนทัศน์ที่ 4 บทนิยามของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์
4. ใบกิจกรรม 2-A รูปสามเหลี่ยมมุมฉากและทฤษฎีบทของพีทาโกรัส
5. ใบงาน 2 บทนิยามของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์

6. เอกสารสรุปมโนทัศน์

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. สังเกตจากการถาม – ตอบ และ การร่วมอภิปรายในชั้นเรียน	1. นักเรียนส่วนมากถาม – ตอบ และ ร่วมอภิปรายในชั้นเรียน
2. ตรวจจากการเขียนกรอบมโนทัศน์ และการนำเสนอของนักเรียน	2. การเขียนกรอบมโนทัศน์ของนักเรียน ส่วนมากนั้นเขียนได้ถูกต้อง
3. ตรวจจากเอกสารสรุปมโนทัศน์ของ นักเรียน	3. นักเรียนส่วนมากสรุปมโนทัศน์ที่เรียนได้ ถูกต้อง
4. ตรวจจากใบกิจกรรม 2 – A และ ใบงาน 2 ของนักเรียน	4. โดยเฉลี่ยนักเรียนทำใบกิจกรรมและใบงาน ได้ถูกต้องร้อยละ 80

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

ผลการจัดการเรียนรู้.....

.....

ปัญหาอุปสรรค.....

.....

ข้อเสนอแนะ.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ (3)

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ชื่อหน่วยการเรียนรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ชื่อหน่วยย่อยการเรียนรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มี

จำนวน 1 ชั่วโมง

ขนาดเท่ากัน จะเป็นค่าคงที่

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ : นักเรียนสามารถ

1. นำสมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้ายไปใช้หาความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ได้

2. หาค่าไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของรูปสามเหลี่ยมคล้ายที่กำหนดให้ได้

3. บอกได้ว่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่เท่ากันจะเป็นค่าคงตัว

ด้านทักษะ / กระบวนการ : นักเรียนมีความสามารถ

4. ในการสร้างความคิดรวบยอด

5. ในการคิดคำนวณ

6. ในการเปรียบเทียบ

7. ในการให้เหตุผล

8. สื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอ

9. เชื่อมโยงความรู้ที่เรียนกับเนื้อหาที่เกี่ยวข้องได้

ด้านคุณลักษณะ : ปลูกฝังให้นักเรียน

10. มีความรับผิดชอบ

11. มีความรอบคอบ

12. ทำงานอย่างเป็นระบบ

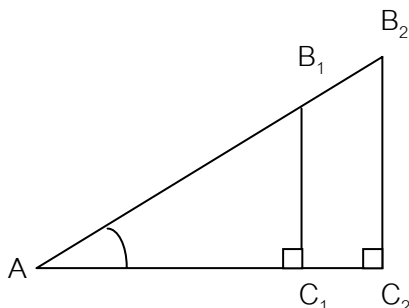
13. เป็นคนช่างสังเกต

14. มีจินตนาการในการวาดและมองภาพ

15. มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

สาระการเรียนรู้

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม A มีขนาดเท่ากันดังนี้



จากรูปจะเห็นว่า รูปสามเหลี่ยมมุมฉากทั้งสองรูป คือ AB_1C_1 และ AB_2C_2 เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายที่มีมุม A เป็นมุมเดียวกัน

จากสมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย จะได้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่เท่ากันดังนี้

$$(1) \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} \text{ ซึ่งแต่ละอัตราส่วน คือ ไซน์ของมุม } A$$

$$(2) \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_2}{AB_2} \text{ ซึ่งแต่ละอัตราส่วน คือ โคไซน์ของมุม } A$$

$$(3) \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} \text{ ซึ่งแต่ละอัตราส่วน คือ แทนเจนต์ของมุม } A$$

จาก (1), (2) และ (3) จะพบว่า

ไซน์ของมุม A โคไซน์ของมุม A และแทนเจนต์ของมุม A ของรูปสามเหลี่ยมคล้าย AB_1C_1 และ AB_2C_2 มีค่าเท่ากัน

นั่นคือ อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดเท่ากันจะเป็นค่าคงที่

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

ขั้นที่ 1 ขั้นตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียน

1. ครูทำการตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียนเรื่องสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย และการหาค่าไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมที่กำหนดให้ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยให้นักเรียน ทำใบกิจกรรม 3 – A

ขั้นที่ 2 ขั้นระบุมโนทัศน์พื้นฐานที่นักเรียนขาด

2. ครูเฉลยใบกิจกรรมโดยให้นักเรียนจับคู่แล้วเปลี่ยนกันตรวจ เมื่อเฉลยเสร็จแล้วครูระบุมโนทัศน์พื้นฐานที่นักเรียนยังขาดออกมาเป็นข้อ ๆ

ขั้นที่ 3 ขั้นเสริมมโนทัศน์พื้นฐานให้นักเรียน

3. ครูให้นักเรียนดูกรอบมโนทัศน์ที่ 5 สมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้ายที่ครูเตรียมมาแล้วครูอธิบายเพิ่มเติม

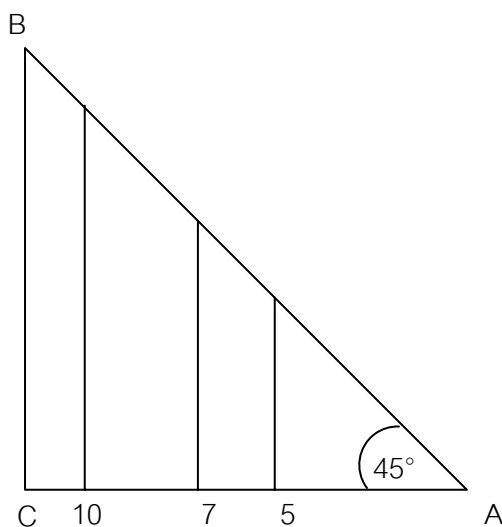
ขั้นสอน

ขั้นที่ 4 ขั้นเรียนรู้

ครูสอนให้นักเรียนเข้าใจมโนทัศน์โดยมีขั้นตอนดังนี้

4. ครูแจกใบกิจกรรม 3 – B ให้นักเรียนทำ เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้วครูให้ช่วยกันตอบ

5. เพื่อตรวจสอบว่าค่าของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมที่มีขนาดเท่ากันจะมีค่าเท่ากัน ครูจึงให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก และมุม A เท่ากับ 45° ดังรูป



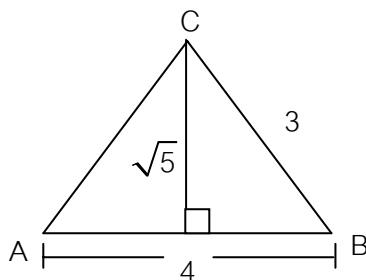
6. เมื่อนักเรียนสร้างรูปเสร็จแล้วครูให้นักเรียนหาค่าไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของรูปที่วาด โดยใช้การวัดความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมด้วยไม้บรรทัด

7. ครูให้นักเรียนพิจารณาค่าไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ที่หาได้จากใบกิจกรรม 2 และจากรูปที่นักเรียนสร้าง ครูซักถามว่ารูปที่กำหนดให้นั้นมีอะไรที่เหมือนกันหรือต่างกัน และค่าไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของรูปแต่ละรูปนั้นมีความสัมพันธ์กันอย่างไรบ้าง จนนักเรียนสามารถสรุปได้ว่า ค่าของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมที่มีขนาดเท่ากันจะมีค่าเท่ากัน

8. กรุณาอธิบายเพิ่มเติมว่า ค่าของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์จะเป็นค่าคงที่ ซึ่งขึ้นอยู่กับขนาดของมุม

9. กรุณาเสนอตัวอย่างดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยที่มีความยาวของด้านแต่ละด้านกำหนดไว้ดังรูป



- จงหา 1) $\sin A$
 2) $\cos B$
 3) $\tan A$

วิธีทำ ให้ D เป็นจุดบนเส้นตรงที่ลากจากจุด C ไปตั้งฉากกับเส้นตรง AB

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก BCD

โดยใช้ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส จะได้

$$BC^2 = BD^2 + CD^2$$

$$3^2 = BD^2 + \sqrt{5}^2$$

$$BD^2 = 3^2 - \sqrt{5}^2$$

$$BD^2 = 9 - 5$$

$$BD^2 = 4$$

$$BD = 2$$

แต่ $AB = 4$

ดังนั้น $AD = 2$

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ADC

โดยใช้ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส จะได้

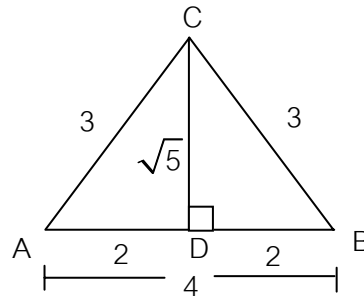
$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$AC^2 = 2^2 + \sqrt{5}^2$$

$$AC^2 = 4 + 5$$

$$AC^2 = 9$$

$$AC = 3$$



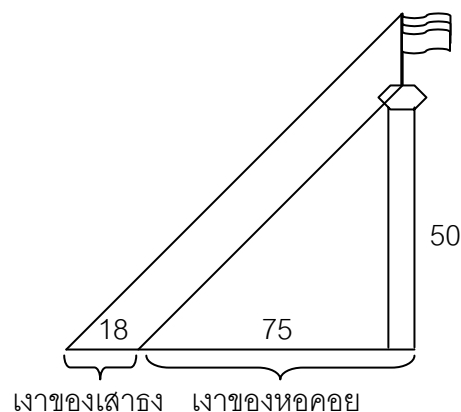
$$1) \sin A = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$2) \cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{2}{3}$$

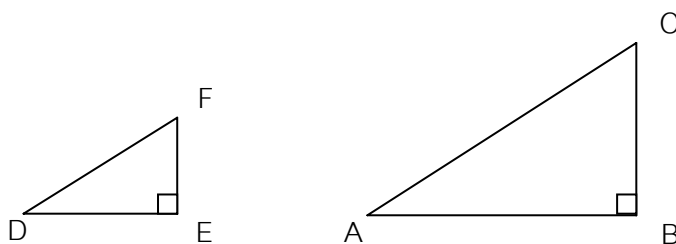
$$3) \tan A = \frac{CD}{AD} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ตัวอย่างที่ 2 หอคอยแห่งหนึ่งสูง 50 เมตร บนยอดหอคอยมีเสาธงปักอยู่ ณ ขณะหนึ่งพบว่าเงาของยอดหอคอยที่ทอดไปตามพื้นดินยาว 75 เมตร และเงาของเสาธงยาว 18 เมตร จงหาความสูงของเสาธง

วิธีทำ สร้างรูปจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้



จากรูปที่สร้างจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ข้างต้น เราสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยม ABC และ DEF ดังรูป จะพบว่า รูปสามเหลี่ยมทั้งสองเป็นรูปสามเหลี่ยมคล้าย



จากสมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย จะได้ว่า

$$\frac{EF}{BC} = \frac{DE}{AB}$$

$$\frac{EF}{50} = \frac{18}{75}$$

$$\frac{EF}{50} = \frac{18}{75}$$

$$EF = 50 \times \frac{18}{75} = 12$$

ดังนั้น ความสูงของเสาธงเท่ากับ 12 เมตร

ขั้นสรุป

ขั้นที่ 5 ขั้นสรุปด้วยกรอบมโนทัศน์

11. ครูให้นักเรียนช่วยกันระดมมโนทัศน์ที่สำคัญจากเนื้อหาเกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดเท่ากันจะเป็นค่าคงที่ โดยเรียงลำดับมโนทัศน์จากมโนทัศน์ที่กว้างไปสู่มโนทัศน์ที่แคบและร่วมกันอภิปราย เมื่อได้ข้อสรุปแล้วครูเขียนลงบนกระดานดำ แล้วอธิบายโดยสรุป

12. ครูให้นักเรียนแต่ละคนเขียนกรอบมโนทัศน์ที่ได้เรียนลงในกระดาษที่ครูแจกให้

ขั้นที่ 6 ขั้นการประเมินผล

13. ครูให้นักเรียนนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่นักเรียนสร้างขึ้นประมาณ 3–5 คน แล้วครูและนักเรียนช่วยกันวิจารณ์

14. ครูแจกเอกสารสรุปมโนทัศน์ให้นักเรียนแต่ละคนสรุปมโนทัศน์ที่เรียนในช่วงนี้

15. ครูนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่ 6 ที่เตรียมมาให้ให้นักเรียนดู แล้วครูและนักเรียนช่วยกันสรุปมโนทัศน์ที่เรียนอีกครั้งหนึ่ง

16. ครูแจกใบงาน 3 ให้นักเรียนแต่ละคนทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนรู้

1. กรอบมโนทัศน์ที่ 5 สมบัติรูปสามเหลี่ยมคล้าย

2. กรอบมโนทัศน์ที่ 6 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดเท่ากันจะเป็นค่าคงที่
3. ใบบทกิจกรรม 3 – A สมบัติรูปสามเหลี่ยมคล้ายและอัตราส่วนตรีโกณมิติ
4. ใบบทกิจกรรม 3 – B อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดเท่ากันจะเป็นค่าคงที่
5. ใบงาน 3 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดเท่ากันจะเป็นค่าคงที่
6. เอกสารสรุปมโนทัศน์

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. สังเกตจากการถาม – ตอบ และ การร่วมอภิปรายในชั้นเรียน	1. นักเรียนส่วนมากถาม – ตอบ และ ร่วมอภิปรายในชั้นเรียน
2. ตรวจจากการเขียนกรอบมโนทัศน์ และการนำเสนองานของนักเรียน	2. การเขียนกรอบมโนทัศน์ของนักเรียน ส่วนมากนั้นเขียนได้ถูกต้อง
3. ตรวจจากเอกสารสรุปมโนทัศน์ของ นักเรียน	3. นักเรียนส่วนมากสรุปมโนทัศน์ที่เรียนได้ ถูกต้อง
4. ตรวจจากใบบทกิจกรรม 3 – B และ ใบงาน 3 ของนักเรียน	4. โดยเฉลี่ยนักเรียนทำใบบทกิจกรรมและใบงาน ได้ถูกต้องร้อยละ 80

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

ผลการจัดการเรียนรู้.....

.....

ปัญหาอุปสรรค.....

.....

ข้อเสนอแนะ.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ (4)

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ชื่อหน่วยการเรียนรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ชื่อหน่วยย่อยการเรียนรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม

จำนวน 1 ชั่วโมง

30°, 45° และ 60°

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ : นักเรียนสามารถ

1. บอกวิธีการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30°, 45° และ 60°

โดยใช้ทฤษฎีบทของพีทาโกรัสได้

2. นำอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30°, 45° และ 60° ไปใช้ได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ : นักเรียนมีความสามารถ

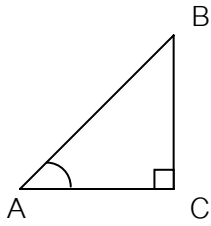
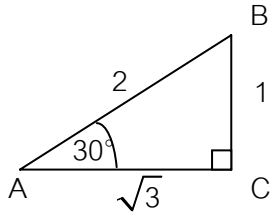
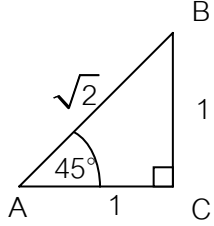
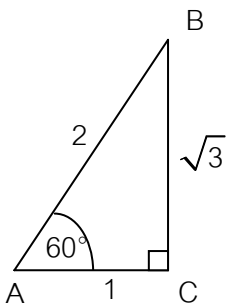
3. ในการสร้างความคิดรวบยอด
4. ในการปฏิบัติ
5. ให้เหตุผล
6. ในการคิดคำนวณ
7. สื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอ
8. เชื่อมโยงความรู้ที่เรียนกับเนื้อหาที่เกี่ยวข้องได้

ด้านคุณลักษณะ : ปลูกฝังให้นักเรียน

9. มีความรับผิดชอบ
10. มีความรอบคอบ
11. มีความสนใจใฝ่รู้
12. ทำงานอย่างเป็นระบบ
13. เป็นคนช่างสังเกต
14. มีจินตนาการในการวาดและมองภาพ
15. มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

สาระการเรียนรู้

ในสมัยกรีกโบราณ ทอเลมี (Ptolemy : ประมาณปี ค.ศ. 200) ได้สร้างตารางแสดงอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งเป็นค่าคงตัวไว้ ดังนี้

	มุม	ไซน์	โคไซน์	แทนเจนต์
	A	$\frac{BC}{AB}$	$\frac{AC}{AB}$	$\frac{BC}{AC}$
	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

ขั้นที่ 1 ขั้นตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียน

1. ครูทำการตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียนเรื่องทฤษฎีบทของพีทาโกรัส อัตราส่วนตรีโกณมิติและผลรวมของขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ โดยครูเป็นผู้ตั้งคำถามแล้วให้นักเรียนตอบ

ขั้นที่ 2 ขั้นระดมมโนทัศน์พื้นฐานที่นักเรียนขาด

2. ครูระดมมโนทัศน์ที่นักเรียนยังขาดออกมาเป็นข้อ ๆ

ขั้นที่ 3 ขั้นเสริมมโนทัศน์พื้นฐานให้นักเรียน

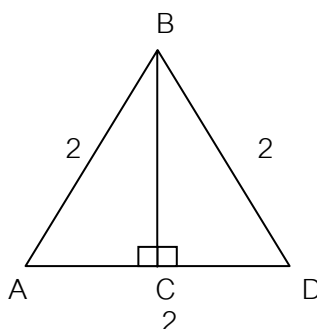
3. ครูให้นักเรียนดูกรอบมโนทัศน์ที่ 2 ทฤษฎีบทของพีทาโกรัสและกรอบมโนทัศน์ที่ 4 บทนิยามของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ แล้วครูอธิบายเพิ่มเติม

ขั้นสอน

ขั้นที่ 4 ขั้นเรียนรู้

ครูสอนให้นักเรียนเข้าใจมโนทัศน์โดยมีขั้นตอนดังนี้

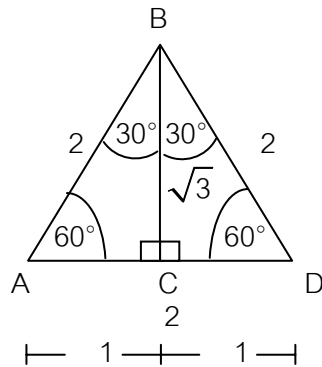
4. ครูให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าหนึ่งรูป โดยกำหนดให้ความยาวของด้านยาวด้านละ 2 หน่วย ให้ชื่อว่าสามเหลี่ยม ABD แล้วให้นักเรียนลากเส้นตรงจากจุดยอด B ให้ตั้งฉากกับฐาน AD ที่จุด C ซึ่งจะสามารสรสร้างได้ดังรูป



5. ครูให้นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD เพื่อหา

- 1) ขนาดของมุม A, มุม B และมุม D ของรูปสามเหลี่ยม ABD
- 2) ความยาวของ \overline{AC} , \overline{CD} และ \overline{BC} ของรูปสามเหลี่ยม ABD

6. ครูให้นักเรียนนำค่าของขนาดของมุมและความยาวของด้านที่หาได้เขียนแสดงลงในรูปที่นักเรียนสร้าง

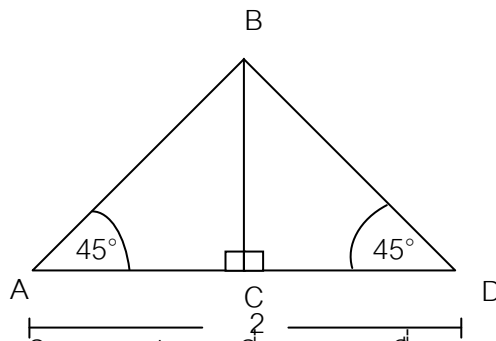


7. เมื่อนักเรียนสามารถหาขนาดของมุมและความยาวของด้านที่กำหนดให้ได้แล้ว
ครูให้นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉากแล้วให้หาค่าของไซน์
โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุม A และมุม B

8. ครูสุ่มให้นักเรียนบอกค่าของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของ มุม 30 องศา และ
มุม 60 องศา ถ้านักเรียนยังบอกไม่ได้ ครูชี้แนะ แนวทางจนนักเรียนสามารถบอกได้ว่า

	มุม	ไซน์	โคไซน์	แทนเจนต์
	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

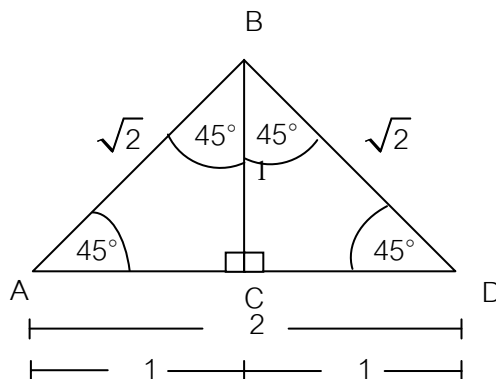
9. ครูให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABD โดยกำหนดให้มุมที่ฐานมุมละ
45 องศา และฐานยาว 2 หน่วย แล้วให้นักเรียนลากเส้นตรงจากจุดยอด B ให้ตั้งฉากกับฐาน
AD ที่จุด C



10. ครูให้นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD เพื่อหา

- 1) ขนาดของมุม B ของรูปสามเหลี่ยม ABD
- 2) ความยาวของ \overline{AC} , \overline{CD} และ \overline{BC} ของรูปสามเหลี่ยม ABD

11. ครูให้นักเรียนนำค่าของขนาดของมุมและความยาวของด้านที่หาได้เขียนแสดงลงในรูปที่นักเรียนสร้าง



12. ให้นักเรียนบอกค่าของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์มุม 45 องศา ถ้านักเรียนยังบอกไม่ได้ ครูชี้แนะแนวทางจนนักเรียนสามารถบอกได้ว่า

	มุม	ไซน์	โคไซน์	แทนเจนต์
	45°	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	1

13. ครูนำเสนอตัวอย่างการนำค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของ มุม 30°, 45° และ 60° ไปใช้ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $4 \sin 30^\circ + \sqrt{3} \cos 30^\circ - \sqrt{3} \tan 30^\circ$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } 4 \sin 30^\circ + \sqrt{3} \cos 30^\circ - \sqrt{3} \tan 30^\circ &= 4 \left(\frac{1}{2} \right) + \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\
 &= 2 + \frac{3}{2} - 1 \\
 &= \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $2 \sin 45^\circ - 4 \cos 45^\circ + 6 \tan 45^\circ$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\tan 45^\circ = 1$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } 2 \sin 45^\circ - 4 \cos 45^\circ + 6 \tan 45^\circ &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 6(1) \\ &= \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 6 \\ &= 6 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

ขั้นสรุป

ขั้นที่ 5 ขั้นสรุปด้วยกรอบมโนทัศน์

14. ครูให้นักเรียนช่วยกันระดมมโนทัศน์ที่สำคัญจากเนื้อหาเกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60° โดยเรียงลำดับมโนทัศน์จากมโนทัศน์ที่กว้างไปสู่มโนทัศน์ที่แคบ และร่วมกันอภิปราย เมื่อได้ข้อสรุปแล้วครูเขียนลงบนกระดานดำ แล้วอธิบายโดยสรุป

15. ครูให้นักเรียนแต่ละคนเขียนกรอบมโนทัศน์ที่ได้เรียนลงในกระดาษที่ครูแจกให้

ขั้นที่ 6 ขั้นการประเมินผล

16. ครูให้นักเรียนนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่นักเรียนสร้างขึ้นประมาณ 3–5 คน แล้วครูและนักเรียนช่วยกันวิจารณ์

17. ครูแจกเอกสารสรุปมโนทัศน์ให้นักเรียนแต่ละคนสรุปมโนทัศน์ที่เรียนในช่วงนี้

18. ครูนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่ 7 ที่เตรียมมาให้ให้นักเรียนดู แล้วครูและนักเรียนช่วยกันสรุปมโนทัศน์ที่เรียนอีกครั้งหนึ่ง

19. ครูแจกใบงาน 4 ให้นักเรียนแต่ละคนทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนรู้

1. กรอบมโนทัศน์ที่ 2 ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส
2. กรอบมโนทัศน์ที่ 4 บทนิยามของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์
3. กรอบมโนทัศน์ที่ 7 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°
4. ใบงาน 4 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°
5. เอกสารสรุปมโนทัศน์

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. สังเกตจากการถาม – ตอบ และ การร่วมอภิปรายในชั้นเรียน	1. นักเรียนส่วนมากถาม – ตอบ และ ร่วมอภิปรายในชั้นเรียน
2. ตรวจจากการเขียนกรอบมโนทัศน์ และการนำเสนองานของนักเรียน	2. การเขียนกรอบมโนทัศน์ของนักเรียน ส่วนมากนั้นเขียนได้ถูกต้อง
3. ตรวจจากเอกสารสรุปมโนทัศน์ที่นักเรียน สร้างขึ้น	3. นักเรียนส่วนมากสรุปมโนทัศน์ที่เรียนได้ ถูกต้อง
4. ตรวจจากใบงาน 4 ของนักเรียน	4. โดยเฉลี่ยนักเรียนทำใบงานได้ถูกต้อง ร้อยละ 80

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

ผลการจัดการเรียนรู้.....

.....

ปัญหาอุปสรรค.....

.....

ข้อเสนอแนะ.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ (5)

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ชื่อหน่วยการเรียนรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ชื่อหน่วยย่อยการเรียนรู้ การหาอัตราส่วนตรีโกณมิติโดยใช้

จำนวน 1 ชั่วโมง

การเปิดตารางหาค่าโดยประมาณของไซน์

โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง

0° และ 90°

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ : นักเรียนสามารถ

1. เปิดตารางหาค่าโดยประมาณของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90° ที่กำหนดให้ได้
2. นำค่าของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ที่ได้จากการเปิดตารางไปใช้ได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ : นักเรียนมีความสามารถ

3. ในการสร้างความคิดรวบยอด
4. ในการคิดคำนวณ
5. ในการปฏิบัติ
6. ในการเปรียบเทียบ
7. สื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอ
8. เชื่อมโยงความรู้ที่เรียนกับเนื้อหาที่เกี่ยวข้องได้

ด้านคุณลักษณะ : ปลูกฝังให้นักเรียน

9. มีความรับผิดชอบ
10. มีความรอบคอบ
11. ทำงานอย่างเป็นระบบ
12. เป็นคนช่างสังเกต
13. มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

สาระการเรียนรู้

ตารางแสดงค่าโดยประมาณของไซน์ โคไซน์และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°

A	sin A	cos A	tan A
1°	.017	.999	.017
2°	.035	.999	.035
3°	.052	.999	.052
4°	.070	.998	.070
5°	.087	.996	.087
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
87°	.999	.052	19.081
88°	.999	.035	28.636
89°	.999	.018	57.290

(ที่มา : หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 2
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. หน้า 105)

วิธีการอ่านค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติจากตาราง

1. ถ้าต้องการหาค่า $\sin A$ หรือ $\cos A$ หรือ $\tan A$ ให้ดูตรงช่องตารางนั้น ๆ
2. ดูค่าของมุมที่ต้องการมุมกี่องศา ให้ดูตรงช่องมุม A
3. อ่านค่าจากตารางที่ตรงค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติและค่าของมุมที่ต้องการหา

สรุป จากตารางจะเห็นได้ว่า ค่าของไซน์และโคไซน์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90° จะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

ขั้นที่ 1 ขั้นตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียน

1. ครูทำการตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียนเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60° โดยนักเรียนทำใบกิจกรรม 5 – A

ขั้นที่ 2 ขั้นระบุมโนทัศน์พื้นฐานที่นักเรียนขาด

2. ครูเฉลยใบกิจกรรม 5 – A โดยให้นักเรียนจับคู่แล้วเปลี่ยนกันตรวจ เมื่อเฉลยเสร็จแล้วครูระบุมโนทัศน์ที่นักเรียนยังขาดออกมาเป็นข้อ ๆ

ขั้นที่ 3 ขั้นเสริมมโนทัศน์พื้นฐานให้นักเรียน

3. ถ้านักเรียนส่วนใหญ่ยังตอบคำถามในใบกิจกรรม 5 – A ไม่ได้ ครูจะต้องทบทวนโดยให้นักเรียนดูกรอบมโนทัศน์ที่ 7 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60° ที่ครูเตรียมมา แล้วครูอธิบายเพิ่มเติม

ขั้นสอน

ขั้นที่ 4 ขั้นเรียนรู้

ครูสอนให้นักเรียนเข้าใจมโนทัศน์โดยมีขั้นตอนดังนี้

4. ครูให้นักเรียนคำนวณค่า $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$ และ $\tan 30^\circ$ ให้เป็นทศนิยมสามตำแหน่ง

5. เมื่อนักเรียนได้ค่า $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$ และ $\tan 30^\circ$ ที่เป็นทศนิยมสามตำแหน่งแล้วครูอธิบายให้นักเรียนทราบว่า การหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลมนอกจากการหาโดยใช้อัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก นักเรียนยังสามารถหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90° โดยใช้ตารางในหนังสือเรียนหน้า 15 หรือตารางที่ครูแจกให้

6. ครูให้นักเรียนดูตารางแสดงค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่ครูแจกให้ ครูแนะนำวิธีการอ่านค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติจากตารางแล้วให้นักเรียนหาค่าของ $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$ และ $\tan 30^\circ$ แล้วพิจารณาว่าได้ค่าเท่ากับที่นักเรียนคำนวณไว้หรือไม่

7. ครูแจกใบกิจกรรม 5 – B ให้นักเรียนทำข้อ 1) เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้วครูสุ่มให้นักเรียนตอบ

8. ครูให้นักเรียนพิจารณาตารางแสดงค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยพิจารณาค่าของไซน์และโคไซน์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90° ว่ามีค่าอยู่ระหว่างจำนวนใด ครูซักถามจนกว่านักเรียนจะสรุปได้ว่า ค่าของไซน์และโคไซน์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90° จะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1

9. ครูนำเสนอตัวอย่างการนำค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่ได้จากการเปิดตารางไปใช้ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าโดยประมาณของ $2 \sin 40^\circ - 3 \cos 35^\circ$

วิธีทำ จากตาราง จะได้ว่า $\sin 40^\circ \approx 0.643$ และ $\cos 35^\circ \approx 0.819$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } 2 \sin 40^\circ - 3 \cos 35^\circ &\approx 2(0.643) - 3(0.819) \\ &= 1.286 - 2.457 \\ &= -1.171 \end{aligned}$$

นั่นคือ $2 \sin 40^\circ - 3 \cos 35^\circ \approx -1.171$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าโดยประมาณของ $2 \tan 10^\circ - \frac{1}{2} \sin 20^\circ + \frac{1}{5} \cos 68^\circ$

วิธีทำ จากตารางจะได้ว่า $\tan 10^\circ \approx 0.176$, $\sin 20^\circ \approx 0.342$ และ $\cos 68^\circ \approx 0.375$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } 2 \tan 10^\circ - \frac{1}{2} \sin 20^\circ + \frac{1}{5} \cos 68^\circ &\approx 2(0.176) - \frac{1}{2}(0.342) + \frac{1}{5}(0.375) \\ &= 0.352 - 0.171 + 0.075 \\ &= 0.256 \end{aligned}$$

นั่นคือ $2 \tan 10^\circ - \frac{1}{2} \sin 20^\circ + \frac{1}{5} \cos 68^\circ \approx 0.256$

10. ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรม 5-B ที่เหลือทั้งหมด เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้วครูสุ่ม

ให้นักเรียนตอบ

ขั้นสรุป

ขั้นที่ 5 ขั้นสรุปด้วยกรอบมโนทัศน์

11. ครูให้นักเรียนช่วยกันระดมมโนทัศน์ที่สำคัญจากเนื้อหาเกี่ยวกับการเปิดตารางหาค่าของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90° โดยเรียงลำดับมโนทัศน์จากมโนทัศน์ที่กว้างไปสู่มโนทัศน์ที่แคบและร่วมกันอภิปราย เมื่อได้ข้อสรุปแล้วครูเขียนลงบนกระดานดำและอธิบายโดยสรุป

12. ครูให้นักเรียนแต่ละคนเขียนกรอบมโนทัศน์ที่ได้เรียนลงในกระดาษที่ครูแจกให้

ขั้นที่ 6 ขั้นการประเมินผล

13. ครูให้นักเรียนนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่นักเรียนสร้างขึ้นประมาณ 3-5 คน แล้วครูและนักเรียนช่วยกันวิจารณ์

14. ครูแจกเอกสารสรุปมโนทัศน์ให้นักเรียนแต่ละคนสรุปมโนทัศน์ที่เรียนในช่วงนี้

15. ครูนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่ 8 ที่เตรียมมาให้ให้นักเรียนดู แล้วครูและนักเรียนช่วยกันสรุปมโนทัศน์ที่เรียนอีกครั้งหนึ่ง

16. ครูแจกใบงาน 5 ให้นักเรียนแต่ละคนทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนรู้

1. กรอบมโนทัศน์ที่ 7 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°
2. กรอบมโนทัศน์ที่ 8 การเปิดตารางหาค่าของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°
3. ใบกิจกรรม 5-A อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°
4. ใบกิจกรรม 5-B การเปิดตารางหาค่าของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°
5. ใบงาน 5 การเปิดตารางหาค่าของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°
6. ตารางแสดงค่าโดยประมาณของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°
7. เอกสารสรุปมโนทัศน์

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. สังเกตจากการถาม – ตอบ และ การร่วมอภิปรายในชั้นเรียน	1. นักเรียนส่วนมากถาม – ตอบ และ ร่วมอภิปรายในชั้นเรียน
2. ตรวจสอบการเขียนกรอบมโนทัศน์ และการนำเสนองานของนักเรียน	2. การเขียนกรอบมโนทัศน์ของนักเรียน ส่วนมากนั้นเขียนได้ถูกต้อง
3. ตรวจสอบเอกสารสรุปมโนทัศน์ที่นักเรียน สร้างขึ้น	3. นักเรียนส่วนมากสรุปมโนทัศน์ที่เรียนได้ ถูกต้อง
4. ตรวจสอบใบกิจกรรม 5-B และ ใบงาน 5 ของนักเรียน	4. โดยเฉลี่ยนักเรียนทำใบกิจกรรมและใบงาน ได้ถูกต้องร้อยละ 80

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

ผลการจัดการเรียนรู้.....

.....

.....

ปัญหาอุปสรรค.....

.....

.....

ข้อเสนอแนะ.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ (6)

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ชื่อหน่วยการเรียนรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ชื่อหน่วยย่อยการเรียนรู้ การหาขนาดของมุมโดยการเปิดตาราง จำนวน 1 ชั่วโมง

ค่าโดยประมาณของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์

ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ : นักเรียนสามารถ

1. หาขนาดของมุมได้เมื่อกำหนดค่าไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ที่ปรากฏค่าในตารางมาให้
2. หาขนาดของมุมโดยประมาณเป็นจำนวนเต็มได้เมื่อกำหนดค่าไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ที่ไม่ปรากฏค่าในตารางมาให้
3. หาขนาดของมุมโดยประมาณเป็นทศนิยมหนึ่งตำแหน่งได้เมื่อกำหนดค่าไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ที่ไม่ปรากฏค่าในตารางมาให้
4. หาขนาดของมุมโดยประมาณเป็นทศนิยมสองตำแหน่งได้เมื่อกำหนดค่าไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ที่ไม่ปรากฏค่าในตารางมาให้
5. หาขนาดของมุมโดยประมาณได้เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมาให้
6. หาขนาดของมุมโดยประมาณได้เมื่อกำหนดความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมาให้

ด้านทักษะ / กระบวนการ : นักเรียนมีความสามารถ

7. ในการสร้างความคิดรวบยอด
8. ในการคิดคำนวณ
9. ในการปฏิบัติ
10. ในการเปรียบเทียบ
11. สื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอ
12. เชื่อมโยงความรู้ที่เรียนกับเนื้อหาที่เกี่ยวข้องได้

ด้านคุณลักษณะ : ปลูกฝังให้นักเรียน

13. มีความรับผิดชอบ
14. ทำงานอย่างเป็นระบบ
15. เป็นคนช่างสังเกต
16. มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์
17. มีจินตนาการในการวาดและมองภาพ

สาระการเรียนรู้

การหาขนาดของมุมโดยการเปิดตารางค่าโดยประมาณของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90° แบ่งออกเป็น 2 กรณีดังนี้

1. ในกรณีที่ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์เป็นจำนวนที่ปรากฏค่าในตาราง เราสามารถหาค่าขนาดของมุมโดยดูว่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่กำหนดให้อยู่ตรงกับขนาดของมุมใด ให้เลือกตอบมุมมองศาของจำนวนนั้น
2. ในกรณีที่ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์เป็นจำนวนที่ไม่ปรากฏค่าในตาราง เราจะต้องหาค่าขนาดของมุมโดยประมาณสามารถทำได้ดังนี้
 - 1) ประมาณค่ามุมเป็นจำนวนเต็ม โดยดูว่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่ได้อยู่ระหว่างค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติสองจำนวนใด แล้วพิจารณาว่าอยู่ใกล้จำนวนใดมากกว่ากัน ให้เลือกตอบมุมมองศาของจำนวนนั้น
 - 2) ประมาณค่าของมุมเป็นจำนวนทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง หรือสองตำแหน่ง หรือมากกว่าสองตำแหน่ง สามารถทำได้โดยการใช้สัดส่วนของความแตกต่างระหว่างของมุม และความแตกต่างระหว่างค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

ขั้นที่ 1 ขั้นตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียน

1. ครูทำการตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียนเรื่องการเปิดตารางหาค่าของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90° โดยครูกำหนดขนาดของมุมมาให้ แล้วสุ่มให้นักเรียนหาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ

ขั้นที่ 2 ขั้นระบุมโน้ตศน์พื้นฐานที่นักเรียนขาด

2. ถ้านักเรียนยังไม่สามารถหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของขนาดของมุมที่ครูกำหนดให้
ครูต้องระบุมโน้ตศน์ที่นักเรียนยังขาดออกมาเป็นข้อ ๆ

ขั้นที่ 3 ขั้นเสริมมโน้ตศน์พื้นฐานให้นักเรียน

3. ครูทบทวนโดยให้นักเรียนดูกรอบมโน้ตศน์ที่ 8 การเปิดตารางหาค่าโดยประมาณ
ของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°

ขั้นสอน

ขั้นที่ 4 ขั้นเรียนรู้

ครูสอนให้นักเรียนเข้าใจมโน้ตศน์โดยมีขั้นตอนดังนี้

4. ครูอธิบายว่า จากคาบที่ผ่านมานักเรียนได้เปิดตารางหาค่าโดยประมาณของไซน์
โคไซน์และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90° เมื่อกำหนดขนาดของมุมมาให้ ใน
คาบนี้ครูจะให้นักเรียนหาขนาดของมุมเมื่อกำหนดค่าของไซน์ โคไซน์และแทนเจนต์มาให้บ้าง

5. ครูเขียนโจทย์บนกระดานดังนี้

กำหนดให้ มุม A เป็นมุมแหลมของรูปสามเหลี่ยม ABC จงหา A เมื่อกำหนดให้

1) $\sin A \approx 0.545$

2) $\cos A \approx 0.799$

3) $\tan A \approx 0.675$

6. ครูให้นักเรียนช่วยกันหาขนาดของมุม A จากโจทย์ที่ครูกำหนดให้บนกระดาน ครู
สุ่มให้นักเรียนตอบแล้วแสดงวิธีทำบนกระดานดังนี้

วิธีทำ

1) เนื่องจาก A เป็นมุมแหลม และ $\sin A \approx 0.545$

จากตาราง จะได้ว่า $\sin 33^\circ \approx 0.545$

จะได้ว่า มุม A เท่ากับ 33°

2) เนื่องจาก A เป็นมุมแหลม และ $\cos A \approx 0.799$

จากตาราง จะได้ว่า $\cos 37^\circ \approx 0.799$

จะได้ว่า มุม A เท่ากับ 37°

3) เนื่องจาก A เป็นมุมแหลม และ $\tan A \approx 0.675$

จากตาราง จะได้ว่า $\tan 34^\circ \approx 0.675$

จะได้ว่า มุม A เท่ากับ 34°

7. ครูแจกใบกิจกรรม 6-A ให้นักเรียนทำข้อ 1) เมื่อทำเสร็จแล้วให้นักเรียนช่วยกัน

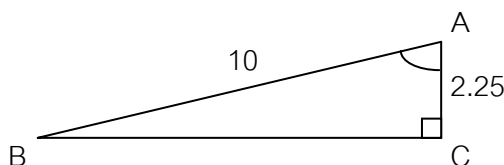
ตอบ

8. ครูนำเสนอตัวอย่างบนกระดานดำ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยมีมุม C เป็นมุมฉาก และ

$$\overline{AC} = 2.25 \text{ เซนติเมตร และ } \overline{AB} = 10 \text{ เซนติเมตร จงหาขนาดของมุม A}$$

วิธีทำ จากที่โจทย์กำหนดให้จะได้รูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป



$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } \cos A &= \frac{AC}{AB} \\ &= \frac{2.25}{10} \\ &= 0.225 \end{aligned}$$

จากตารางจะได้ว่า $\cos 77^\circ \approx 0.225$

ดังนั้น มุม A มีขนาดประมาณ 77°

9. ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรมข้อ 2) เมื่อทำเสร็จแล้วครูให้นักเรียนส่งตัวแทนมาแสดงวิธีทำบนกระดานดำ

10. ครูอธิบายว่า จากตัวอย่างและกิจกรรมที่นักเรียนได้ทำไปนั้นจะเห็นได้ว่า เป็นการหาขนาดของมุมในกรณีที่ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์เป็นจำนวนที่ปรากฏค่าในตาราง ต่อไปครูจะให้นักเรียนหาขนาดของมุมในกรณีที่ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์เป็นจำนวนที่ไม่ปรากฏค่าในตารางบ้าง

11. ครูเขียนโจทย์บนกระดานดำ ดังนี้

กำหนดให้ มุม A เป็นมุมแหลมของรูปสามเหลี่ยม ABC จงหามุม A เมื่อกำหนดให้ $\sin A \approx 0.580$

ครูให้นักเรียนดูตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติในช่องของ $\sin A$ จะพบว่าไม่ปรากฏค่า $\sin A \approx 0.580$ ในตาราง ดังนั้นครูจึงให้นักเรียนหาค่าที่ใกล้เคียง จะพบว่า 0.580 อยู่ระหว่าง $\sin 35^\circ \approx 0.574$ และ $\sin 36^\circ \approx 0.588$ แล้วครูให้นักเรียนพิจารณาว่าอยู่ใกล้จำนวนใดมากกว่ากัน จะพบว่า $\sin A - \sin 35^\circ = 0.006$ และ $\sin 36^\circ - \sin A = 0.008$ ดังนั้น มุม A อยู่ใกล้มุม 35° มากกว่า นั่นคือ ค่าโดยประมาณเป็นจำนวนเต็มของมุม A

เท่ากับ 35°

12. ครูอธิบายเพิ่มเติมว่า ในบางครั้งเมื่อนำความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้มาคำนวณหาอัตราส่วนตรีโกณมิติ ไซน์ หรือโคไซน์ หรือแทนเจนต์ แล้วได้เป็นจำนวนที่ไม่ปรากฏในตารางอัตราส่วนตรีโกณมิติ เราจึงต้องหาค่ามุมโดยประมาณ ซึ่งอาจจะประมาณเป็นจำนวนเต็ม โดยดูว่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่ได้อยู่ระหว่างค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติสองจำนวนใด แล้วพิจารณาว่าอยู่ใกล้จำนวนใดมากกว่ากัน ให้เลือกตอบมุมมองศานั้น

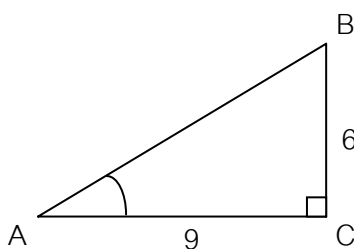
13. ครูนำเสนอตัวอย่างบนกระดานดำ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยมีมุม C เป็นมุมฉาก และ

$\overline{AC} = 9$ หน่วย และ $\overline{BC} = 6$ หน่วย จงหาค่าประมาณเป็นจำนวนเต็มของมุม A

วิธีทำ

จากที่โจทย์กำหนดให้สามารถสร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ได้ดังรูป



$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } \tan A &= \frac{BC}{AC} \\ &= \frac{6}{9} \\ &\approx 0.667 \end{aligned}$$

จากตารางอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะพบว่า $\tan A \approx 0.667$

อยู่ระหว่าง $\tan 33^\circ \approx 0.649$ และ $\tan 34^\circ \approx 0.675$

โดยที่ $\tan A - \tan 33^\circ = 0.018$

$$\tan 34^\circ - \tan A = 0.008$$

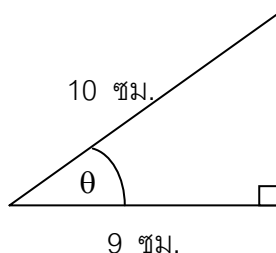
ดังนั้น มุม A อยู่ใกล้มุม 34° มากกว่า

นั่นคือ ค่าโดยประมาณเป็นจำนวนเต็มของมุม A เท่ากับ 34°

14. ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรมข้อ 3) เมื่อทำเสร็จแล้วครูให้นักเรียนส่งตัวแทนมาแสดงวิธีทำบนกระดานดำ

15. ครูอธิบายว่าในกรณีที่ต้องการประมาณค่าของมุม A ให้ละเอียดยิ่งขึ้น ซึ่งอาจจะประมาณเป็นทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง หรือสองตำแหน่ง หรือมากกว่าสองตำแหน่ง ก็สามารถทำได้ โดยการใช้สัดส่วนของความแตกต่างระหว่างของมุม และความแตกต่างระหว่างค่าอัตราส่วน – ตรีโกณมิติของมุม

16. ครูนำเสนอตัวอย่างบนกระดานดำ ดังนี้
ตัวอย่างที่ 3 จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาค่าของมุม θ



วิธีทำ จากรูป $\cos \theta = \frac{9}{10}$
 $= 0.9$

จากตาราง $\cos 25^\circ \approx 0.906$

$\cos 26^\circ \approx 0.899$

ค่าของมุมต่างกัน $26^\circ - 25^\circ$ ค่าของโคไซน์ต่างกัน $0.906 - 0.899 = 0.007$

ค่าของ $\cos \theta$ ต่างกับค่าของ $\cos 26^\circ$ เท่ากับ $0.9 - 0.899 = 0.001$

ค่าของโคไซน์ต่างกัน 0.007 ค่าของมุมต่างกัน 1 องศา

ค่าของโคไซน์ต่างกัน 0.001 ค่าของมุมต่างกัน $\frac{0.001 \times 1}{0.007} = 0.143$ องศา

ดังนั้น เมื่อค่าของโคไซน์เท่ากับ 0.90

มุม θ จะมีขนาด $26^\circ - 0.143^\circ \approx 25.857^\circ$

17. จากตัวอย่างที่ 3 ครูอธิบายว่า

- 1) ถ้าต้องการหาค่าโดยประมาณเป็นจำนวนเต็มของมุม θ จะได้ขนาดของมุม $\theta \approx 26^\circ$
- 2) ถ้าต้องการหาค่าโดยประมาณเป็นทศนิยมหนึ่งตำแหน่งของมุม θ จะได้ขนาดของมุม $\theta \approx 26.1^\circ$
- 3) ถ้าต้องการหาค่าโดยประมาณเป็นทศนิยมสองตำแหน่งของมุม θ จะได้ขนาดของมุม $\theta \approx 26.14^\circ$

18. ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรมข้อ 4) เมื่อทำเสร็จแล้วครูให้นักเรียนส่งตัวแทนมาแสดงวิธีทำบนกระดานดำ

ขั้นสรุป

ขั้นที่ 5 ขั้นสรุปด้วยกรอบมโนทัศน์

19. ครูให้นักเรียนช่วยกันระดมโนทัศน์ที่สำคัญจากเนื้อหาเกี่ยวกับการหาขนาดของมุม โดยการเปิดตารางค่าโดยประมาณของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90° โดยเรียงลำดับมโนทัศน์จากมโนทัศน์ที่กว้างไปสู่มโนทัศน์ที่แคบและร่วมกันอภิปรายเมื่อได้ข้อสรุปแล้วครูเขียนลงบนกระดานดำ แล้วอธิบายโดยสรุป

20. ครูให้นักเรียนแต่ละคนเขียนกรอบมโนทัศน์ที่ได้เรียนลงในกระดาษที่ครูแจกให้

ขั้นที่ 6 ขั้นการประเมินผล

21. ครูให้นักเรียนนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่นักเรียนสร้างขึ้นประมาณ 3–5 คน แล้วครูและนักเรียนช่วยกันวิจารณ์

22. ครูแจกเอกสารสรุปมโนทัศน์ให้นักเรียนแต่ละคนสรุปมโนทัศน์ที่เรียนในชั่วโมงนี้

23. ครูนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่ 9 ที่เตรียมมาให้ให้นักเรียนดู แล้วครูและนักเรียนช่วยกันสรุปมโนทัศน์ที่เรียนอีกครั้งหนึ่ง

24. ครูแจกใบงาน 6 ให้นักเรียนแต่ละคนทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนรู้

1. กรอบมโนทัศน์ที่ 8 การเปิดตารางค่าของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°

2. กรอบมโนทัศน์ที่ 9 การหาขนาดของมุมโดยการเปิดตารางของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°

3. ใบกิจกรรม 6-A การหาขนาดของมุมโดยการเปิดตารางของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°

4. ใบงาน 6 การหาขนาดของมุมโดยการเปิดตารางของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°

5. ตารางแสดงค่าโดยประมาณของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°

6. เอกสารสรุปมโนทัศน์

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. สังเกตจากการถาม – ตอบ และ การร่วมอภิปรายในชั้นเรียน	1. นักเรียนส่วนมากถาม – ตอบ และ ร่วมอภิปรายในชั้นเรียน
2. ตรวจจากการเขียนกรอบมโนทัศน์ และการนำเสนองานของนักเรียน	2. การเขียนกรอบมโนทัศน์ของนักเรียน ส่วนมากนั้นเขียนได้ถูกต้อง
3. ตรวจจากเอกสารสรุปมโนทัศน์ที่นักเรียน สร้างขึ้น	3. นักเรียนส่วนมากสรุปมโนทัศน์ที่เรียนได้ ถูกต้อง
4. ตรวจจากใบกิจกรรม 6 – A และ ใบงาน 6 ของนักเรียน	4. โดยเฉลี่ยนักเรียนทำใบกิจกรรมและใบงาน ได้ถูกต้องร้อยละ 80

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

ผลการจัดการเรียนรู้.....

.....

ปัญหาอุปสรรค.....

.....

ข้อเสนอแนะ.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ (7)

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ชื่อหน่วยการเรียนรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ชื่อหน่วยย่อยการเรียนรู้ การหาอัตราส่วนตรีโกณมิติโดยใช้

จำนวน 1 ชั่วโมง

ความสัมพันธ์ของด้านและมุม

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ : นักเรียนสามารถ

1. หาอัตราส่วนตรีโกณมิติโดยหาจากความสัมพันธ์ของด้านที่กำหนดให้ได้
2. หาอัตราส่วนตรีโกณมิติโดยหาจากความสัมพันธ์ของมุมที่กำหนดให้ได้
3. นำความสัมพันธ์ของด้านและมุมที่กำหนดให้ไปใช้หาอัตราส่วนตรีโกณมิติ

ที่ต้องการได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ : นักเรียนมีความสามารถ

4. ในการสร้างความคิดรวบยอด
5. ในการปฏิบัติ
6. ให้เหตุผล
7. ในการคิดคำนวณ
8. สื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอ
9. เชื่อมโยงความรู้ที่เรียนกับเนื้อหาที่เกี่ยวข้องได้

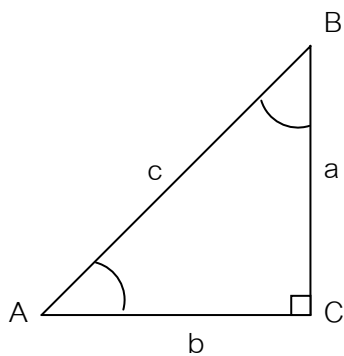
ด้านคุณลักษณะ : ปลูกฝังให้นักเรียน

10. มีความรับผิดชอบ
11. มีความรอบคอบ
12. ทำงานอย่างเป็นระบบ
13. เป็นคนช่างสังเกต
14. มีจินตนาการในการวาดและมองภาพ
15. มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

สาระการเรียนรู้

ในการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติ นอกจากจะหาจากความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและการเปิดตารางอัตราส่วนตรีโกณมิติแล้วยังสามารถหาความสัมพันธ์ของด้านและมุมได้ดังนี้

(1) ความสัมพันธ์ของด้าน



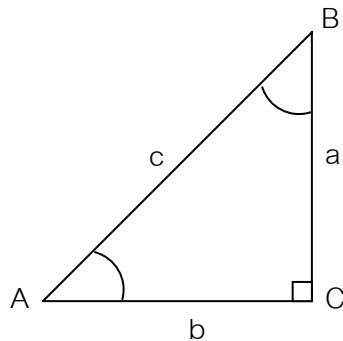
ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม C เป็นมุมฉาก

$$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \sin B$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\tan B}$$

(2) ความสัมพันธ์ของมุม



จากรูป มุม A และ B มีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$\hat{A} = 90^\circ - \hat{B}$$

$$\text{และ } \hat{B} = 90^\circ - \hat{A}$$

จาก $\sin A = \cos B$

$$\cos A = \sin B$$

$$\tan A = \frac{1}{\tan B}$$

จะได้ $\sin A = \cos (90^\circ - A)$

จะได้ $\cos A = \sin (90^\circ - A)$

จะได้ $\tan A = \frac{1}{\tan (90^\circ - A)}$

จากความสัมพันธ์ที่กล่าวมา จะสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนตรีโกณมิติทั้งสามได้คือ

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

เมื่อ $\cos A \neq 0$

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

ขั้นที่ 1 ขั้นตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียน

1. ครูทำการตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียนเรื่องการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยหาจากความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยครูวาดรูปบนกระดานดำแล้วให้นักเรียนช่วยกันหาอัตราส่วนตรีโกณมิติ

ขั้นที่ 2 ขั้นระดมมโนทัศน์พื้นฐานที่นักเรียนขาด

2. ถ้านักเรียนยังไม่สามารถหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ครูกำหนดให้ ครูต้องระดมมโนทัศน์ที่นักเรียนยังขาดออกมาเป็นข้อ ๆ

ขั้นที่ 3 ขั้นเสริมมโนทัศน์พื้นฐานให้นักเรียน

3. ครูทบทวนโดยให้นักเรียนดูกรอบมโนทัศน์ที่ 4 บทนิยามของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์

ขั้นสอน

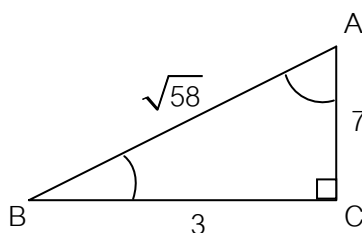
ขั้นที่ 4 ขั้นเรียนรู้

ครูสอนให้นักเรียนเข้าใจมโนทัศน์โดยมีขั้นตอนดังนี้

4. ครูแจกใบกิจกรรม 7 – A ให้นักเรียนทำข้อ 1) แล้วครูสุ่มให้นักเรียนตอบ เมื่อเฉลยเสร็จแล้วครูอธิบายการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติโดยหาจากความสัมพันธ์ของด้านอีกครั้งหนึ่ง

5. ครูนำเสนอตัวอย่างบนกระดานดำ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุม A และมุม B จากรูปที่กำหนดให้



วิธีทำ จากรูปจะได้

$$\sin A = \frac{3}{\sqrt{58}}$$

$$\cos A = \frac{7}{\sqrt{58}}$$

$$\tan A = \frac{3}{7}$$

หาค่าของ $\sin B$, $\cos B$ และ $\tan B$ ดังนี้

$$\sin B = \cos A = \frac{7}{\sqrt{58}}$$

$$\cos B = \sin A = \frac{3}{\sqrt{58}}$$

$$\tan B = \frac{1}{\tan A} = \frac{7}{3}$$

6. จากรูปในตัวอย่างที่ 1 บนกระดานดำ ครูให้นักเรียนหาค่าของ

$$\frac{\sin A}{\cos A} \quad \text{และ} \quad \frac{\sin B}{\cos B}$$

เมื่อนักเรียนได้คำตอบที่ถูกต้องแล้วครูให้นักเรียนพิจารณาว่าค่าของ

$$\frac{\sin A}{\cos A} \quad \text{และ} \quad \frac{\sin B}{\cos B}$$

ที่นักเรียนหามาได้นั้นมีค่าเท่ากับอัตราส่วนตรีโกณมิติใดบ้าง จงกว่า

นักเรียนจะสามารถสรุปความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนตรีโกณมิติทั้งสามได้คือ

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \quad \text{และ} \quad \tan B = \frac{\sin B}{\cos B}$$

7. ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรมข้อ 2) และข้อ 3) เมื่อทำเสร็จแล้วครูให้นักเรียนส่งตัวแทนมาแสดงวิธีทำบนกระดานดำ เมื่อเฉลยเสร็จแล้วครูอธิบายการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติโดยหาจากความสัมพันธ์ของมุมอีกครั้งหนึ่ง

8. ครูนำเสนอตัวอย่างบนกระดานดำ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนอัตราส่วนตรีโกณมิติที่กำหนดให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์ของมุม

วิธีทำ

$$1) \sin 55^\circ = \cos (90^\circ - 55^\circ) = \cos 35^\circ$$

$$2) \cos 36^\circ = \sin (90^\circ - 36^\circ) = \sin 54^\circ$$

$$3) \tan 20^\circ = \frac{1}{\tan(90^\circ - 20^\circ)} = \frac{1}{\tan 70^\circ}$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $\sin 57^\circ = 0.839$ และ $\cos 57^\circ = 0.545$ จงหาค่าของ $\cos 33^\circ$

วิธีทำ

$$\text{จาก } \cos A = \sin (90^\circ - A)$$

$$\text{จะได้ } \cos 33^\circ = \sin (90^\circ - 33^\circ)$$

$$= \sin 57^\circ$$

$$= 0.839$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ A และ B เป็นมุมแหลมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

$$\text{จงหา } (\tan A \tan B) + \left[\sin(90^\circ - B) \frac{1}{\sin A} \right]$$

วิธีทำ เนื่องจาก $\tan A = \frac{1}{\tan B}$ และ $\sin(90^\circ - B) = \cos B = \sin A$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } (\tan A \tan B) + \left[\sin(90^\circ - B) \frac{1}{\sin A} \right] &= \left(\frac{1}{\tan B} \tan B \right) + \left(\sin A \frac{1}{\sin A} \right) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

9. ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรมข้อ 4) แล้วให้นักเรียนส่งตัวแทนออกมาแสดงวิธีทำบนกระดานดำ

ขั้นสรุป

ขั้นที่ 5 ขั้นสรุปด้วยกรอบมโนทัศน์

10. ครูให้นักเรียนช่วยกันระดมมโนทัศน์ที่สำคัญจากเนื้อหาเกี่ยวกับการหาอัตราส่วน - ตรีโกณมิติโดยหาจากความสัมพันธ์ของด้านและมุม โดยเรียงลำดับมโนทัศน์จากมโนทัศน์ที่กว้างไปสู่มโนทัศน์ที่แคบและร่วมกันอภิปราย เมื่อได้ข้อสรุปแล้วครูเขียนลงบนกระดานดำ แล้วอธิบายโดยสรุป

11. ครูให้นักเรียนแต่ละคนเขียนกรอบมโนทัศน์ที่ได้เรียนลงในกระดาษที่ครูแจกให้

ขั้นที่ 6 ขั้นการประเมินผล

12. ครูให้นักเรียนนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่นักเรียนสร้างขึ้นประมาณ 3-5 คน แล้วครูและนักเรียนช่วยกันวิจารณ์

13. ครูแจกเอกสารสรุปมโนทัศน์ให้นักเรียนแต่ละคนสรุปมโนทัศน์ที่เรียนในช่วงนี้

14. ครูนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่ 10 ที่เตรียมมาให้ให้นักเรียนดู แล้วครูและนักเรียนช่วยกันสรุปมโนทัศน์ที่เรียนอีกครั้งหนึ่ง

15. ครูแจกใบงาน 7 ให้นักเรียนแต่ละคนทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนรู้

1. กรอบมโนทัศน์ที่ 4 บทนิยามของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์
2. กรอบมโนทัศน์ที่ 10 การหาอัตราส่วนตรีโกณมิติโดยหาจากความสัมพันธ์ของด้านและมุม
3. ใบกิจกรรม 7 – A การหาอัตราส่วนตรีโกณมิติโดยหาจากความสัมพันธ์ของด้านและมุม
4. ใบงาน 7 การหาอัตราส่วนตรีโกณมิติโดยหาจากความสัมพันธ์ของด้านและมุม
5. ตารางแสดงค่าโดยประมาณของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°
6. เอกสารสรุปมโนทัศน์

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. สังเกตจากการถาม – ตอบ และ การร่วมอภิปรายในชั้นเรียน	1. นักเรียนส่วนมากถาม – ตอบ และ ร่วมอภิปรายในชั้นเรียน
2. ตรวจจากการเขียนกรอบมโนทัศน์ และการนำเสนองานของนักเรียน	2. การเขียนกรอบมโนทัศน์ของนักเรียน ส่วนมากนั้นเขียนได้ถูกต้อง
3. ตรวจจากเอกสารสรุปมโนทัศน์ที่นักเรียน สร้างขึ้น	3. นักเรียนส่วนมากสรุปมโนทัศน์ที่เรียนได้ ถูกต้อง
4. ตรวจจากใบกิจกรรม 7 – A และ ใบงาน 7 ของนักเรียน	4. โดยเฉลี่ยนักเรียนทำใบกิจกรรมและใบงาน ได้ถูกต้องร้อยละ 80

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

ผลการจัดการเรียนรู้.....

.....

.....

ปัญหาอุปสรรค.....

.....

.....

ข้อเสนอแนะ.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ (8)

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ชื่อหน่วยการเรียนรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ชื่อหน่วยย่อยการเรียนรู้ ส่วนกลับของอัตราส่วนตรีโกณมิติ

จำนวน 1 ชั่วโมง

ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ : นักเรียนสามารถ

1. บอกบทนิยามของโคไซน์แคนต์ ซีแคนต์ และโคแทนเจนต์ได้
2. หาโคไซน์แคนต์ ซีแคนต์ และโคแทนเจนต์ของรูปที่กำหนดให้ได้
3. หาโคไซน์แคนต์ ซีแคนต์ และโคแทนเจนต์ที่กำหนดให้โดยการเปิดตาราง

อัตราส่วนตรีโกณมิติได้

4. หาอัตราส่วนตรีโกณมิติทั้ง 6 อัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ : นักเรียนมีความสามารถ

5. ในการสร้างความคิดรวบยอด
6. ในการปฏิบัติ
7. ในการคิดคำนวณ
8. สื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอ
9. เชื่อมโยงความรู้ที่เรียนกับเนื้อหาที่เกี่ยวข้องได้

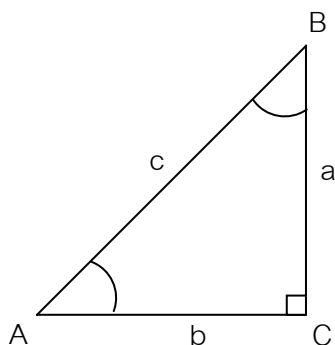
ด้านคุณลักษณะ : ปลูกฝังให้นักเรียน

10. มีความรับผิดชอบ
11. มีความรอบคอบ
12. ทำงานอย่างเป็นระบบ
13. เป็นคนช่างสังเกต
14. มีจินตนาการในการวาดและมองภาพ
15. มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

สาระการเรียนรู้

นอกจากอัตราส่วนตรีโกณมิติไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ที่ได้กล่าวไปแล้วยังมีอัตราส่วนตรีโกณมิติอีก 3 อัตราส่วนดังนี้

1. โคซีแคนต์ของมุม A แทนด้วย cosecant A หรือเขียนย่อว่า cosec A หรือ csc A คือ ส่วนกลับของ $\sin A$ เมื่อ $\sin A \neq 0$ นั่นคือ $\text{cosec } A = \frac{1}{\sin A}$, $\sin A \neq 0$
2. ซีแคนต์ของมุม A แทนด้วย secant A หรือเขียนย่อว่า sec A คือ ส่วนกลับของ $\cos A$ เมื่อ $\cos A \neq 0$ นั่นคือ $\text{sec } A = \frac{1}{\cos A}$, $\cos A \neq 0$
3. โคแทนเจนต์ของมุม A แทนด้วย cotangent A หรือเขียนย่อว่า cot A คือ ส่วนกลับของ $\tan A$ เมื่อ $\tan A \neq 0$ นั่นคือ $\text{cot } A = \frac{1}{\tan A}$, $\tan A \neq 0$



จากรูป

$$\sec A = \frac{c}{b}$$

$$\text{cosec } A = \frac{c}{a}$$

$$\cot A = \frac{b}{a}$$

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

ขั้นที่ 1 ขั้นตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียน

1. ครูทำการตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียนเรื่องการหาค่าไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ โดยครูวาดรูปบนกระดานดำแล้วให้นักเรียนช่วยกันหา

ขั้นที่ 2 ขั้นระบุมโนทศน์พื้นฐานที่นักเรียนขาด

2. ถ้านักเรียนยังไม่สามารถหาค่าไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ครูกำหนดให้ ครูต้องระบุมโนทศน์ที่นักเรียนยังขาดออกมาเป็นข้อ ๆ

ขั้นที่ 3 ขั้นเสริมมโนทศน์พื้นฐานให้นักเรียน

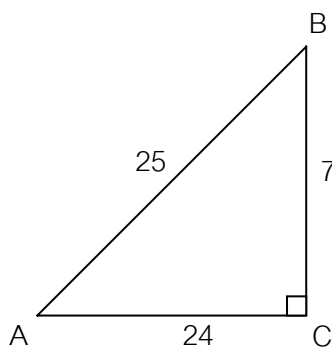
3. ครูทบทวนโดยให้นักเรียนดูกรอบมโนทศน์ที่ 4 บทนิยามของไซน์ โคไซน์และแทนเจนต์

ขั้นสอน

ขั้นที่ 4 ขั้นเรียนรู้

ครูสอนให้นักเรียนเข้าใจมโนทศน์โดยมีขั้นตอนดังนี้

4. ครูวาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากบนกระดานดำ ดังนี้



จากรูปบนกระดานดำครูให้นักเรียนหา $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\sin A = \frac{7}{25}, \quad \cos A = \frac{24}{25} \quad \text{และ} \quad \tan A = \frac{7}{24}$$

5. ครูให้นักเรียนหาส่วนกลับของ $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$ จากคำตอบที่นักเรียนหาได้ ซึ่งจะได้ว่า $\frac{1}{\sin A} = \frac{25}{7}$, $\frac{1}{\cos A} = \frac{25}{24}$ และ $\frac{1}{\tan A} = \frac{24}{7}$

6. ครูอธิบายว่า

$$1) \text{ ส่วนกลับของ } \sin A = \frac{1}{\sin A} = \frac{25}{7} \text{ เรียกว่า โคซีแคนต์ (cosecant) ของ}$$

มุม A เขียนแทนด้วย $\operatorname{cosec} A$ หรือ $\operatorname{csc} A$

$$2) \text{ ส่วนกลับของ } \cos A = \frac{1}{\cos A} = \frac{25}{24} \text{ เรียกว่า ซีแคนต์ (secant) ของมุม}$$

A เขียนแทนด้วย $\operatorname{sec} A$

$$3) \text{ ส่วนกลับของ } \tan A = \frac{1}{\tan A} = \frac{24}{7} \text{ เรียกว่า โคแทนเจนต์ (cotangent)}$$

ของมุม A เขียนแทนด้วย $\cot A$

7. ครุณาเสนอตัวอย่างบนกระดานดำ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\operatorname{cosec} 30^\circ$, $\sec 30^\circ$ และ $\cot 30^\circ$

วิธีทำ 1) เนื่องจาก $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
 ดังนั้น $\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{1}{\frac{1}{2}}$
 $= 2$

2) เนื่องจาก $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 ดังนั้น $\sec 30^\circ = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$
 $= \frac{2}{\sqrt{3}}$

3) เนื่องจาก $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$
 ดังนั้น $\cot 30^\circ = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$
 $= \frac{3}{\sqrt{3}}$

8. ครูแจกใบกิจกรรม 8-A ให้นักเรียนทำข้อ 1) เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้วครูสุ่มให้นักเรียนตอบ

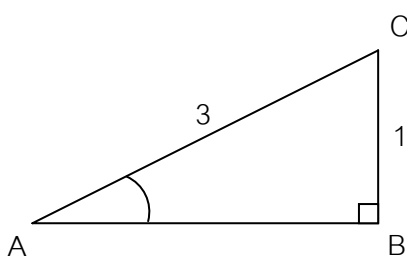
9. ครุณาเสนอตัวอย่างบนกระดานดำ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่ $\hat{A} B C$ เป็นมุมฉาก และ

$$\sin A = \frac{1}{3} \text{ จงหา } \operatorname{cosec} A, \sec A \text{ และ } \cot A$$

วิธีทำ

จากที่โจทย์กำหนดให้สามารถเขียนรูปได้ดังนี้



พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

โดยใช้ทฤษฎีบทของพีทาโกรัสดังนี้

$$\text{จาก } AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\text{จะได้ } 3^2 = AB^2 + 1^2$$

$$AB^2 = 9 - 1$$

$$AB^2 = 8$$

$$AB = \sqrt{8}$$

$$AB = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \operatorname{cosec} A &= \frac{AC}{BC} \\ &= \frac{3}{1} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sec A &= \frac{AC}{AB} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } \cot A &= \frac{AB}{BC} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{1} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{นั่นคือ } \operatorname{cosec} A = 3, \sec A = \frac{3}{2\sqrt{2}} \text{ และ } \cot A = 2\sqrt{2}$$

ตัวอย่างที่ 3 จากตารางอัตราส่วนตรีโกณมิติจงหา $\sec 71^\circ$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sec 71^\circ = \frac{1}{\cos 71^\circ}$
จากตารางตรีโกณมิติ $\cos 71^\circ \approx 0.326$

จะได้ $\sec 71^\circ \approx \frac{1}{0.326}$
 ≈ 3.067

ดังนั้น $\sec 71^\circ \approx 3.067$

10. ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรมข้อที่เหลือทั้งหมด เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้วครูสุ่มให้

นักเรียนตอบ

ขั้นสรุป

ขั้นที่ 5 ขั้นสรุปด้วยกรอบมโนทัศน์

11. ครูให้นักเรียนช่วยกันระดมมโนทัศน์ที่สำคัญจากเนื้อหาเกี่ยวกับส่วนกลับของอัตราส่วนตรีโกณมิติไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ โดยเรียงลำดับมโนทัศน์จากมโนทัศน์ที่กว้างไปสู่มโนทัศน์ที่แคบและร่วมกันอภิปราย เมื่อได้ข้อสรุปแล้วครูเขียนลงบนกระดานดำ แล้วอธิบายโดยสรุป

12. ครูให้นักเรียนแต่ละคนเขียนกรอบมโนทัศน์ที่ได้เรียนลงในกระดาษที่ครูแจกให้

ขั้นที่ 6 ขั้นการประเมินผล

13. ครูให้นักเรียนนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่นักเรียนสร้างขึ้นประมาณ 3–5 คน แล้วครูและนักเรียนช่วยกันวิจารณ์

14. ครูแจกเอกสารสรุปมโนทัศน์ให้นักเรียนแต่ละคนสรุปมโนทัศน์ที่เรียนในชั่วโมงนี้

15. ครูนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่ 11 ที่เตรียมมาให้ให้นักเรียนดู แล้วครูและนักเรียนช่วยกันสรุปมโนทัศน์ที่เรียนอีกครั้งหนึ่ง

16. ครูแจกใบงาน 8 ให้นักเรียนแต่ละคนทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนรู้

1. กรอบมโนทัศน์ที่ 4 บทนิยามของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์
2. กรอบมโนทัศน์ที่ 11 ส่วนกลับของอัตราส่วนตรีโกณมิติไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์
3. ใบกิจกรรม 8-A ส่วนกลับของอัตราส่วนตรีโกณมิติไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์
4. ใบงาน 8 ส่วนกลับของอัตราส่วนตรีโกณมิติไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์

5. ตารางแสดงค่าโดยประมาณของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°
6. เอกสารสรุปมโนทัศน์

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. สังเกตจากการถาม – ตอบ และ การร่วมอภิปรายในชั้นเรียน	1. นักเรียนส่วนมากถาม – ตอบ และ ร่วมอภิปรายในชั้นเรียน
2. ตรวจจากการเขียนกรอบมโนทัศน์ และการนำเสนองานของนักเรียน	2. การเขียนกรอบมโนทัศน์ของนักเรียน ส่วนมากนั้นเขียนได้ถูกต้อง
3. ตรวจจากเอกสารสรุปมโนทัศน์ที่นักเรียน สร้างขึ้น	3. นักเรียนส่วนมากสรุปมโนทัศน์ที่เรียนได้ ถูกต้อง
4. ตรวจจากใบกิจกรรม 8 – A และ ใบงาน 8 ของนักเรียน	4. โดยเฉลี่ยนักเรียนทำใบกิจกรรมและใบงาน ได้ถูกต้องร้อยละ 80

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

ผลการจัดการเรียนรู้.....

.....

.....

ปัญหาอุปสรรค.....

.....

.....

ข้อเสนอแนะ.....

.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ (9)

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ชื่อหน่วยการเรียนรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ชื่อหน่วยย่อยการเรียนรู้ การแก้ปัญหที่เกี่ยวกับการหาความยาว จำนวน 1 ชั่วโมง

ของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ : นักเรียนสามารถ

1. หาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติได้
2. แก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ : นักเรียนมีความสามารถ

3. ในการสร้างความคิดรวบยอด
4. ในการแก้ปัญหา
5. ในการปฏิบัติ
6. ในการคิดคำนวณ
7. สื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอ
8. เชื่อมโยงความรู้ที่เรียนกับเนื้อหาที่เกี่ยวข้องได้

ด้านคุณลักษณะ : ปลูกฝังให้นักเรียน

9. มีความรับผิดชอบ
10. มีความรอบคอบ
11. ทำงานอย่างเป็นระบบ
12. เป็นคนช่างสังเกต
13. มีจินตนาการในการวาดและมองภาพ
14. มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

สาระการเรียนรู้

การแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้ อัตราส่วนตรีโกณมิติ จำเป็นอย่างยิ่งที่ผู้เรียนจะต้องอ่านโจทย์ให้เข้าใจ วิเคราะห์ว่าสิ่งใดที่โจทย์ กำหนดให้และสิ่งใดที่โจทย์ต้องการหา และมีข้อมูลใดเกี่ยวข้อง เมื่อวิเคราะห์ได้แล้วจึงดำเนินการ ดังนี้

1. วาดภาพจำลองให้สอดคล้องกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยเฉพาะกำหนดมุมและจุดต่าง ๆ ให้ถูกต้อง
2. คำนวณหาข้อมูลบางอย่างที่เกี่ยวข้อง (ถ้ามี)
3. คำนวณหาสิ่งที่โจทย์ต้องการ โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ
 - 1) สร้างสมการ

$$\text{อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่โจทย์กำหนด} = \frac{\text{ด้านที่ต้องการหา}}{\text{ด้านที่ทราบค่าแล้ว}}$$
 - 2) แก้สมการ
4. สรุปคำตอบให้ตรงกับที่โจทย์ต้องการ

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

ขั้นที่ 1 ขั้นตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียน

1. ครูทำการตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียนเรื่องการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติ ทั้ง 6 อัตราส่วนโดยหาจากความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยครูแจกใบกิจกรรม 9 – A ให้นักเรียนทำ

ขั้นที่ 2 ขั้นระดมมโนทัศน์พื้นฐานที่นักเรียนขาด

2. เมื่อนักเรียนทำใบกิจกรรมเสร็จแล้วครูเฉลยโดยให้นักเรียนจับคู่แล้วเปลี่ยนกันตรวจ ครูต้องระดมมโนทัศน์ที่นักเรียนยังขาดออกมาเป็นข้อ ๆ

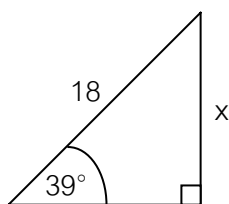
ขั้นที่ 3 ขั้นเสริมมโนทัศน์พื้นฐานให้นักเรียน

3. ครูทบทวนโดยให้นักเรียนดูกรอบมโนทัศน์ที่ 4 บทนิยามของไซน์ โคไซน์ และ แทนเจนต์ และกรอบมโนทัศน์ที่ 11 ส่วนกลับของอัตราส่วนตรีโกณมิติไซน์ โคไซน์ และ แทนเจนต์

ชั้นสอน**ชั้นที่ 4 ชั้นเรียนรัฐ**

ครูสอนให้นักเรียนเข้าใจมโนทัศน์โดยมีขั้นตอนดังนี้

4. ครูอธิบายว่า ในการนำความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ ผู้เรียนจะต้องมีทักษะในการหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติเสียก่อน แล้วครูวาดรูปบนกระดานดังนี้



5. ครูให้นักเรียนหาค่า x จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ครูวาดบนกระดานดำ โดยครูแนะนำแนวทางการหาค่า x ดังนี้

- 1) พิจารณาด้านที่ต้องการหาเป็นด้านอะไรและด้านที่ทราบค่าแล้วเป็นด้านอะไร
- 2) เขียนอัตราส่วนของด้านที่ต้องการหาต่อด้านที่ทราบค่าแล้ว
- 3) จากอัตราส่วนในข้อ 2) ให้นักเรียนพิจารณาว่าจะใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติใด
- 4) สร้างสมการ

$$\text{อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่โจทย์กำหนด} = \frac{\text{ด้านที่ต้องการหา}}{\text{ด้านที่ทราบค่าแล้ว}}$$

- 5) แก้สมการ
- 6) ตรวจสอบคำตอบแล้วสรุปคำตอบให้ตรงกับที่โจทย์ต้องการ ซึ่งจะแสดงวิธีทำได้ดังนี้

วิธีทำ

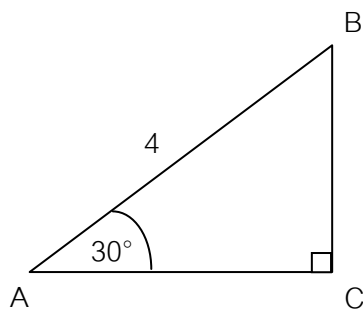
$$\begin{aligned} \text{จากรูปจะได้ว่า } \sin 39^\circ &= \frac{x}{18} \\ x &= 18 (\sin 39^\circ) \\ &= 18 (0.629) \\ &= 11.322 \end{aligned}$$

ดังนั้น x เท่ากับ 11.322

6. ครูแจกใบกิจกรรม 9 – B ให้นักเรียนทำข้อ 1) เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้วให้ส่งตัวแทนมาแสดงวิธีทำบนกระดานดำ

7. ครุณาเสนอตัวอย่างบนกระดานดำ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยมีมุม C เป็นมุมฉาก มุม A มีขนาด 30° และ AB ยาว 4 หน่วย จงหาขนาดของมุมและความยาวของด้านที่เหลือ



วิธีทำ

จากที่กำหนดให้มุม A มีขนาด 30° และมุม C มีขนาด 90° และผลรวมของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 180°

ดังนั้น มุม B มีขนาด $180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

ต่อไปจะหาความยาวของ \overline{BC} และ \overline{AC}

โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° ดังนี้

$$(1) \sin 30^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$BC = AB (\sin 30^\circ)$$

$$= 4 \times \frac{1}{2}$$

$$= 2$$

ดังนั้น BC ยาว 2 หน่วย

$$(2) \cos 30^\circ = \frac{AC}{AB}$$

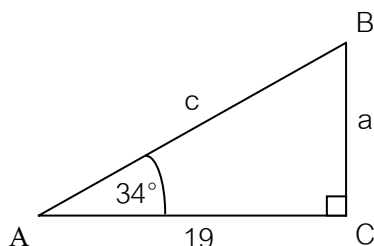
$$AC = AB (\cos 30^\circ)$$

$$= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

ดังนั้น AC ยาว $2\sqrt{3}$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ a และ c จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ต่อไปนี้



วิธีทำ จากรูป $\tan 34^\circ = \frac{a}{19}$
 จะได้ $a = 19 \tan 34^\circ$
 จากตาราง $\tan 34^\circ \approx 0.675$
 ดังนั้น $a \approx 19(0.675)$
 ≈ 12.825

จากรูป $\sin 34^\circ = \frac{a}{c}$
 จะได้ $c = \frac{a}{\sin 34^\circ}$
 จากตาราง $\sin 34^\circ \approx 0.559$
 ดังนั้น $c \approx \frac{12.825}{0.559}$
 ≈ 22.94

นั่นคือ $a = 12.825$ และ $c = 22.94$

8. ครูให้นักเรียนไปกิจกรรมทำข้อ 2) เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้วให้ส่งตัวแทนมาแสดงวิธี

ทำบนกระดานดำ

ขั้นสรุป

ขั้นที่ 5 ขั้นสรุปด้วยกรอบมโนทัศน์

9. ครูให้นักเรียนช่วยกันระดมมโนทัศน์ที่สำคัญจากเนื้อหาเกี่ยวกับการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยเรียงลำดับมโนทัศน์จากมโนทัศน์ที่กว้างไปสู่มโนทัศน์ที่แคบและร่วมกันอภิปราย เมื่อได้ข้อสรุปแล้วครูเขียนลงบนกระดานดำ แล้วอธิบายโดยสรุป

10. ครูให้นักเรียนแต่ละคนเขียนกรอบมโนทัศน์ที่ได้เรียนลงในกระดาษที่ครูแจกให้

ขั้นที่ 6 ขั้นการประเมินผล

11. ครูให้นักเรียนนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่นักเรียนสร้างขึ้นประมาณ 3–5 คน แล้วครูและนักเรียนช่วยกันวิจารณ์
12. ครูแจกเอกสารสรุปมโนทัศน์ให้นักเรียนแต่ละคนสรุปมโนทัศน์ที่เรียนในชั่วโมงนี้
13. ครูนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่ 12 ที่เตรียมมาให้ให้นักเรียนดู แล้วครูและนักเรียนช่วยกันสรุปมโนทัศน์ที่เรียนอีกครั้งหนึ่ง
14. ครูแจกใบงาน 9 ให้นักเรียนแต่ละคนทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนรู้

1. กรอบมโนทัศน์ที่ 4 บทนิยามของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์
2. กรอบมโนทัศน์ที่ 11 ส่วนกลับของอัตราส่วนตรีโกณมิติไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์
3. กรอบมโนทัศน์ที่ 12 การแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ
4. ใบกิจกรรม 9–A การหาอัตราส่วนตรีโกณมิติโดยหาจากความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
5. ใบกิจกรรม 9–B การแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ
6. ใบงาน 9 การแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ
7. ตารางแสดงค่าโดยประมาณของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°
8. เอกสารสรุปมโนทัศน์

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. สังเกตจากการถาม – ตอบ และ การร่วมอภิปรายในชั้นเรียน	1. นักเรียนส่วนมากถาม – ตอบ และ ร่วมอภิปรายในชั้นเรียน
2. ตรวจจากการเขียนกรอบมโนทัศน์ และการนำเสนองานของนักเรียน	2. การเขียนกรอบมโนทัศน์ของนักเรียน ส่วนมากนั้นเขียนได้ถูกต้อง
3. ตรวจจากเอกสารสรุปมโนทัศน์ที่นักเรียน สร้างขึ้น	3. นักเรียนส่วนมากสรุปมโนทัศน์ที่เรียนได้ ถูกต้อง
4. ตรวจจากใบกิจกรรม 9 – B และ ใบงาน 9 ของนักเรียน	4. โดยเฉลี่ยนักเรียนทำใบกิจกรรมและใบงาน ได้ถูกต้องร้อยละ 80

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

ผลการจัดการเรียนรู้.....

.....

ปัญหาอุปสรรค.....

.....

ข้อเสนอแนะ.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ (10)

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ชื่อหน่วยการเรียนรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ชื่อหน่วยย่อยการเรียนรู้ การแก้ปัญหที่เกี่ยวกับการหาระยะทาง

จำนวน 1 ชั่วโมง

และความสูงที่มีขนาดของมุมก้มเข้ามา

เกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ : นักเรียนสามารถ

1. บอกความหมายของมุมก้มได้
2. วาดภาพจำลองจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้
3. นำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการหาความสูงของสิ่งต่าง ๆ ที่มีขนาดของมุมก้มเข้ามาเกี่ยวข้องได้
4. นำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการหาระยะทางที่มีขนาดของมุมก้มเข้ามาเกี่ยวข้องได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ : นักเรียนมีความสามารถ

5. ในการสร้างความคิดรวบยอด
6. ในการแก้ปัญหา
7. ในการปฏิบัติ
8. ในการคิดคำนวณ
9. สื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอ
10. เชื่อมโยงความรู้ที่เรียนกับเนื้อหาที่เกี่ยวข้องได้

ด้านคุณลักษณะ : ปลูกฝังให้นักเรียน

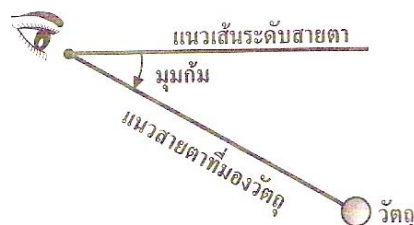
11. มีความรับผิดชอบ
12. มีความรอบคอบ
13. ทำงานอย่างเป็นระบบ
14. เป็นคนช่างสังเกต
15. มีจินตนาการในการวาดและมองภาพ

16. มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

สาระการเรียนรู้

ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาระยะทางและความสูง ซึ่งบางครั้งใช้เครื่องมือวัดโดยตรงไม่ได้ เช่น การวัดความสูงของภูเขา การหาความกว้างของแม่น้ำ ฯลฯ สามารถทำได้โดยอาศัยความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ซึ่งจะมีขนาดของมุมก้มเข้ามาเกี่ยวข้องและมุมก้มมีความหมายดังนี้

มุมก้ม (angle of depression) เป็นมุมที่เกิดจากแนวเส้นระดับสายตาและแนวสายตาที่มองวัตถุ เมื่อวัตถุอยู่ใต้เส้นระดับสายตา



การแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาระยะทางและความสูงโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ จำเป็นอย่างยิ่งที่ผู้เรียนจะต้องอ่านโจทย์ให้เข้าใจ วิเคราะห์ว่าสิ่งใดที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งใดที่โจทย์ต้องการหา และมีข้อมูลใดเกี่ยวข้อง เมื่อวิเคราะห์ได้แล้วจึงดำเนินการดังนี้

1. วาดภาพจำลองให้สอดคล้องกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยเฉพาะกำหนดมุมและจุดต่าง ๆ ให้ถูกต้อง

2. คำนวณหาข้อมูลบางอย่างที่เกี่ยวข้อง (ถ้ามี)
3. คำนวณหาสิ่งที่โจทย์ต้องการ โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ

1) สร้างสมการ

$$\text{อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่โจทย์กำหนด} = \frac{\text{ด้านที่ต้องการหา}}{\text{ด้านที่ทราบค่าแล้ว}}$$

2) แก้สมการ

4. สรุปคำตอบให้ตรงกับที่โจทย์ต้องการ

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

ขั้นที่ 1 ขั้นตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียน

1. ครูทำการตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียนเรื่องการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยครูตั้งโจทย์ปัญหาแล้วให้นักเรียนช่วยกันหาคำตอบ

ขั้นที่ 2 ขั้นระดมมโนทัศน์พื้นฐานที่นักเรียนขาด

2. ถ้านักเรียนยังไม่สามารถแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ ครูต้องระดมมโนทัศน์ที่นักเรียนยังขาดออกมาเป็นข้อ ๆ

ขั้นที่ 3 ขั้นเสริมมโนทัศน์พื้นฐานให้นักเรียน

3. ครูทบทวนโดยให้นักเรียนดูกรอบมโนทัศน์ที่ 12 การแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ขั้นสอน

ขั้นที่ 4 ขั้นเรียนรู้

ครูสอนให้นักเรียนเข้าใจมโนทัศน์โดยมีขั้นตอนดังนี้

4. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายว่า ถ้านักเรียนต้องการวัดระยะทางและความสูงของสิ่งต่าง ๆ เช่น ความสูงของภูเขา ความกว้างของแม่น้ำ ฯลฯ นักเรียนจะมีวิธีการวัดอย่างไร จนได้ข้อสรุปว่า ในการวัดระยะทางและความสูงที่เราใช้เครื่องมือวัดโดยตรงไม่ได้ เราสามารถนำความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการวัดได้

5. ครูอธิบายว่า การแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาระยะทางและความสูงจะมีขนาดของมุมก้มเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย

6. ครูอธิบายความหมายของเส้นระดับสายตาและมุมก้ม ดังนี้

1) ครูให้นักเรียนมองตรงไปข้างหน้าในระดับสายตา แล้วครูอธิบายว่า เส้นตรงนี้เรียกว่า เส้นระดับสายตา ซึ่งเส้นระดับสายตาจะต้องขนานกับพื้นโลก

2) ครูให้นักเรียนมองมุมตรงพื้น แล้วครูอธิบายว่า มุมที่นักเรียนมอง เรียกว่า มุมก้ม

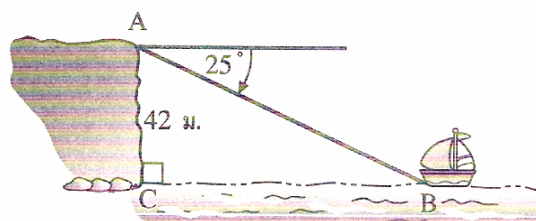
7. ครูและนักเรียนช่วยกันอภิปรายเกี่ยวกับมุมก้ม จนนักเรียนสามารถได้ว่า มุมก้ม คือ เป็นมุมที่เกิดจากแนวเส้นระดับสายตาและแนวสายตาที่มองวัตถุ เมื่อวัตถุอยู่ใต้เส้นระดับสายตา

8. ครุณาเสนอตัวอย่างบนกระดานดำ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จากจุดบนยอดหน้าผาซึ่งตั้งตรงในแนวตั้ง ถ้ามองไปที่เรือลำหนึ่งซึ่งลอยลำอยู่ในทะเล พบว่าแนวที่มองเรือเป็นมุมก้ม 25° ถ้าน้ำผาสูง 42 เมตร จากระดับน้ำทะเล จงหาระยะห่างระหว่างเรือกับหน้าผา

วิธีทำ

1) วาดภาพจำลอง กำหนดมุมและจุดต่าง ๆ



จากรูปกำหนดให้

A แทนตำแหน่งจุดมองบนยอดหน้าผา

B แทนตำแหน่งของเรือ

C แทนตำแหน่งหน้าผาที่ระดับน้ำทะเล

2) หาระยะห่างระหว่างเรือกับหน้าผา (BC) โดยกำหนดอัตราส่วนตรีโกณมิติที่เกี่ยวข้องกับความสูงของหอคอย

$$\text{จะได้ } \tan 25^\circ = \frac{BC}{42}$$

จากตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้ว่า $\tan 25^\circ \approx 0.466$

$$\text{ดังนั้น } 0.532 \approx \frac{BC}{42}$$

$$BC \approx 42 \times 0.466$$

$$\approx 19.572$$

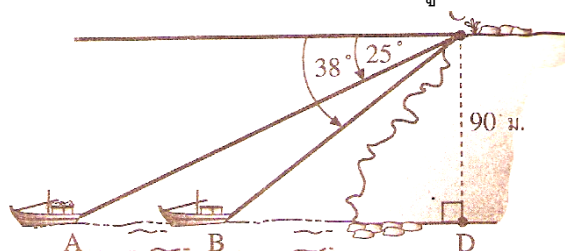
3) สรุปคำตอบ

ดังนั้น ระยะทางระหว่างเรือกับหน้าผาห่างกันประมาณ 19.57 เมตร

ตัวอย่างที่ 2 จากจุดยอดบนหน้าผาแห่งหนึ่งซึ่งสูง 90 เมตร จากระดับน้ำทะเล ถ้ามองไปที่เรือสองลำที่จอดอยู่ในทะเลในแนวเส้นตรงเดียวกันพบว่าต้องมองเป็นมุมก้ม 25° และ 38° ตามลำดับ จงหาระยะห่างระหว่างเรือทั้งสองลำ (ตอบค่าประมาณเป็นจำนวนเต็ม)

วิธีทำ

จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เขียนเป็นรูปได้ดังนี้



จากรูปพิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ACD และ BCD
จะพบว่า $\hat{C}AD = 25^\circ$, $\hat{C}BD = 38^\circ$ และ $CD = 90$ เมตร

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ACD จะได้ว่า

$$\tan 25^\circ = \frac{CD}{AD}$$

จากตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้ว่า $\tan 25^\circ \approx 0.466$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad 0.466 &\approx \frac{90}{AD} \\ AD &\approx \frac{90}{0.466} \\ &\approx 193.133 \end{aligned}$$

นั่นคือ AD เท่ากับ 193 เมตร

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก BCD จะได้ว่า

$$\tan 38^\circ = \frac{CD}{BD}$$

จากตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้ว่า $\tan 38^\circ \approx 0.781$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad 0.781 &\approx \frac{90}{BD} \\ BD &\approx \frac{90}{0.781} \\ &\approx 115.237 \end{aligned}$$

นั่นคือ BD เท่ากับ 115 เมตร

ดังนั้น $AB = AD - BD \approx 193 - 115 = 78$ เมตร

นั่นคือ ระยะห่างระหว่างเรือทั้งสองประมาณ 78 เมตร

9. ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรมข้อ 4) เมื่อทำเสร็จแล้วครูสุ่มให้นักเรียนออกมาแสดงวิธี

ทำบนกระดานดำ

ขั้นสรุป

ขั้นที่ 5 ขั้นสรุปด้วยกรอบมโนทัศน์

10. ครูให้นักเรียนช่วยกันระดมมโนทัศน์ที่สำคัญจากเนื้อหาเกี่ยวกับการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาระยะทางและความสูงที่มีขนาดของมุมก้มเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วน - ตรีโกณมิติ โดยเรียงลำดับมโนทัศน์จากมโนทัศน์ที่กว้างไปสู่มโนทัศน์ที่แคบและร่วมกันอภิปราย เมื่อได้ข้อสรุปแล้วครูเขียนลงบนกระดานดำและอธิบายโดยสรุป

11. ครูให้นักเรียนแต่ละคนเขียนกรอบมโนทัศน์ที่ได้เรียนลงในกระดาษที่ครูแจกให้
ขั้นที่ 6 ขั้นการประเมินผล
12. ครูให้นักเรียนนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่นักเรียนสร้างขึ้นประมาณ 3–5 คน แล้ว
ครูและนักเรียนช่วยกันวิจารณ์
13. ครูแจกเอกสารสรุปมโนทัศน์ให้นักเรียนแต่ละคนสรุปมโนทัศน์ที่เรียนในช่วงนี้
14. ครูนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่ 13 ที่เตรียมมาให้ให้นักเรียนดู แล้วครูและนักเรียน
ช่วยกันสรุปมโนทัศน์ที่เรียนอีกครั้งหนึ่ง
15. ครูแจกใบงาน 10 ให้นักเรียนแต่ละคนทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนรู้

1. กรอบมโนทัศน์ที่ 12 การแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาความยาวของด้านของ
รูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ
2. กรอบมโนทัศน์ที่ 13 การแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาระยะทางและความสูงที่มีขนาด
ของมุมก้มและมุมเงยเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ
3. ใบกิจกรรม 10 – A การแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาระยะทางและความสูงที่มีขนาด
ของมุมก้มเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ
4. ใบงาน 10 การแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาระยะทางและความสูงที่มีขนาดของ
มุมก้มเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ
5. ตารางแสดงค่าโดยประมาณของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง
 0° และ 90°
6. เอกสารสรุปมโนทัศน์

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. สังเกตจากการถาม – ตอบ และ การร่วมอภิปรายในชั้นเรียน	1. นักเรียนส่วนมากถาม – ตอบ และ ร่วมอภิปรายในชั้นเรียน
2. ตรวจจากการเขียนกรอบมโนทัศน์ และการนำเสนองานของนักเรียน	2. การเขียนกรอบมโนทัศน์ของนักเรียน ส่วนมากนั้นเขียนได้ถูกต้อง
3. ตรวจจากเอกสารสรุปมโนทัศน์ที่นักเรียน สร้างขึ้น	3. นักเรียนส่วนมากสรุปมโนทัศน์ที่เรียนได้ ถูกต้อง
4. ตรวจจากใบกิจกรรม 10 – A และ ใบงาน 10 ของนักเรียน	4. โดยเฉลี่ยนักเรียนทำใบกิจกรรมและใบงาน ได้ถูกต้องร้อยละ 70

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

ผลการจัดการเรียนรู้.....

.....

ปัญหาอุปสรรค.....

.....

ข้อเสนอแนะ.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ (11)

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ชื่อหน่วยการเรียนรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ชื่อหน่วยย่อยการเรียนรู้ การแก้ปัญหที่เกี่ยวกับการหาระยะทาง และความสูงที่มีขนาดของมุมเงยเข้ามา เกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ จำนวน 1 ชั่วโมง

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ : นักเรียนสามารถ

1. บอกความหมายของมุมเงยได้
2. วาดภาพจำลองจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้
3. นำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการหาความสูงของสิ่งต่าง ๆ ที่มีขนาดของมุมเงยเข้ามาเกี่ยวข้องได้
4. นำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการหาระยะทางที่มีขนาดของมุมเงยเข้ามาเกี่ยวข้องได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ : นักเรียนมีความสามารถ

5. ในการสร้างความคิดรวบยอด
6. ในการแก้ปัญหา
7. ในการปฏิบัติ
8. ในการคิดคำนวณ
9. สื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอ
10. เชื่อมโยงความรู้ที่เรียนกับเนื้อหาที่เกี่ยวข้องได้

ด้านคุณลักษณะ : ปลูกฝังให้นักเรียน

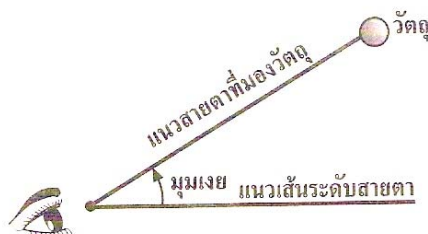
11. มีความรับผิดชอบ
12. มีความรอบคอบ
13. ทำงานอย่างเป็นระบบ
14. เป็นคนช่างสังเกต
15. มีจินตนาการในการวาดและมองภาพ

16. มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

สาระการเรียนรู้

ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาระยะทางและความสูง ซึ่งบางครั้งใช้เครื่องมือวัดโดยตรงไม่ได้ เช่น การวัดความสูงของภูเขา การหาความกว้างของแม่น้ำ ฯลฯ สามารถทำได้โดยอาศัยความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ซึ่งจะมีขนาดของมุมเงยเข้ามาเกี่ยวข้องและมุมเงยมีความหมายดังนี้

มุมเงย (angel of elevation) เป็นมุมที่เกิดจากแนวเส้นระดับสายตาและแนวสายตาที่มองวัตถุ เมื่อวัตถุอยู่บนแนวเส้นระดับสายตา



การแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาระยะทางและความสูงโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ จำเป็นอย่างยิ่งที่ผู้เรียนจะต้องอ่านโจทย์ให้เข้าใจ วิเคราะห์ว่าสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการหา และมีข้อมูลใดเกี่ยวข้อง เมื่อวิเคราะห์ได้แล้วจึงดำเนินการดังนี้

1. วาดภาพจำลองให้สอดคล้องกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยเฉพาะกำหนดมุมและจุดต่าง ๆ ให้ถูกต้อง

2. คำนวณหาข้อมูลบางอย่างที่เกี่ยวข้อง (ถ้ามี)

3. คำนวณหาสิ่งที่โจทย์ต้องการ โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ

1) สร้างสมการ

$$\text{อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่โจทย์กำหนด} = \frac{\text{ด้านที่ต้องการหา}}{\text{ด้านที่ทราบค่าแล้ว}}$$

2) แก้สมการ

4. สรุปคำตอบให้ตรงกับที่โจทย์ต้องการ

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

ขั้นที่ 1 ขั้นตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียน

1. ครูทำการตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียนเรื่องการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยครูตั้งโจทย์ปัญหาแล้วให้นักเรียนช่วยกันหาคำตอบ

ขั้นที่ 2 ขั้นระดมมโนทัศน์พื้นฐานที่นักเรียนขาด

2. ถ้านักเรียนยังไม่สามารถแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ ครูต้องระดมมโนทัศน์ที่นักเรียนยังขาดออกมาเป็นข้อ ๆ

ขั้นที่ 3 ขั้นเสริมมโนทัศน์พื้นฐานให้นักเรียน

3. ครูทบทวนโดยให้นักเรียนดูกรอบมโนทัศน์ที่ 12 การแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ขั้นสอน

ขั้นที่ 4 ขั้นเรียนรู้

ครูสอนให้นักเรียนเข้าใจมโนทัศน์โดยมีขั้นตอนดังนี้

4. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายว่า ถ้านักเรียนต้องการวัดระยะทางและความสูงของสิ่งต่าง ๆ เช่น ความสูงของภูเขา ความกว้างของแม่น้ำ ฯลฯ นักเรียนจะมีวิธีการวัดอย่างไร จนได้ข้อสรุปว่า ในการวัดระยะทางและความสูงที่เราใช้เครื่องมือวัดโดยตรงไม่ได้ เราสามารถนำความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการวัดได้

5. ครูอธิบายว่า การแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาระยะทางและความสูงจะมีขนาดของมุมเงยเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย

6. ครูอธิบายความหมายของเส้นระดับสายตาและมุมเงย ดังนี้

1) ครูให้นักเรียนมองตรงไปข้างหน้าในระดับสายตา แล้วครูอธิบายว่า เส้นตรงนี้เรียกว่า เส้นระดับสายตา ซึ่งเส้นระดับสายตาจะต้องขนานกับพื้นโลก

2) ครูให้นักเรียนมองมุมตรงเพดาน แล้วครูอธิบายว่า มุมที่นักเรียนมอง เรียกว่ามุมเงย

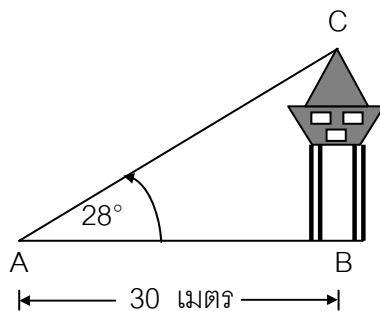
7. ครูและนักเรียนช่วยกันอภิปรายเกี่ยวกับมุมเงย จนนักเรียนสามารถได้ว่า มุมเงยเป็นมุมที่เกิดจากแนวเส้นระดับสายตาและแนวสายตาที่มองวัตถุ เมื่อวัตถุอยู่เหนือเส้นระดับสายตา

8. ครุณาเสนอตัวอย่างบนกระดานดำ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 ถ้ามองจากจุดจุดหนึ่งบนพื้นดินไปยังยอดหอคอยแห่งหนึ่ง พบว่า แนวสายตาทำมุมเงย 28° และจุดที่มองอยู่ห่างจากหอคอย 30 เมตร จงหาความสูงของหอคอยแห่งนี้ (ตอบค่าประมาณเป็นจำนวนเต็ม)

วิธีทำ

1) วาดภาพจำลอง กำหนดมุมและจุดต่าง ๆ



จากรูปกำหนดให้

BC แทนความสูงของหอคอย

AB แทนระยะห่างของจุดที่มองกับหอคอย

และ A แทนจุดที่มองหอคอย

2) หาความสูงของหอคอย (BC) โดยกำหนดอัตราส่วนตรีโกณมิติที่

เกี่ยวข้องกับความสูงของหอคอย

$$\text{จะได้ } \tan 28^\circ = \frac{BC}{AB}$$

จากตารางค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้ว่า $\tan 28^\circ \approx 0.532$

$$\text{ดังนั้น } 0.532 \approx \frac{BC}{30}$$

$$BC \approx 30 \times 0.532$$

$$\approx 15.96$$

3) สรุปคำตอบ

ดังนั้น หอคอยสูงประมาณ 16 เมตร

9. ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรมข้อ 4) เมื่อทำเสร็จแล้วครูสุ่มให้นักเรียนออกมาแสดงวิธี

ทำบนกระดานดำ

ขั้นสรุป

ขั้นที่ 5 ขั้นสรุปด้วยกรอบมโนทัศน์

10. ครูให้นักเรียนช่วยกันระดมมโนทัศน์ที่สำคัญจากเนื้อหาเกี่ยวกับการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาระยะทางและความสูงที่มีขนาดของมุมเงยเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วน – ตรีโกณมิติ โดยเรียงลำดับมโนทัศน์จากมโนทัศน์ที่กว้างไปสู่มโนทัศน์ที่แคบและร่วมกันอภิปราย

เมื่อได้ข้อสรุปแล้วครูเขียนลงบนกระดานดำ แล้วอธิบายโดยสรุป

11. ครูให้นักเรียนแต่ละคนเขียนกรอบมโนทัศน์ที่ได้เรียนลงในกระดาษที่ครูแจกให้
ขั้นที่ 6 ขั้นการประเมินผล
12. ครูให้นักเรียนนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่นักเรียนสร้างขึ้นประมาณ 3–5 คน แล้วครูและนักเรียนช่วยกันวิจารณ์
13. ครูแจกเอกสารสรุปมโนทัศน์ให้นักเรียนแต่ละคนสรุปมโนทัศน์ที่เรียนในช่วงนี้
14. ครูนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่ 13 ที่เตรียมมาให้ให้นักเรียนดู แล้วครูและนักเรียนช่วยกันสรุปมโนทัศน์ที่เรียนอีกครั้งหนึ่ง
15. ครูแจกใบงาน 11 ให้นักเรียนแต่ละคนทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนรู้

1. กรอบมโนทัศน์ที่ 12 การแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ
2. กรอบมโนทัศน์ที่ 13 การแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาระยะทางและความสูงที่มีขนาดของมุมก้มและมุมเงยเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ
3. ใบกิจกรรม 11 – A การแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาระยะทางและความสูงที่มีขนาดของมุมเงยเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ
4. ใบงาน 11 การแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาระยะทางและความสูงที่มีขนาดของมุมเงยเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ
5. ตารางแสดงค่าโดยประมาณของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°
6. เอกสารสรุปมโนทัศน์

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. สังเกตจากการถาม – ตอบ และ การร่วมอภิปรายในชั้นเรียน	1. นักเรียนส่วนมากถาม – ตอบ และ ร่วมอภิปรายในชั้นเรียน
2. ตรวจจากการเขียนกรอบมโนทัศน์ และการนำเสนองานของนักเรียน	2. การเขียนกรอบมโนทัศน์ของนักเรียน ส่วนมากนั้นเขียนได้ถูกต้อง
3. ตรวจจากเอกสารสรุปมโนทัศน์ที่นักเรียน สร้างขึ้น	3. นักเรียนส่วนมากสรุปมโนทัศน์ที่เรียนได้ ถูกต้อง
4. ตรวจจากใบกิจกรรม 11 – A และ ใบงาน 11 ของนักเรียน	4. โดยเฉลี่ยนักเรียนทำใบกิจกรรมและใบงาน ได้ถูกต้องร้อยละ 70

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

ผลการจัดการเรียนรู้.....

.....

ปัญหาอุปสรรค.....

.....

ข้อเสนอแนะ.....

.....

แผนการจัดการเรียนรู้แบบจัดกรอบมโนทัศน์ (12)

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ชื่อหน่วยการเรียนรู้ อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ชื่อหน่วยย่อยการเรียนรู้ การแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาความสูงจำนวน 1 ชั่วโมง

ของวัตถุที่มีความสูงของระดับสายตา

เข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ : นักเรียนสามารถ

1. วาดภาพจำลองจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ได้
2. คำนวณหาความสูงของวัตถุที่มีความสูงของระดับสายตาเข้ามาเกี่ยวข้อง

โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ : นักเรียนมีความสามารถ

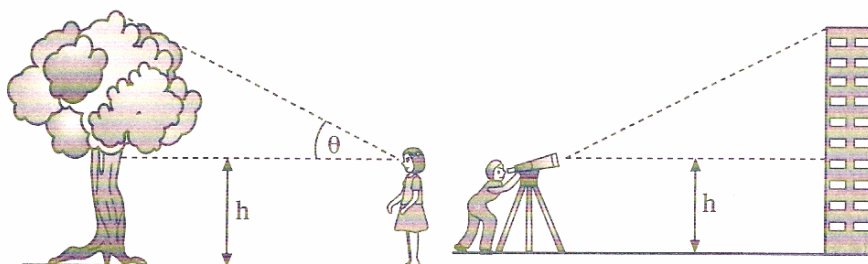
3. ในการสร้างความคิดรวบยอด
4. ในการปฏิบัติ
5. ในการแก้ปัญหา
6. ในการคิดคำนวณ
7. สื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอ
8. เชื่อมโยงความรู้ที่เรียนกับเนื้อหาที่เกี่ยวข้องได้

ด้านคุณลักษณะ : ปลูกฝังให้นักเรียน

9. มีความรับผิดชอบ
10. มีความรอบคอบ
11. ทำงานอย่างเป็นระบบ
12. เป็นคนช่างสังเกต
13. มีจินตนาการในการวาดและมองภาพ
14. มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

สาระการเรียนรู้

ในโจทย์ปัญหาบางข้อ ความสูงของระดับสายตาเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย เช่น ความสูงของคน ความสูงของขาตั้งกล้อง ฯลฯ ดังรูป h แทนความสูงของระดับสายตา การคำนวณหาความสูงของวัตถุที่มองจะต้องนำค่า h เข้ามาเกี่ยวข้องด้วย



การแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาความสูงของวัตถุที่มีความสูงของระดับสายตาเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ จำเป็นอย่างยิ่งที่ผู้เรียนจะต้องอ่านโจทย์ให้เข้าใจ วิเคราะห์ว่าสิ่งที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งที่โจทย์ต้องการหา และมีข้อมูลใดเกี่ยวข้อง เมื่อวิเคราะห์ได้แล้วจึงดำเนินการดังนี้

1. วาดภาพจำลองให้สอดคล้องกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยเฉพาะกำหนดมุมและจุดต่าง ๆ ให้ถูกต้อง
2. คำนวณหาข้อมูลบางอย่างที่เกี่ยวข้อง (ถ้ามี)
3. คำนวณหาสิ่งที่โจทย์ต้องการโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ ซึ่งจะต้องนำค่า h เข้ามาเกี่ยวข้องด้วย

1) สร้างสมการ

$$\text{อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่โจทย์กำหนด} = \frac{\text{ด้านที่ต้องการหา}}{\text{ด้านที่ทราบค่าแล้ว}}$$

2) แก้สมการ

4. สรุปคำตอบให้ตรงกับที่โจทย์ต้องการ

กระบวนการจัดการเรียนรู้

ขั้นนำ

ขั้นที่ 1 ขั้นตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียน

1. ครูทำการตรวจสอบมโนทัศน์พื้นฐานของนักเรียนเรื่องการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหา ระยะทางและความสูงที่มีขนาดของมุมก้มและมุมเงยเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยครูตั้งโจทย์ปัญหาแล้วให้นักเรียนช่วยกันหาคำตอบ

ขั้นที่ 2 ขั้นระดมมโนทัศน์พื้นฐานที่นักเรียนขาด

2. ถ้านักเรียนยังไม่สามารถแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหา ระยะทางและความสูงที่มีขนาดของ มุมก้มและมุมเงยเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ ครูต้องระดมมโนทัศน์ที่นักเรียนยัง ขาดออกมาเป็นข้อ ๆ

ขั้นที่ 3 ขั้นเสริมมโนทัศน์พื้นฐานให้นักเรียน

3. ครูทบทวนโดยให้นักเรียนดูกรอบมโนทัศน์ที่ 13 การแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหา ระยะทางและความสูงที่มีขนาดของมุมก้มและมุมเงยเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ขั้นสอน

ขั้นที่ 4 ขั้นเรียนรู้

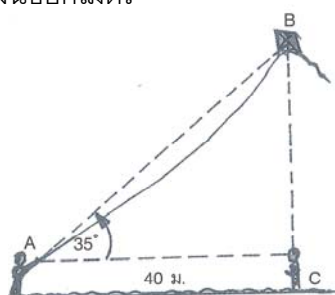
ครูสอนให้นักเรียนเข้าใจมโนทัศน์โดยมีขั้นตอนดังนี้

4. ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายว่า ถ้านักเรียนต้องการหาความสูงของวัตถุต่าง ๆ ที่ จะต้องนำความสูงของระดับสายตาเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย เช่น ความสูงของคน ความสูงของขาตั้ง กล้อง ฯลฯ นักเรียนจะมีวิธีการวัดอย่างไร จนได้ข้อสรุปว่า ในการคำนวณหาความสูงของวัตถุที่ มองจะต้องนำค่าความสูงของระดับสายตาเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย

5. ครูนำเสนอตัวอย่างบนกระดานดำ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 เหน่งและโหน่งเล่นว่่วที่สนามแห่งหนึ่ง ขณะทีว่่วของเหน่งลอยอยู่บนท้องฟ้า ซึ่งตรงกับศีรษะของโหน่งพอดีเหน่งยืนห่างจากโหน่ง 40 เมตร เขาเงยหน้าขึ้นมอง ว่่วเป็นมุม 35° ถ้าโหน่งสูง 1.20 เมตร จงหาว่าว่่วอยู่สูงจากพื้นดินเท่าไรและ ต้องใช้เชือกว่่วอย่างน้อยกี่เมตร

วิธีทำ



$$\text{จากรูป } \tan 35^\circ = \frac{BC}{AC}$$

จากตารางอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้ว่า $\tan 35^\circ \approx 0.7$

$$\text{ดังนั้น } 0.7 \approx \frac{BC}{40}$$

$$\begin{aligned} BC &\approx 40 \times 0.7 \\ &\approx 28 \end{aligned}$$

$$\text{จากรูป } \cos 35^\circ = \frac{AC}{AB}$$

จากตารางอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้ว่า $\cos 35^\circ \approx 0.819$

$$\text{ดังนั้น } 0.819 \approx \frac{40}{AB}$$

$$\begin{aligned} AB &\approx \frac{40}{0.819} \\ &\approx 48.84 \end{aligned}$$

นั่นคือ ว่าวสูงจากพื้นดินประมาณ $28 + 1.20 = 29.20$ เมตร

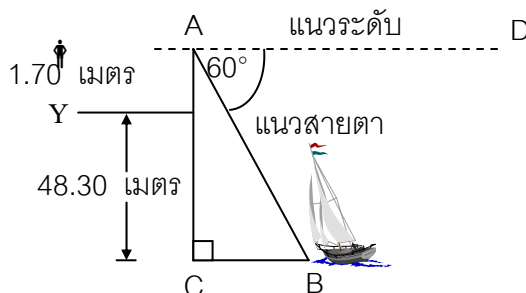
และเชือกว่าวต้องยาวอย่างน้อย 48.84 เมตร

6. ครูแจกใบกิจกรรม 12-Aให้นักเรียนทำข้อ 1) เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้วครูสุ่มให้มาแสดงวิธีทำบนกระดานดำ

7. ครูนำเสนอตัวอย่างบนกระดานดำ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2 นาวินยืนอยู่ตรงหน้าผาแห่งหนึ่งซึ่งอยู่สูงจากระดับน้ำทะเล 48.30 เมตร เมื่อเขามองลงไปยังเรือลำหนึ่งกลางทะเล โดยมุมที่แนวสายตาทำกับแนวระดับเป็นมุมก้มมีขนาด 60° ถ้าความสูงจากพื้นถึงตาของนาวินเท่ากับ 1.70 เมตร อยากรหาว่าเรือลำนี้อยู่ห่างจากเชิงหน้าผาประมาณกี่เมตร

วิธีทำ



จากรูปกำหนดให้

AY เป็นความสูงของพื้นหน้าผาถึงระดับสายตาของนาวิน

AC เป็นความสูงของหน้าผาถึงระดับน้ำทะเล

AD เป็นเส้นแนวระดับ

BC เป็นระยะที่เรือ (B) อยู่ห่างเชิงหน้าผา

จากรูปจะได้ว่า $\overline{YD} \parallel \overline{BC}$

ดังนั้น มุม A และมุม B มีขนาดเท่ากัน

$$\text{จะได้ } \tan 60^\circ = \frac{AC}{BC}$$

เนื่องจาก $AC = AY + YC = 1.70 + 48.30 = 50$ เมตร

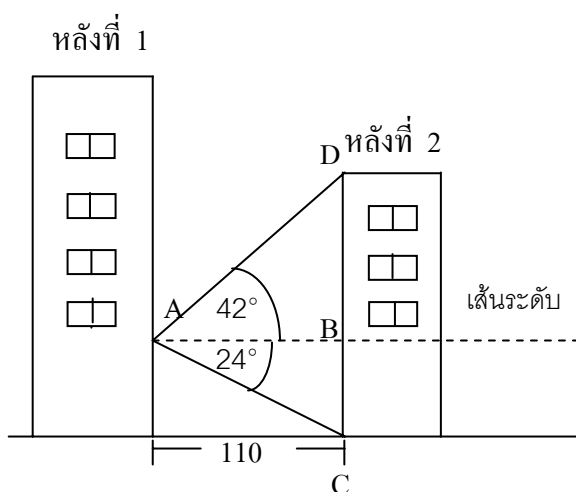
และจากตารางอัตราส่วนตรีโกณมิติจะได้ว่า $\tan 60^\circ \approx 1.732$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } 1.732 &\approx \frac{50}{BC} \\ BC &\approx \frac{50}{1.732} \\ &\approx 28.87 \end{aligned}$$

นั่นคือ เรืออยู่ห่างจากเชิงหน้าผาประมาณ 28.87 เมตร

ตัวอย่างที่ 3 มีตึก 2 หลังตั้งอยู่ห่างกัน 110 เมตร จากตึกหลังที่ 1 ถ้ามองไปยังฐานของตึกหลังที่ 2 แนวสายตาจะทำมุมกับเส้นระดับเป็นมุม 24° แต่ถ้ามองไปยังยอดตึกหลังที่ 2 แนวสายตาจะทำมุมกับเส้นระดับเป็นมุม 42° จงหาความสูงของตึกหลังที่ 2

วิธีทำ



จากรูป สมมติให้ ส่วนสูง BC ยาว x เมตร

ส่วนสูง BD ยาว y เมตร

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

$$\text{จะได้ } \tan 24^\circ = \frac{BC}{AB}$$

จากตารางอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้ว่า $\tan 24^\circ \approx 0.445$

$$\text{ดังนั้น } 0.445 \approx \frac{BC}{110}$$

$$BC \approx 110 \times 0.445$$

$$\approx 48.97$$

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABD

$$\text{จะได้ } \tan 42^\circ = \frac{BD}{AB}$$

จากตารางอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะได้ว่า $\tan 42^\circ \approx 0.9$

$$\text{ดังนั้น } 0.9 \approx \frac{BD}{110}$$

$$BD \approx 110 \times 0.9$$

$$\approx 99$$

นั่นคือ ตึกหลังที่ 2 สูงประมาณ $x + y = 48.97 + 99 = 147.97$ เมตร

8. ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรมข้อ 2) เมื่อนักเรียนทำเสร็จแล้วครูสุ่มให้มาแสดงวิธีทำ

บนกระดานดำ

ขั้นสรุป

ขั้นที่ 5 ขั้นสรุปด้วยกรอบมโนทัศน์

9. ครูให้นักเรียนช่วยกันระดมมโนทัศน์ที่สำคัญจากเนื้อหาเกี่ยวกับการคำนวณหา

ความสูงของวัตถุที่มีความสูงของระดับสายตาเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยเรียงลำดับมโนทัศน์จากมโนทัศน์ที่กว้างไปสู่มโนทัศน์ที่แคบและร่วมกันอภิปราย เมื่อได้ข้อสรุปแล้วครูเขียนลงบนกระดานดำ แล้วอธิบายโดยสรุป

10. ครูให้นักเรียนแต่ละคนเขียนกรอบมโนทัศน์ที่ได้เรียนลงในกระดาษที่ครูแจกให้

ขั้นที่ 6 ขั้นการประเมินผล

11. ครูให้นักเรียนนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่นักเรียนสร้างขึ้นประมาณ 3–5 คน แล้วครูและนักเรียนช่วยกันวิจารณ์
12. ครูแจกเอกสารสรุปมโนทัศน์ให้นักเรียนแต่ละคนสรุปมโนทัศน์ที่เรียนในช่วงนี้
13. ครูนำเสนอกรอบมโนทัศน์ที่ 14 ที่เตรียมมาให้ให้นักเรียนดู แล้วครูและนักเรียนช่วยกันสรุปมโนทัศน์ที่เรียนอีกครั้งหนึ่ง
14. ครูแจกใบงาน 12 ให้นักเรียนแต่ละคนทำเป็นการบ้าน

สื่อการเรียนรู้

1. กรอบมโนทัศน์ที่ 13 การแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาระยะทางและความสูงที่มีขนาดของมุมก้มและมุมเงยเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ
2. กรอบมโนทัศน์ที่ 14 การแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาความสูงของวัตถุที่มีความสูงของระดับสายตาเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ
3. ใบกิจกรรม 12 – A การคำนวณหาความสูงของวัตถุที่มีความสูงของระดับสายตาเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ
4. ใบงาน 12 การคำนวณหาความสูงของวัตถุที่มีความสูงของระดับสายตาเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ
5. ตารางแสดงค่าโดยประมาณของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°
6. เอกสารสรุปมโนทัศน์

การวัดและประเมินผลการเรียนรู้

การวัดผล	เกณฑ์การประเมินผล
1. สังเกตจากการถาม – ตอบ และ การร่วมอภิปรายในชั้นเรียน	1. นักเรียนส่วนมากถาม – ตอบ และ ร่วมอภิปรายในชั้นเรียน
2. ตรวจจากการเขียนกรอบมโนทัศน์ และการนำเสนองานของนักเรียน	2. การเขียนกรอบมโนทัศน์ของนักเรียน ส่วนมากนั้นเขียนได้ถูกต้อง
3. ตรวจจากเอกสารสรุปมโนทัศน์ที่นักเรียน สร้างขึ้น	3. นักเรียนส่วนมากสรุปมโนทัศน์ที่เรียนได้ ถูกต้อง
4. ตรวจจากใบกิจกรรม 12 – A และ ใบงาน 12 ของนักเรียน	4. โดยเฉลี่ยนักเรียนทำใบกิจกรรมและใบงาน ได้ถูกต้องร้อยละ 70

บันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

ผลการจัดการเรียนรู้.....

.....

.....

ปัญหาอุปสรรค.....

.....

.....

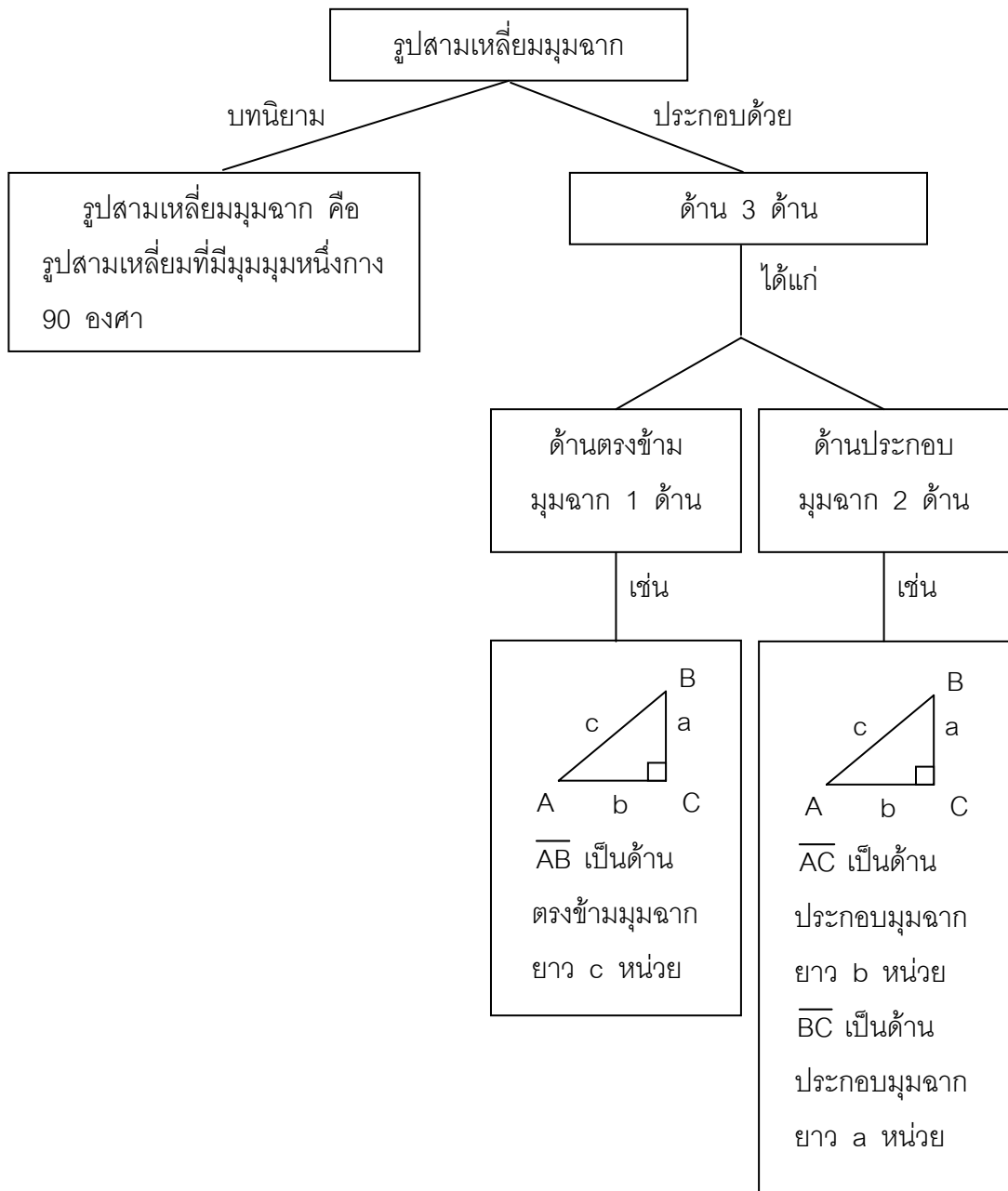
ข้อเสนอแนะ.....

.....

.....

ภาคผนวก ค
สื่อการเรียนรู้

กรอบมโนทัศน์ที่ 1 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



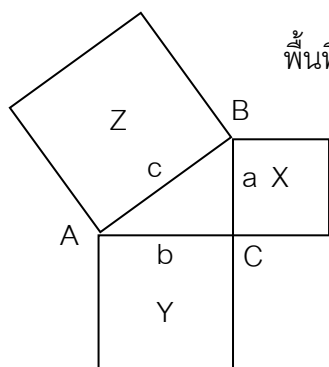
กรอบมโนทัศน์ที่ 2 ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

กล่าวไว้ว่า

ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก

จะได้



พื้นที่ของ $\square Z =$ พื้นที่ของ $\square X +$ พื้นที่ของ $\square Y$

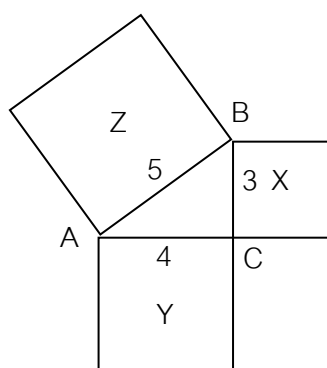
เมื่อ \square แทน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

จะได้

ความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสามรูป คือ

$$c^2 = a^2 + b^2$$

เช่น



จากทฤษฎีบทของพีทาโกรัสจะได้ว่า

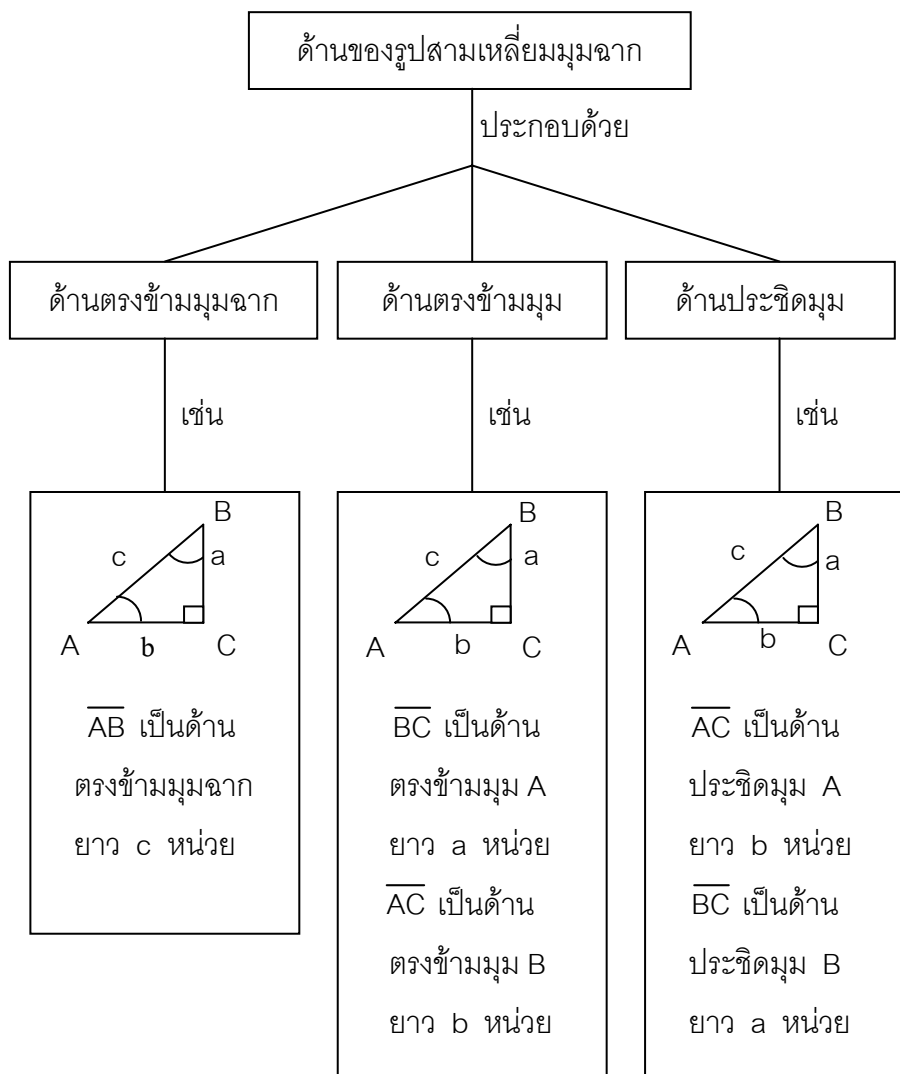
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

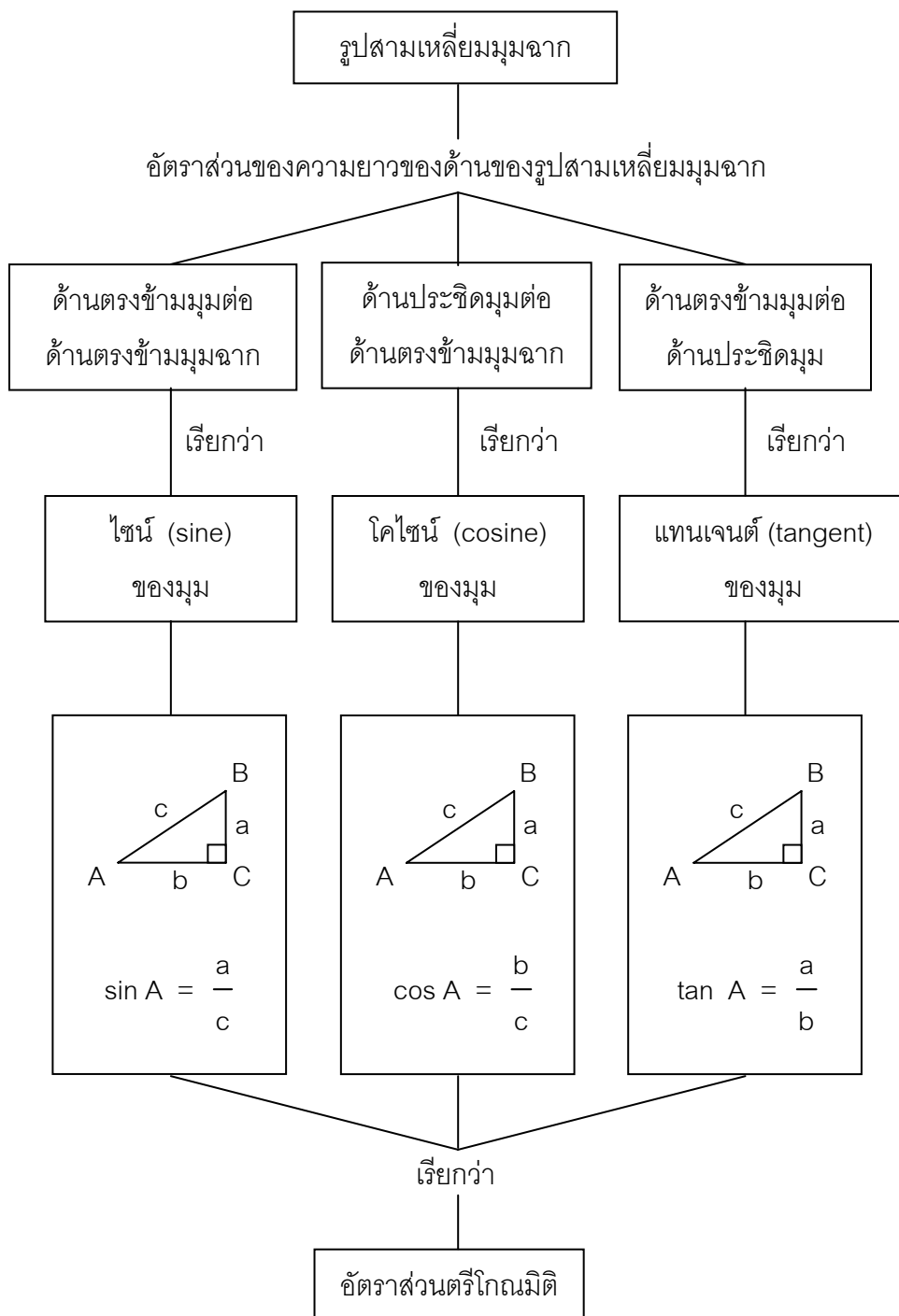
$$25 = 9 + 16$$

$$25 = 25$$

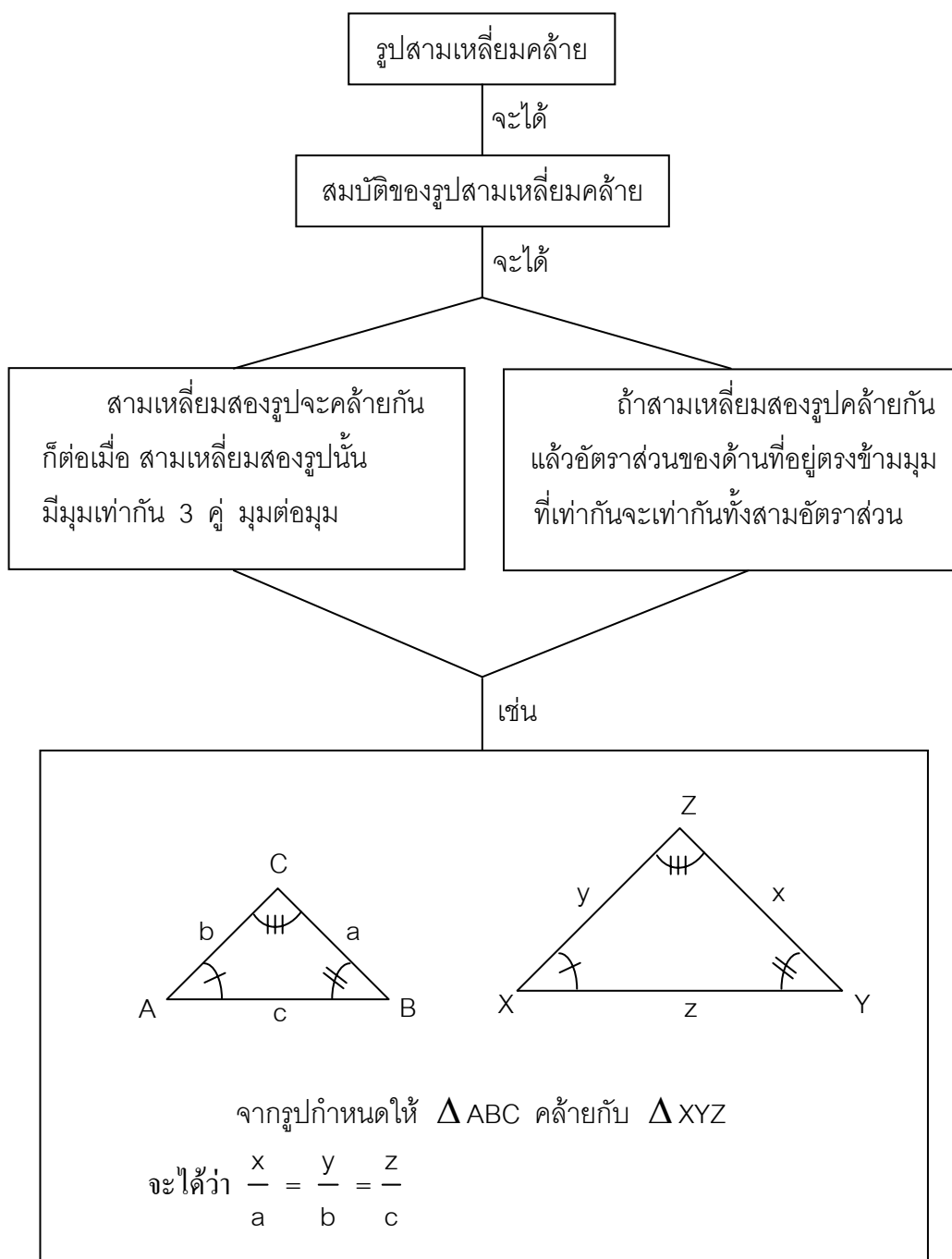
กรอบมโนทัศน์ที่ 3 ชื่อของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



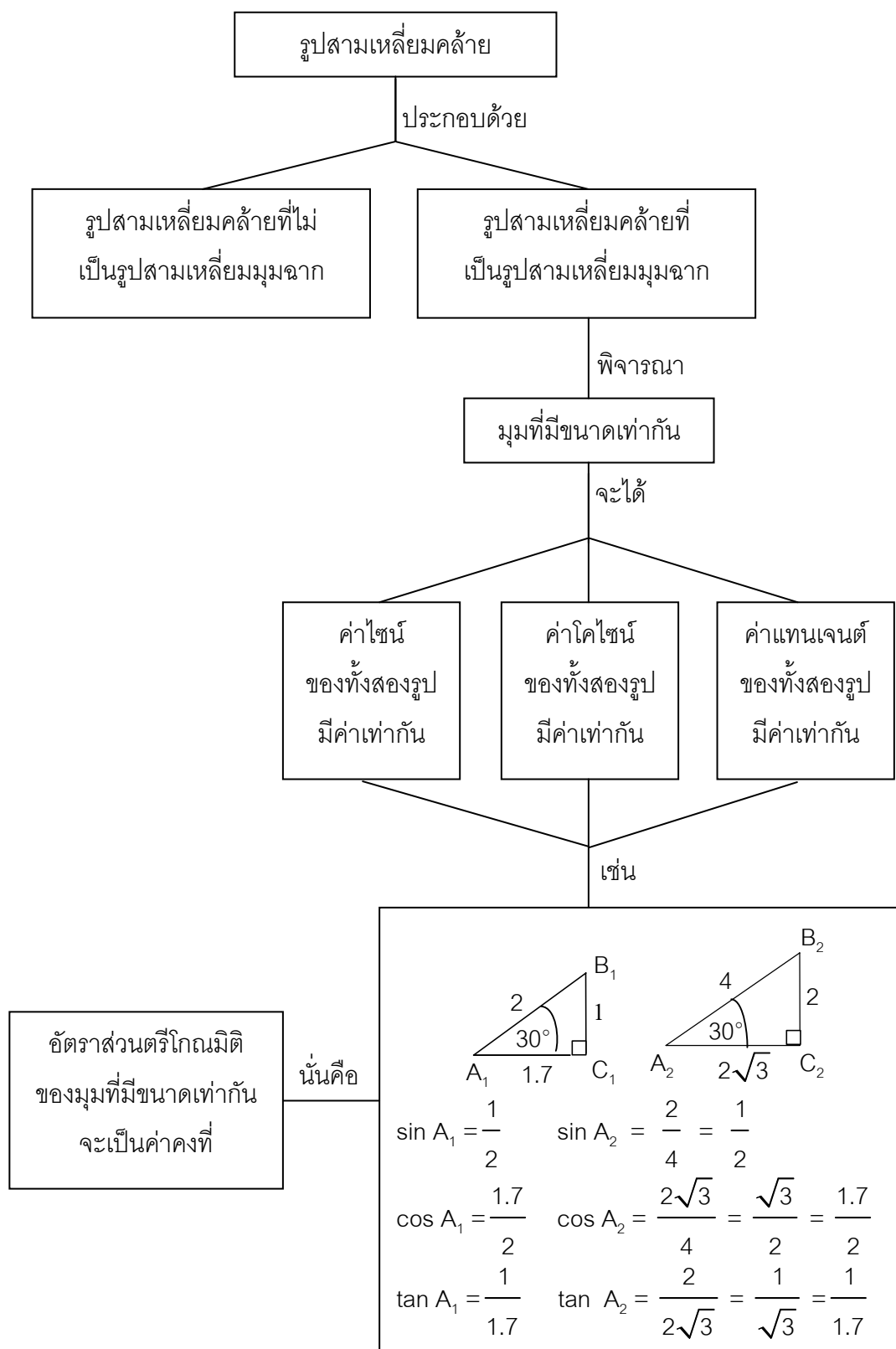
กรอบมโนทัศน์ที่ 4 บทนิยามไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์



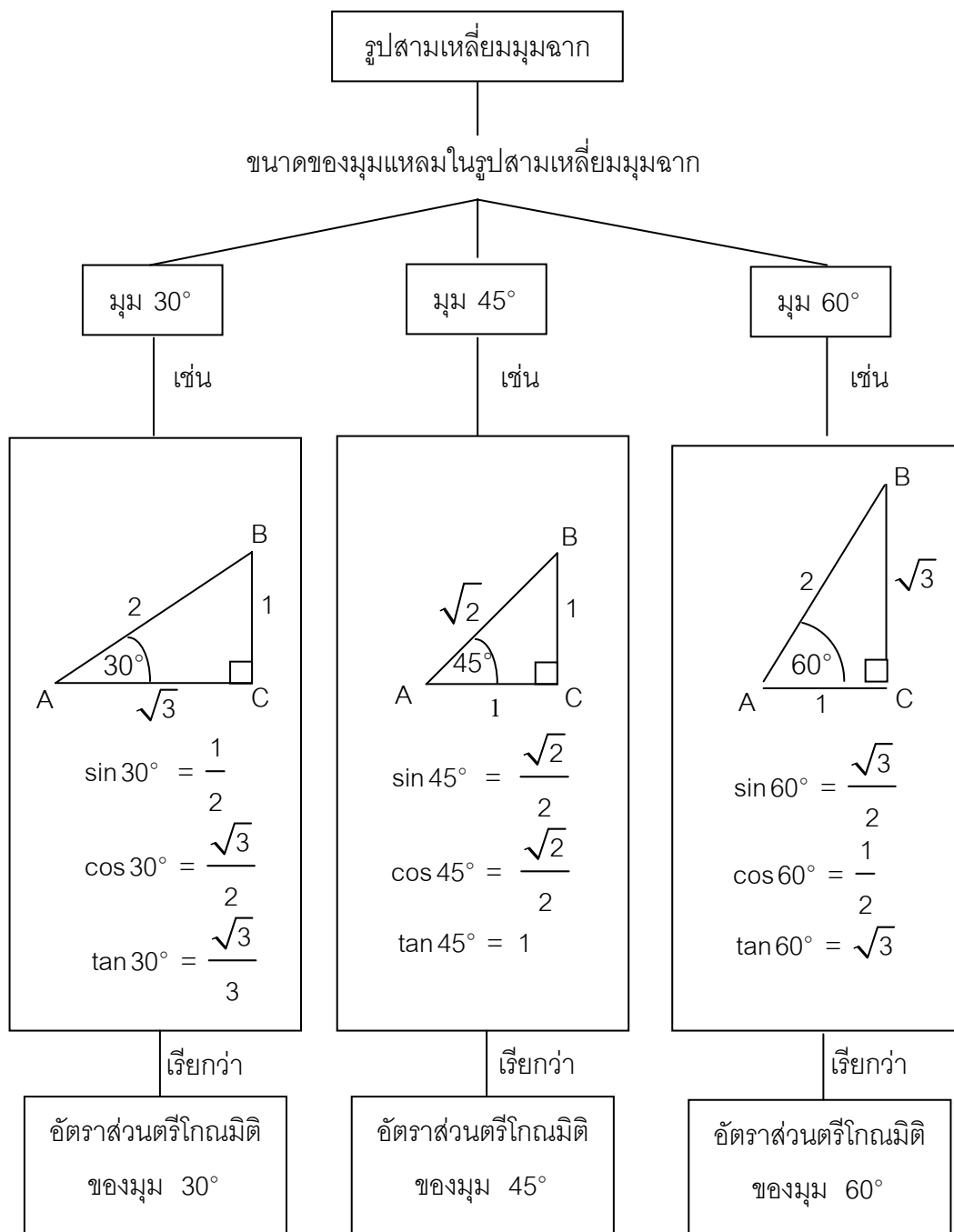
กรอบมโนทัศน์ที่ 5 สมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย



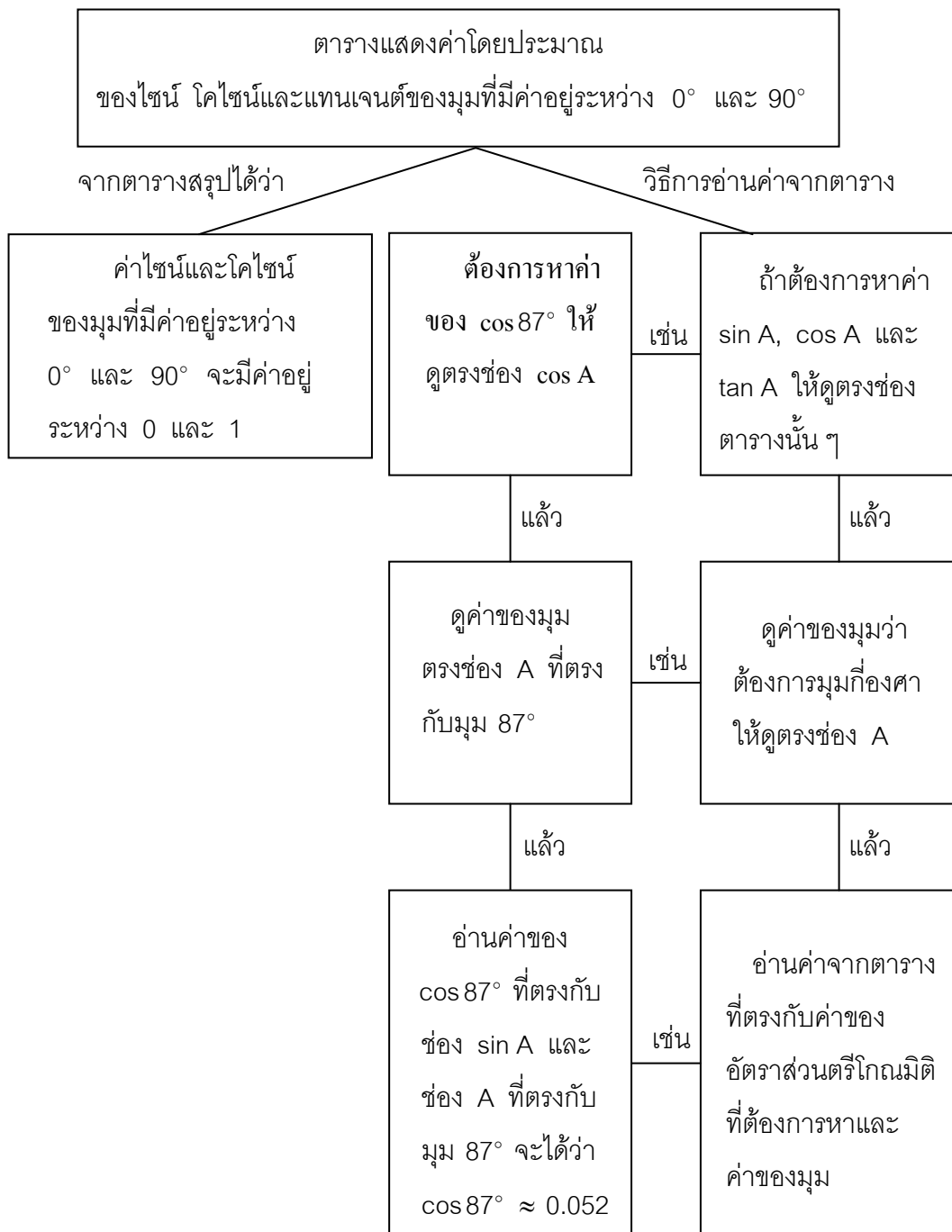
กรอบมโนทัศน์ที่ 6
อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดเท่ากันจะเป็นค่าคงที่



กรอบมโนทัศน์ที่ 7
อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°

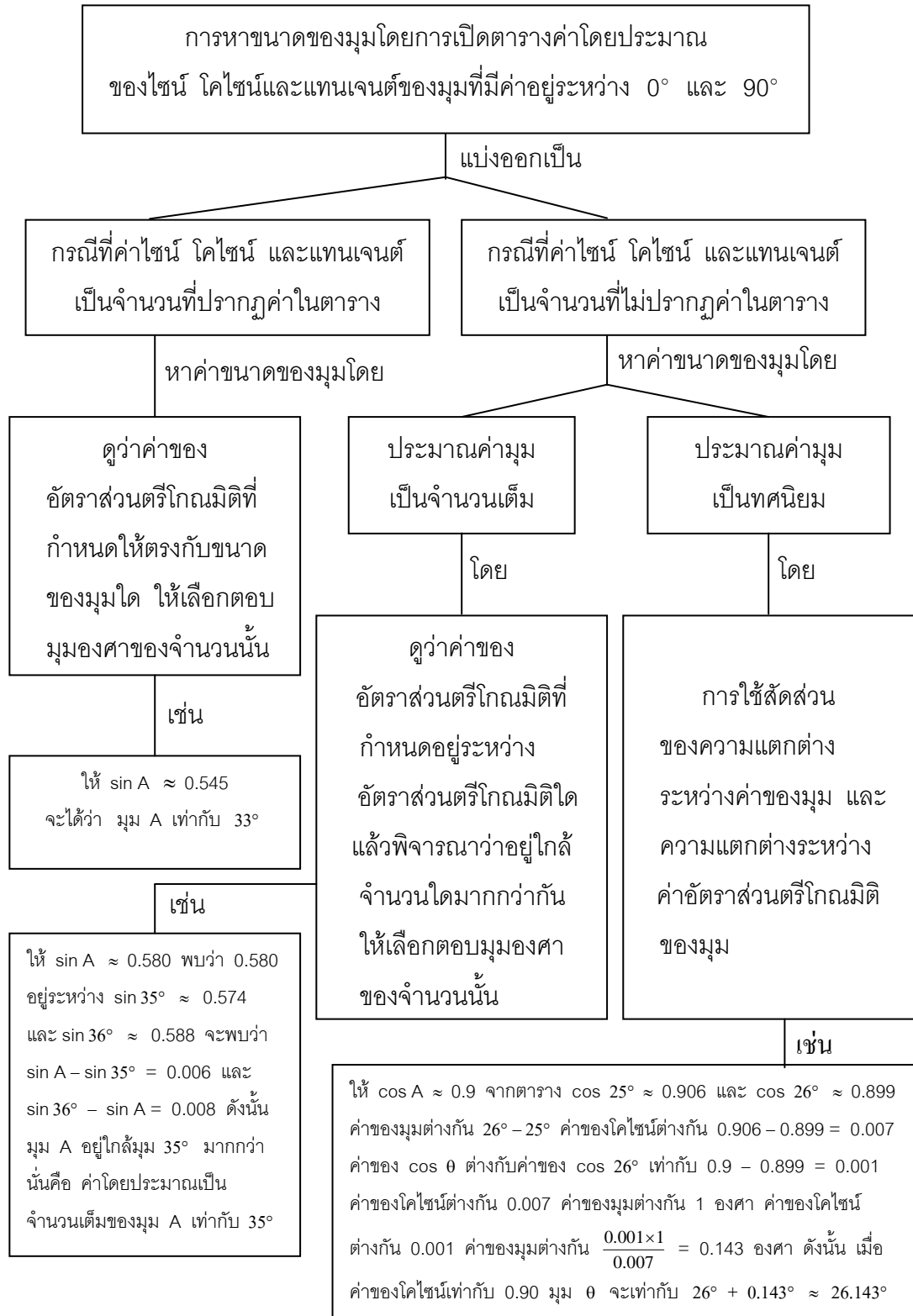


กรอบมโนทัศน์ที่ 8
การเปิดตารางหาค่าโดยประมาณ
ของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°



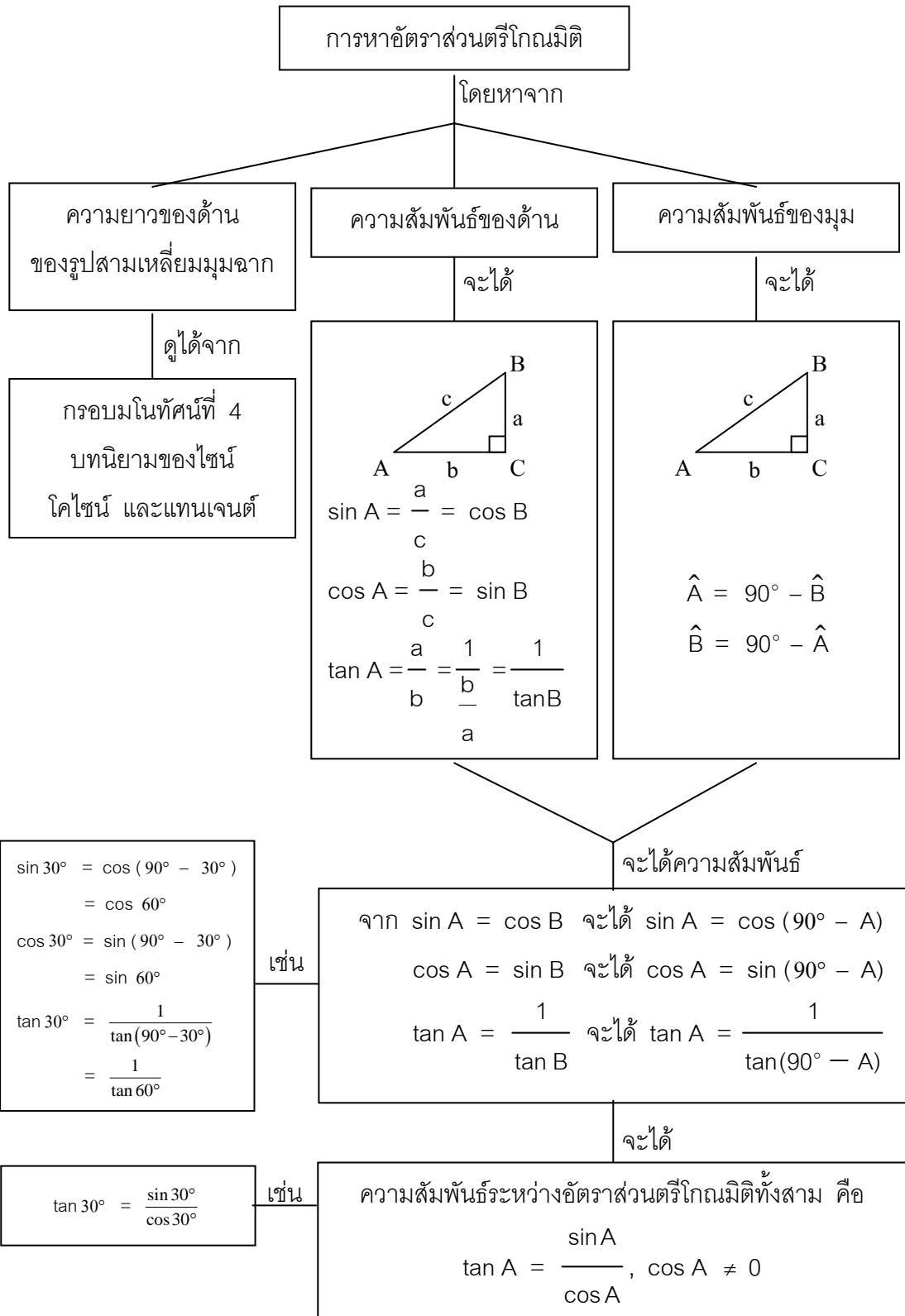
กรอบมโนทัศน์ที่ 9

การหาขนาดของมุมโดยการเปิดตารางค่าโดยประมาณ
ของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°

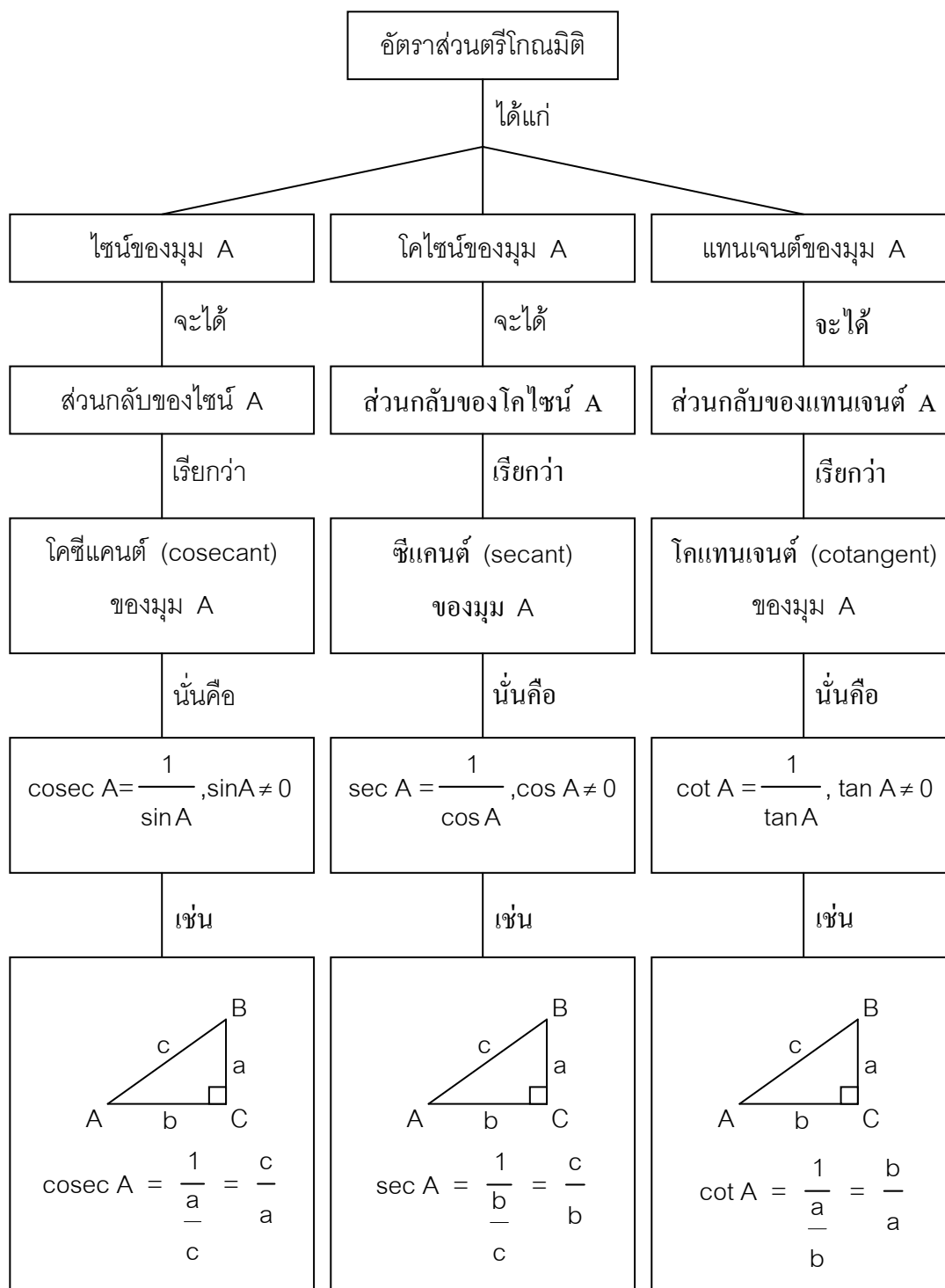


กรอบมโนทัศน์ที่ 10

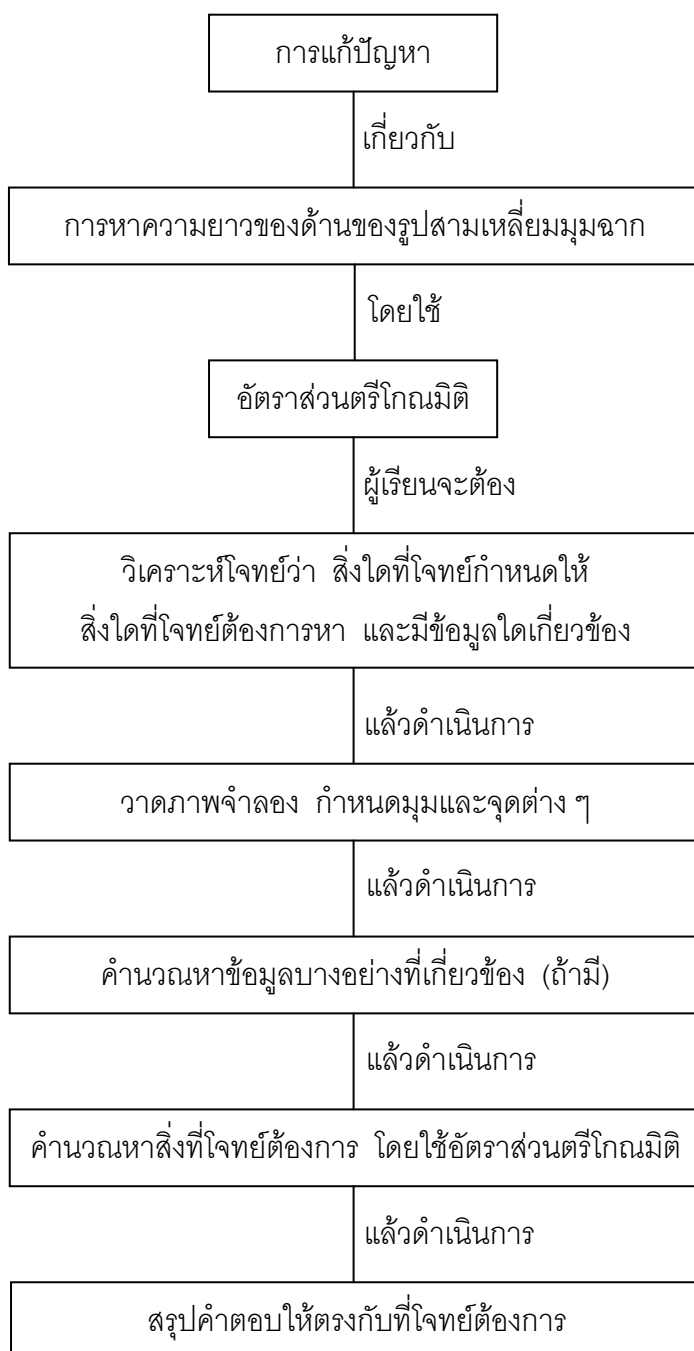
การหาอัตราส่วนตรีโกณมิติโดยหาจากความสัมพันธ์ของด้านและมุม



กรอบมโนทัศน์ที่ 11
ส่วนกลับของอัตราส่วนตรีโกณมิติไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์

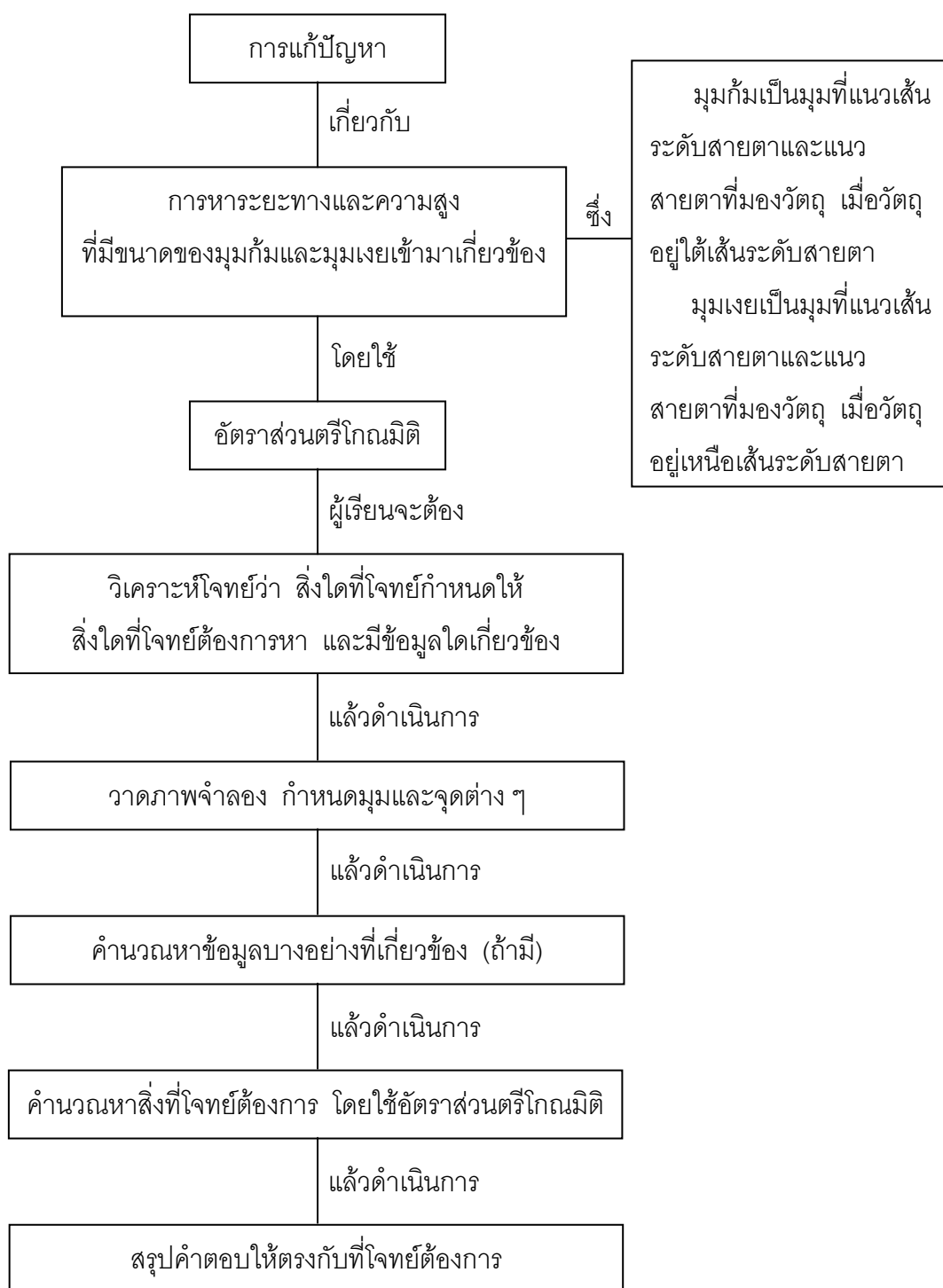


กรอบมโนทัศน์ที่ 12
การแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาความยาว
ของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ

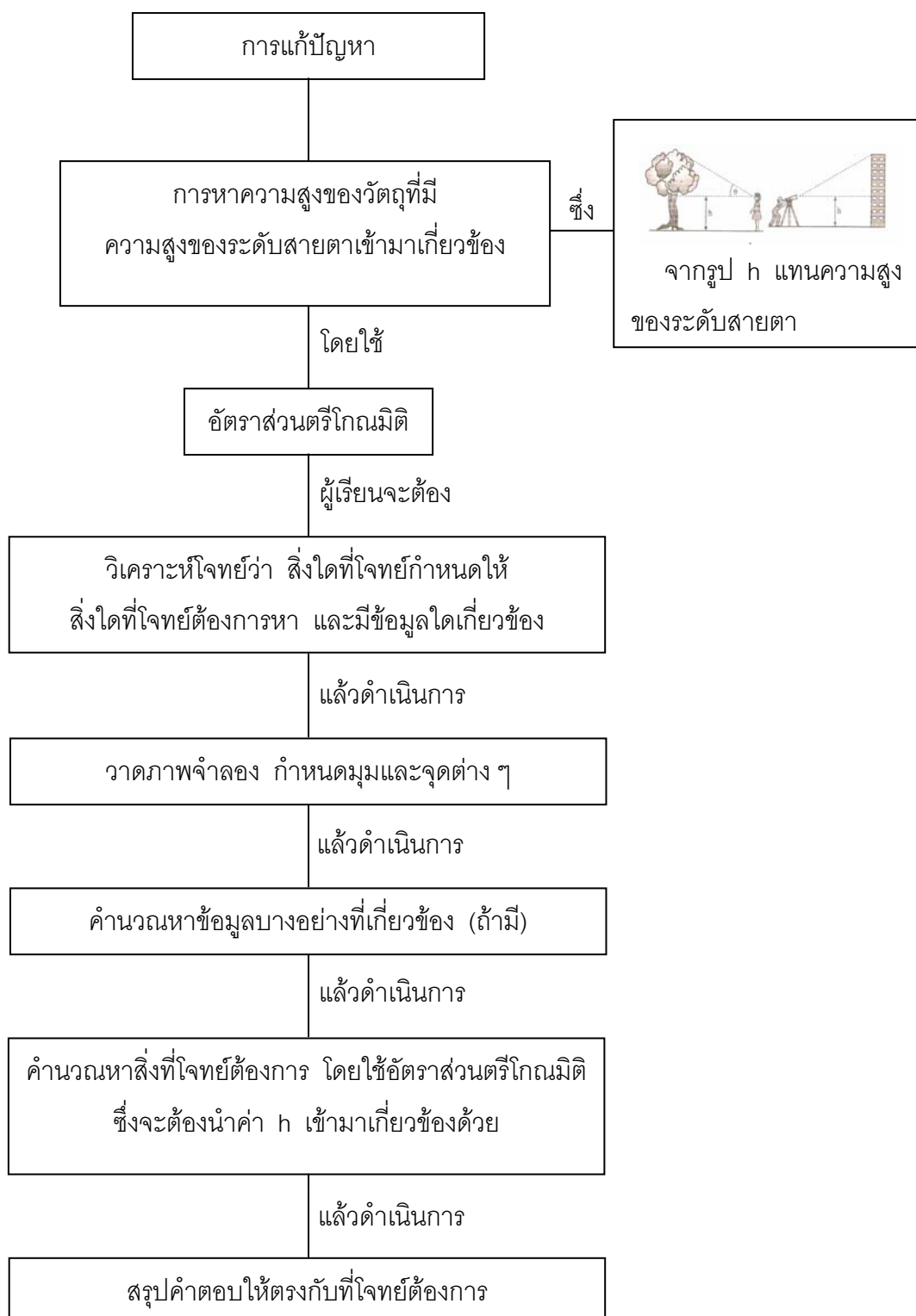


กรอบมโนทัศน์ที่ 13

การแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาระยะทางและความสูง
ที่มีขนาดของมุมก้มและมุมเงยเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ



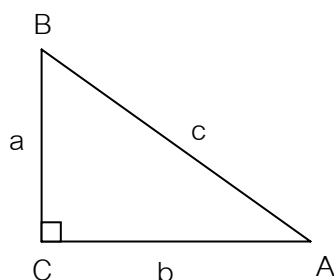
กรอบมโนทัศน์ที่ 14
การแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาความสูงของวัตถุ
ที่มีความสูงของระดับสายตาเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ



แผนภูมิที่ 1 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมมุมหนึ่งทาง 90 องศา

กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก



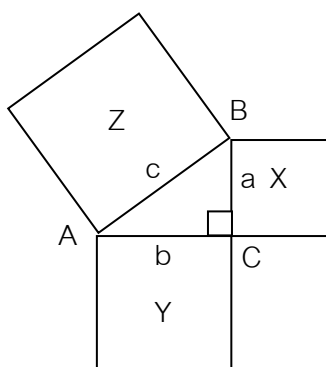
\overline{AB} เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก ยาว c หน่วย

\overline{BC} เป็นด้านประกอบมุมฉาก ยาว a หน่วย

\overline{AC} เป็นด้านประกอบมุมฉาก ยาว b หน่วย

แผนภูมิที่ 2 ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส กล่าวไว้ว่า ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก



จากรูปที่กำหนดให้จะได้

พื้นที่ของ $\square Z =$ พื้นที่ของ $\square X +$ พื้นที่ของ $\square Y$

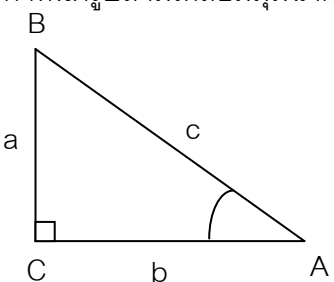
เมื่อ \square แทน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ทั้งสามรูป คือ $c^2 = a^2 + b^2$

แผนภูมิที่ 3 ชื่อของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก

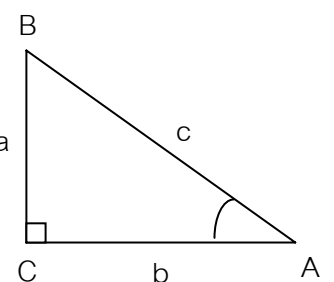


เมื่อพิจารณามุม A ซึ่งเป็นมุมแหลม จะได้ว่า

- \overline{AB} เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก ยาว c หน่วย
- \overline{BC} เป็นด้านประกอบมุม A ยาว a หน่วย
- \overline{AC} เป็นด้านประชิดมุม A ยาว b หน่วย

แผนภูมิที่ 4 บทนิยามของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์

กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก



ไซน์ (sine) ของมุม A คือ

อัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุม A ต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก หรือ $\frac{a}{c}$

โคไซน์ (cosine) ของมุม A คือ

อัตราส่วนของความยาวของด้านประชิดมุม A ต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก หรือ $\frac{b}{c}$

แทนเจนต์ (tangent) ของมุม A คือ

อัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุม A ต่อความยาวของด้านประชิดมุม A หรือ $\frac{a}{b}$

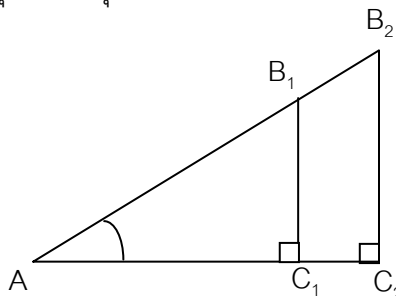
แผนภูมิที่ 5 สมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย

สมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย

1. สามเหลี่ยมสองรูปจะคล้ายกัน ก็ต่อเมื่อ สามเหลี่ยมสองรูปนั้นมีมุมเท่ากัน 3 คู่ มุมต่อมุม
2. ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันแล้วอัตราส่วนของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เท่ากันจะเท่ากันทั้งสามอัตราส่วน

แผนภูมิที่ 6 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดเท่ากันจะเป็นค่าคงที่

กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม A มีขนาดเท่ากันดังนี้



จากรูปจะเห็นว่า รูปสามเหลี่ยมมุมฉากทั้งสองรูป คือ AB_1C_1 และ AB_2C_2 เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายที่มีมุม A เป็นมุมเดียวกัน

จากสมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้าย จะได้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่เท่ากันดังนี้

$$(1) \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} \quad \text{ซึ่งแต่ละอัตราส่วน คือ ไซน์ของมุม A}$$

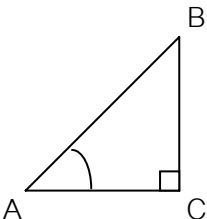
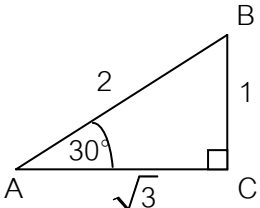
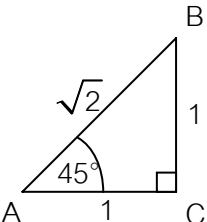
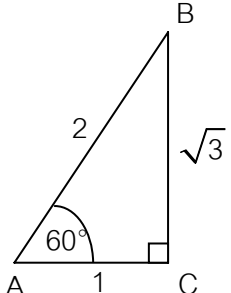
$$(2) \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_2}{AB_2} \quad \text{ซึ่งแต่ละอัตราส่วน คือ โคไซน์ของมุม A}$$

$$(3) \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} \quad \text{ซึ่งแต่ละอัตราส่วน คือ แทนเจนต์ของมุม A}$$

จาก (1), (2) และ (3) พบว่า ไซน์ของมุม A โคไซน์ของมุม A และ แทนเจนต์ของมุม A ของรูปสามเหลี่ยมคล้าย AB_1C_1 และ AB_2C_2 มีค่าเท่ากัน นั่นคือ อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดเท่ากันจะเป็นค่าคงที่

แผนภูมิที่ 7 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°

ตารางแสดงอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°

	มุม	ไซน์	โคไซน์	แทนเจนต์
	A	$\frac{BC}{AB}$	$\frac{AC}{AB}$	$\frac{BC}{AC}$
	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

**แผนภูมิที่ 8 การเปิดตารางหาค่าโดยประมาณ
ของไซน์ โคไซน์และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°**

ตารางแสดงค่าของไซน์ โคไซน์และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°

A	sin A	cos A	tan A
1°	.017	.999	.017
2°	.035	.999	.035
3°	.052	.999	.052
4°	.070	.998	.070
5°	.087	.996	.087
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
87°	.999	.052	19.081
88°	.999	.035	28.636
89°	.999	.018	57.290

(ที่มา: หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 2
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. หน้า 105)

วิธีการอ่านค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติจากตาราง

1. ถ้าต้องการหาค่า sin A หรือ cos A หรือ tan A ให้ดูตรงช่องตารางนั้น ๆ
2. ดูค่าของมุมค่าต้องการมุมก็องศา ให้ดูตรงช่องมุม A
3. อ่านค่าจากตารางที่ตรงค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติและค่าของมุมที่ต้องการหา

สรุป จากตารางจะเห็นได้ว่า ค่าของไซน์และโคไซน์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90° จะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1

แผนภูมิที่ 9 การหาขนาดของมุมโดยการเปิดตารางค่าโดยประมาณ ของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90°

การหาขนาดของมุมโดยการเปิดตารางค่าโดยประมาณของไซน์ โคไซน์ และ
แทนเจนต์ของมุมที่มีค่าอยู่ระหว่าง 0° และ 90° แบ่งออกเป็น 2 กรณีดังนี้

1. ในกรณีที่ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์เป็นจำนวน
ที่ปรากฏค่าในตาราง เราสามารถหาค่าขนาดของมุมโดยดูว่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่
กำหนดให้อยู่ตรงกับขนาดของมุมใด ให้เลือกตอบมุมมองศาของจำนวนนั้น

2. ในกรณีที่ค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์เป็นจำนวน
ที่ไม่ปรากฏค่าในตาราง เราจะต้องหาค่าขนาดของมุมโดยประมาณสามารถทำได้ดังนี้

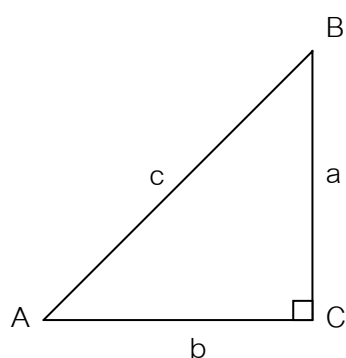
1) ประมาณค่ามุมเป็นจำนวนเต็ม โดยดูว่าอัตราส่วนตรีโกณมิติที่ได้อยู่
ระหว่างค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติสองจำนวนใด แล้วพิจารณาว่าอยู่ใกล้จำนวนใด
มากกว่ากัน ให้เลือกตอบมุมมองศาของจำนวนนั้น

2) ประมาณค่ามุมเป็นทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง หรือสองตำแหน่ง หรือ
มากกว่าสองตำแหน่ง สามารถทำได้โดยการใช้สัดส่วนของความแตกต่างระหว่างค่า
ของมุมและความแตกต่างระหว่างค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม

แผนภูมิที่ 10 การหาอัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยใช้ความสัมพันธ์ของด้านและมุม

ในการหาอัตราส่วนตรีโกณมิติ นอกจากจะหาจากความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและการเปิดตารางอัตราส่วนตรีโกณมิติแล้วยังสามารถหาจากความสัมพันธ์ของด้านและมุมได้ดังนี้

(1) ความสัมพันธ์ของด้าน



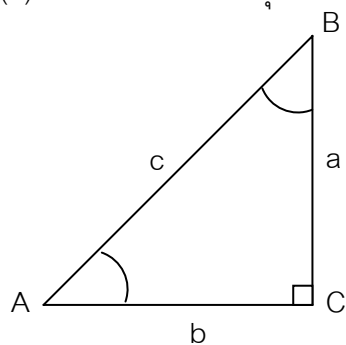
ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม C เป็นมุมฉาก

$$\sin A = \frac{a}{c} = \cos B$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \sin B$$

$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\tan B}$$

(2) ความสัมพันธ์ของมุม



จากรูป มุม A และ B มีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$\hat{A} = 90^\circ - \hat{B}$$

และ $\hat{B} = 90^\circ - \hat{A}$

จาก $\sin A = \cos B$

$$\cos A = \sin B$$

$$\tan A = \frac{1}{\tan B}$$

จะได้ $\sin A = \cos (90^\circ - A)$

จะได้ $\cos A = \sin (90^\circ - A)$

จะได้ $\tan A = \frac{1}{\tan (90^\circ - A)}$

จากความสัมพันธ์ที่กล่าวมา จะสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนตรีโกณมิติทั้งสามได้คือ

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

เมื่อ $\cos A \neq 0$

แผนภูมิที่ 11 ส่วนกลับของอัตราส่วนตรีโกณมิติ ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์

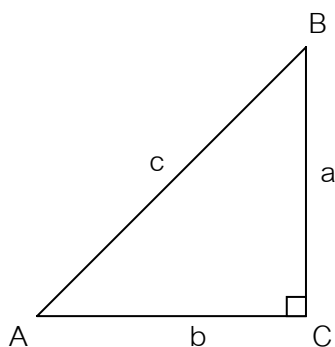
นอกจากอัตราส่วนตรีโกณมิติไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ที่ได้กล่าวไปแล้ว ยังมีอัตราส่วนตรีโกณมิติอีก 3 อัตราส่วนดังนี้

1. โคซีแคนต์ของมุม A แทนด้วย cosecant A หรือเขียนย่อว่า cosec A หรือ csc A คือ ส่วนกลับของ $\sin A$ เมื่อ $\sin A \neq 0$ นั่นคือ $\text{cosec } A = \frac{1}{\sin A}$,

$\sin A \neq 0$

2. ซีแคนต์ของมุม A แทนด้วย secant A หรือเขียนย่อว่า sec A คือ ส่วนกลับของ $\cos A$ เมื่อ $\cos A \neq 0$ นั่นคือ $\sec A = \frac{1}{\cos A}$, $\cos A \neq 0$

3. โคแทนเจนต์ของมุม A แทนด้วย cotangent A หรือเขียนย่อว่า cot A คือ ส่วนกลับของ $\tan A$ เมื่อ $\tan A \neq 0$ นั่นคือ $\cot A = \frac{1}{\tan A}$, $\tan A \neq 0$



จากรูป

$$\sec A = \frac{c}{b}$$

$$\text{cosec } A = \frac{c}{a}$$

$$\cot A = \frac{b}{a}$$

แผนภูมิที่ 12 การแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาความยาว ของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ในการนำความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ ผู้เรียนควรจะมีทักษะในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ ซึ่งในการแก้ปัญหาจำเป็นอย่างหนึ่งที่ผู้เรียนจะต้องอ่านโจทย์ให้เข้าใจ วิเคราะห์ว่าสิ่งใดที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งใดที่โจทย์ต้องการหา และมีข้อมูลใดเกี่ยวข้อง เมื่อวิเคราะห์ได้แล้วจึงดำเนินการดังนี้

1. วาดภาพจำลองให้สอดคล้องกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยเฉพาะกำหนดมุมและจุดต่าง ๆ ให้ถูกต้อง

2. คำนวณหาข้อมูลบางอย่างที่เกี่ยวข้อง (ถ้ามี)

3. คำนวณหาสิ่งที่โจทย์ต้องการ โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ

1) สร้างสมการ

$$\text{อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่โจทย์กำหนด} = \frac{\text{ด้านที่ต้องการหา}}{\text{ด้านที่ทราบค่าแล้ว}}$$

2) แก้สมการ

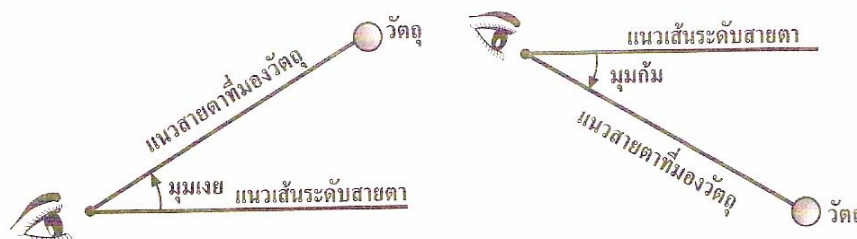
4. สรุปคำตอบให้ตรงกับที่โจทย์ต้องการ

แผนภูมิที่ 13 การแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาระยะทางและความสูง ที่มีขนาดของมุมก้มและมุมเงยเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาระยะทางและความสูง ซึ่งบางครั้งใช้เครื่องมือวัดโดยตรงไม่ได้ เช่น การวัดความสูงของภูเขา การหาความกว้างของแม่น้ำ ฯลฯ สามารถทำได้โดยอาศัยความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ ซึ่งจะมีขนาดของมุมเข้ามาเกี่ยวข้องรวมทั้งมุมก้มและมุมเงย ซึ่งมุมก้มและมุมเงยมีความหมายดังนี้

มุมก้ม (angle of depression) เป็นมุมที่เกิดจากแนวเส้นระดับสายตาและแนวสายตาที่มองวัตถุ เมื่อวัตถุอยู่เหนือเส้นระดับสายตา

มุมเงย (angel of elevation) เป็นมุมที่เกิดจากแนวเส้นระดับสายตาและแนวสายตาที่มองวัตถุ เมื่อวัตถุอยู่ใต้เส้นระดับสายตา



การแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาระยะทางและความสูงโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ จำเป็นอย่างยิ่งที่ผู้เรียนจะต้องอ่านโจทย์ให้เข้าใจ วิเคราะห์ว่าสิ่งใดที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งใดที่โจทย์ต้องการหา และมีข้อมูลใดเกี่ยวข้อง เมื่อวิเคราะห์ได้แล้วจึงดำเนินการดังนี้

1. วาดภาพจำลองให้สอดคล้องกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยเฉพาะกำหนดมุมและจุดต่างๆ ให้ถูกต้อง

2. คำนวณหาข้อมูลบางอย่างที่เกี่ยวข้อง (ถ้ามี)

3. คำนวณหาสิ่งที่โจทย์ต้องการ โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ

1) สร้างสมการ

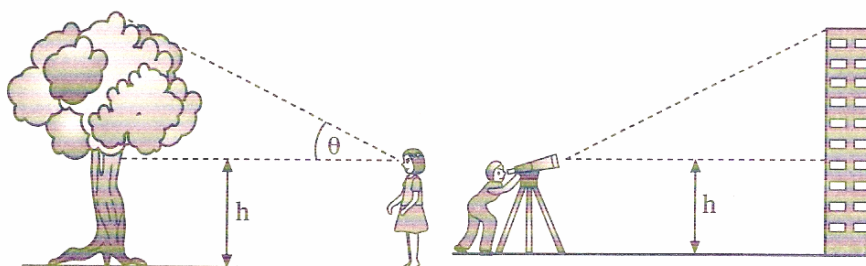
$$\text{อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่โจทย์กำหนด} = \frac{\text{ด้านที่ต้องการหา}}{\text{ด้านที่ทราบค่าแล้ว}}$$

2) แก้สมการ

4. สรุปคำตอบให้ตรงกับที่โจทย์ต้องการ

แผนภูมิที่ 14 การแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาความสูงของวัตถุที่มีความสูงของระดับสายตาเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ในโจทย์ปัญหาบางข้อจะมีความสูงของระดับสายตาเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย เช่น ความสูงของคน ความสูงของขาตั้งกล้อง ฯลฯ ดังรูป h แทนความสูงของระดับสายตา การคำนวณหาความสูงของวัตถุที่มองจะต้องนำค่า h เข้ามาเกี่ยวข้องด้วย



การแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาความสูงของวัตถุที่มีความสูงของระดับสายตาเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ จำเป็นอย่างยิ่งที่ผู้เรียนจะต้องอ่านโจทย์ให้เข้าใจ วิเคราะห์ว่าสิ่งใดที่โจทย์กำหนดให้และสิ่งใดที่โจทย์ต้องการหา และมีข้อมูลใดเกี่ยวข้อง เมื่อวิเคราะห์ได้แล้วจึงดำเนินการดังนี้

1. วาดภาพจำลองให้สอดคล้องกับสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยเฉพาะกำหนดมุมและจุดต่าง ๆ ให้ถูกต้อง
2. คำนวณหาข้อมูลบางอย่างที่เกี่ยวข้อง (ถ้ามี)
3. คำนวณหาสิ่งที่โจทย์ต้องการ โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ ซึ่งจะต้องนำค่า h เข้ามาเกี่ยวข้องด้วย

- 1) สร้างสมการ

$$\text{อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่โจทย์กำหนด} = \frac{\text{ด้านที่ต้องการหา}}{\text{ด้านที่ทราบค่าแล้ว}}$$

- 2) แก้สมการ

4. สรุปคำตอบให้ตรงกับที่โจทย์ต้องการ

ภาคผนวก ง
แบบทดสอบวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์
เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถใช้บทนิยามในการหาค่าไซน์ โคไซน์ แทนเจนต์ โคซีแคนต์ ซีแคนต์ และโคแทนเจนต์ของมุมที่กำหนดให้และนำไปใช้ในการคำนวณได้

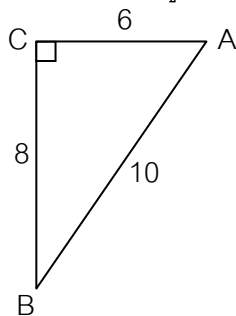
1. กำหนดให้ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ และ $\sin \theta = \frac{k}{2}$ ดังนั้น $\tan \theta$ มีค่าเท่าใด

- ก. $\frac{k}{\sqrt{4+k^2}}$ ข. $\frac{\sqrt{4+k^2}}{2}$ ค. $\frac{k}{\sqrt{4-k^2}}$ ง. $\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}$

2. ข้อใดกล่าวถูกต้อง

- ก. $\sec A = \frac{1}{\sin A}$ ข. $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\cos A}$
ค. $\cot A = \frac{1}{\tan A}$ ง. ถูกทุกข้อ

3. จากรูปต่อไปนี้ข้อใดไม่ถูกต้อง



- ก. $\sin A = \frac{8}{10}$, $\cot A = \frac{6}{8}$
ข. $\tan A = \frac{8}{6}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{10}{8}$
ค. $\sec = \frac{10}{6}$, $\cot A = \frac{6}{8}$
ง. $\cos A = \frac{10}{8}$, $\tan A = \frac{8}{6}$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถบอกค่าไซน์ โคไซน์ แทนเจนต์ โคซีแคนต์ ซีแคนต์ และโคแทนเจนต์ของมุม 30° , 45° และ 60° แล้วนำไปใช้ในการคำนวณได้

4. $(4 \sin 30^\circ - \sqrt{3} \tan 60^\circ) + (2 \sin 45^\circ - 4 \cos 45^\circ + 6 \tan 45^\circ)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

- ก. $5 - \sqrt{2}$ ข. $7 - \sqrt{2}$ ค. $5 + 3\sqrt{2}$ ง. $7 + 3\sqrt{2}$

5.
$$\frac{\tan 60^\circ \tan 45^\circ - 8 \sin 30^\circ \cos 60^\circ}{2 \sin 30^\circ (\cos 60^\circ - \tan 30^\circ)}$$
 มีค่าเท่ากับข้อใด

- ก. $\sqrt{3} - 1$ ข. $\sqrt{3} - 2$ ค. $2\sqrt{3}$ ง. $2\sqrt{3} + 1$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถหาขนาดของมุมได้เมื่อกำหนดความยาวของด้านมาให้

6. ถ้ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามีฐานยาว 2 เมตร และสูง $\sqrt{3}$ เมตร แล้วมุมยอดจะเท่ากับข้อใด

- ก. 30° ข. 45° ค. 60° ง. 75°

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถนำความสัมพันธ์ของด้านและมุมไปใช้หา

อัตราส่วนตรีโกณมิติที่เท่ากันได้

7. จงพิจารณาว่าข้อใดถูกต้อง

- ก. $\sin 45^\circ = \cos 135^\circ$ ข. $\tan A = \cot (90^\circ + A)$
 ค. $\sin 350^\circ = \sin 55^\circ$ ง. $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถบอกความหมายของมุมก้มและมุมเงยได้

8. จงพิจารณา (1) และ (2)

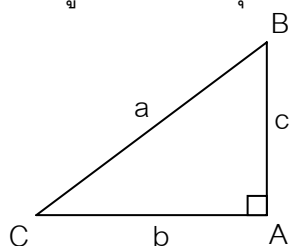
- (1) มุมก้มเป็นมุมที่เกิดจากแนวเส้นระดับสายตาและแนวสายตาที่มองวัตถุ เมื่อวัตถุอยู่เหนือเส้นระดับสายตา
 (2) มุมเงยเป็นมุมที่เกิดจากแนวเส้นระดับสายตาและแนวสายตาที่มองวัตถุ เมื่อวัตถุอยู่ใต้เส้นระดับสายตา

ข้อใดถูกต้องที่สุด

- ก. ข้อ (1) ถูกเพียงข้อเดียว ข. ข้อ (2) ถูกเพียงข้อเดียว
 ค. ผิดทั้งข้อ (1) และ ข้อ (2) ง. ถูกทั้งข้อ (1) และ ข้อ (2)

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการหาค่าไซน์ โคไซน์และแทนเจนต์ของมุมแหลมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้โดยใช้บทนิยาม และสามารถคิดคำนวณได้

9. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มีมุม A เป็นมุมฉาก ดังรูป ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง



- ก. $\sin C \cos C < 1$
 ข. $\sin C \cos C = 1$
 ค. $\sin C \cos C = 0$
 ง. $\sin C \cos C > 1$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการนำสมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้ายและบทนิยามของอัตราส่วนตรีโกณมิติและสามารถคิดคำนวณหาความยาวของด้านที่เหลือได้

10. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก PQR รูปหนึ่งที่มีมุม Q เป็นมุมฉาก ถ้าด้าน PR ยาว 12

เซนติเมตร และ $\cos R = \frac{3}{4}$ จงหาความยาวของ \overline{PQ} และ \overline{QR} ตามลำดับ

ก. $3\sqrt{7}$, 9 ข. $9\sqrt{7}$, 9 ค. $3\sqrt{7}$, 12 ง. $9\sqrt{7}$, 12

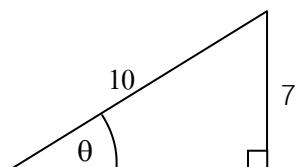
จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60° และสามารถให้เหตุผลและคิดคำนวณได้

11. กำหนดให้ A เป็นมุมแหลม และ $\sin A - \cos A = 0$ จงหาค่าของ $\frac{1 - \sin A}{1 + \cos A}$

ก. $2 + \sqrt{3}$ ข. $3 + 2\sqrt{2}$ ค. $3\sqrt{3} + 2$ ง. $3 - 2\sqrt{2}$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการหาขนาดของมุมโดยประมาณเมื่อกำหนดความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมาให้และสามารถคิดคำนวณ ให้เหตุผลและเปรียบเทียบได้

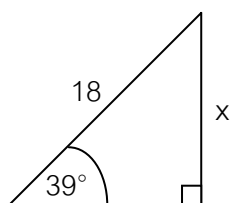
12. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้จะหาค่าของมุม θ โดยประมาณเป็นทศนิยมสองตำแหน่ง



ก. 43.58° ข. 44.42°
ค. 44.58° ง. 45.42°

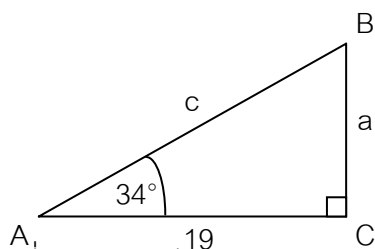
จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ และสามารถคิดคำนวณได้

13. จงหาค่า x จากรูปที่กำหนดให้



ก. 11.32
ข. 11.72
ค. 12.32
ง. 12.72

14. จงหาค่า a และ c จากรูปที่กำหนดให้



ก. $a = 13.8, b = 23.9$

ข. $a = 13.8, b = 22.9$

ค. $a = 12.8, b = 23.9$

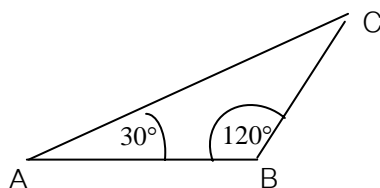
ง. $a = 12.8, b = 22.9$

15. สามเหลี่ยม ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก มุม A มีขนาด 30° และ มุม B มีขนาด 60° ถ้า \overline{AB} ยาว 200 หน่วย จงหาว่า \overline{AC} ยาวเท่าไร

ก. $100\sqrt{3}$ หน่วย ข. $200\sqrt{3}$ หน่วย ค. $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ หน่วย ง. $\frac{200\sqrt{3}}{3}$ หน่วย

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ และสามารถคิดคำนวณและเชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์ได้

16. จากรูปกำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า $BC = 10$ หน่วย มุม A มีขนาด 30° และ มุม B มีขนาด 120° แล้วความยาวรอบรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใด

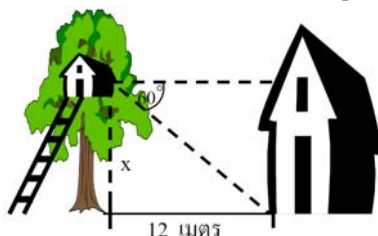


ก. $10 + 10\sqrt{3}$ ข. $15 + 10\sqrt{3}$

ค. $20 + 10\sqrt{3}$ ง. $25 + 10\sqrt{3}$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการหาความสูงและระยะทางของสิ่งต่าง ๆ ที่มีขนาดของมุมก้มและมุมเงยเข้ามาเกี่ยวข้อง และสามารถแก้ปัญหา คิดคำนวณและเชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์ได้

17. จากรูปที่กำหนดให้ จงหาว่าบ้านที่อยู่บนต้นไม้สูงเท่าไร



ก. 20.5 เมตร

ข. 20.8 เมตร

ค. 30.5 เมตร

ง. 30.8 เมตร

18. ต้นไม้ต้นหนึ่งทอดเงายาว 40 เมตร แนวของเส้นตรงที่ลากผ่านจุดปลายของเงาต้นไม้และยอดต้นไม้ทำมุม 20° กับเงาของต้นไม้ จงหาความสูงของต้นไม้

ก. 12.56 เมตร

ข. 13.56 เมตร

ค. 14.56 เมตร

ง. 15.56 เมตร

19. จากจุดยอดบนหน้าผาแห่งหนึ่งซึ่งสูง 90 เมตร จากระดับน้ำทะเล ถ้ามองไปที่เรือสองลำที่จอดอยู่ในทะเลในแนวเส้นตรงเดียวกันพบว่าต้องมองเป็นมุมก้ม 25° และ 38° ตามลำดับ จงหาว่าระยะห่างระหว่างเรือทั้งสองลำ (ตอบค่าประมาณเป็นจำนวนเต็ม)
- ก. 78 เมตร ข. 79 เมตร ค. 80 เมตร ง. 81 เมตร
- จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการคำนวณหาความสูงของวัตถุที่มีความสูงของระดับสายตาเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ และสามารถแก้ปัญหา คิดคำนวณและเชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์ได้
20. นาวินยืนอยู่ตรงหน้าผาแห่งหนึ่งซึ่งอยู่สูงจากระดับน้ำทะเล 48.30 เมตร เมื่อเขามองลงไปยังเรือลำหนึ่งกลางทะเล โดยมุมที่แนวสายตาทำกับแนวระดับเป็นมุมก้มมีขนาด 60° ถ้าความสูงจากพื้นถึงตาของนาวินเท่ากับ 1.70 เมตร อยากรทราบว่ามีเรือลำนี้อยู่ห่างจากเชิงหน้าผาประมาณกี่เมตร
- ก. 28.87 เมตร ข. 28.97 เมตร ค. 29.87 เมตร ง. 29.97 เมตร

แบบทดสอบวัดความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถหาขนาดของมุมได้เมื่อกำหนดความยาวของด้านมาให้

1. ถ้ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีฐานยาว 2 เมตร และสูง $\sqrt{3}$ เมตร แล้วมุมยอดจะเท่ากับข้อใด

- ก. 30° ข. 75° ค. 60° ง. 45°

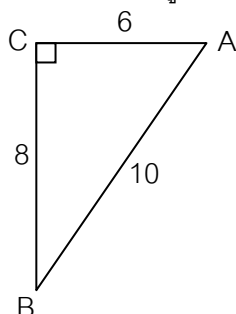
จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถใช้บทนิยามในการหาค่าไซน์ โคไซน์ แทนเจนต์

โคซีแคนต์ ซีแคนต์ และโคแทนเจนต์ของมุมที่กำหนดให้และนำไปใช้ในการคำนวณได้

2. กำหนดให้ $0^\circ < \theta < 90^\circ$ และ $\sin \theta = \frac{k}{2}$ ดังนั้น $\tan \theta$ มีค่าเท่าใด

- ก. $\frac{\sqrt{4+k^2}}{2}$ ข. $\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}$ ค. $\frac{k}{\sqrt{4-k^2}}$ ง. $\frac{k}{\sqrt{4+k^2}}$

3. จากรูปต่อไปนี้ข้อใดไม่ถูกต้อง



ก. $\cos A = \frac{10}{8}$, $\tan A = \frac{8}{6}$

ข. $\sec A = \frac{10}{6}$, $\cot A = \frac{6}{8}$

ค. $\sin A = \frac{8}{10}$, $\cot A = \frac{6}{8}$

ง. $\tan A = \frac{8}{6}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{10}{8}$

4. ข้อใดกล่าวถูกต้อง

ก. $\cot A = \frac{1}{\tan A}$

ข. $\sec A = \frac{1}{\sin A}$

ค. $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\cos A}$

ง. ถูกทุกข้อ

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถนำความสัมพันธ์ของด้านและมุมไปใช้หา
อัตราส่วนตรีโกณมิติที่เท่ากันได้

5. จงพิจารณาว่าข้อใดถูกต้อง

ก. $\sin 350^\circ = \sin 55^\circ$

ข. $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ$

ค. $\sin 45^\circ = \cos 135^\circ$

ง. $\tan A = \cot (90^\circ + A)$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถบอกค่าไซน์ โคไซน์ แทนเจนต์ โคซีแคนต์ ซีแคนต์
และโคแทนเจนต์ของมุม 30° , 45° และ 60° แล้วนำไปใช้ในการ
การคำนวณได้

6.
$$\frac{\tan 60^\circ \tan 45^\circ - 8 \sin 30^\circ \cos 60^\circ}{2 \sin 30^\circ (\cos 60^\circ - \tan 30^\circ)}$$
 มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $2\sqrt{3} + 1$

ข. $2\sqrt{3}$

ค. $\sqrt{3} - 2$

ง. $\sqrt{3} - 1$

7. $(4 \sin 30^\circ - \sqrt{3} \tan 60^\circ) + (2 \sin 45^\circ - 4 \cos 45^\circ + 6 \tan 45^\circ)$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $7 + 3\sqrt{2}$

ข. $7 - \sqrt{2}$

ค. $5 + 3\sqrt{2}$

ง. $5 - \sqrt{2}$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° ,
 45° และ 60° และสามารถให้เหตุผลและคิดคำนวณได้

8. กำหนดให้ A เป็นมุมแหลม และ $\sin A - \cos A = 0$ จงหาค่าของ $\frac{1 - \sin A}{1 + \cos A}$

ก. $2 + \sqrt{3}$

ข. $3\sqrt{3} + 2$

ค. $3 - 2\sqrt{2}$

ง. $3 + 2\sqrt{2}$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถบอกความหมายของมุมกัมและมุมเงยได้

9. จงพิจารณา (1) และ (2)

(1) มุมกัมเป็นมุมที่เกิดจากแนวเส้นระดับสายตาและแนวสายตาทิมองวัตถุ เมื่อวัตถุอยู่
เหนือเส้นระดับสายตา

(2) มุมเงยเป็นมุมที่เกิดจากแนวเส้นระดับสายตาและแนวสายตาทิมองวัตถุ เมื่อวัตถุอยู่
ใต้เส้นระดับสายตา

ข้อใดถูกต้องที่สุด

ก. ข้อ (1) ถูกเพียงข้อเดียว

ข. ข้อ (2) ถูกเพียงข้อเดียว

ค. ถูกทั้งข้อ (1) และ ข้อ (2)

ง. ผิดทั้งข้อ (1) และ ข้อ (2)

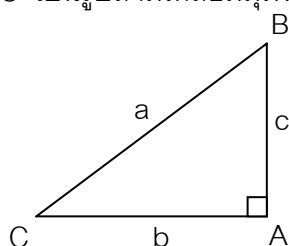
จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการนำสมบัติของรูปสามเหลี่ยมคล้ายและบทนิยามของอัตราส่วนตรีโกณมิติและสามารถคิดคำนวณหาความยาวของด้านที่เหลือได้

10. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก PQR รูปหนึ่งที่มีมุม Q เป็นมุมฉาก ถ้าด้าน PR ยาว 12 เซนติเมตร และ $\cos R = \frac{3}{4}$ จงหาความยาวของ \overline{PQ} และ \overline{QR} ตามลำดับ

ก. $3\sqrt{7}$, 9 ข. $3\sqrt{7}$, 12 ค. $9\sqrt{7}$, 9 ง. $9\sqrt{7}$, 12

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการหาค่าไซน์ โคไซน์และแทนเจนต์ของมุมแหลมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้โดยใช้บทนิยามและสามารถคิดคำนวณได้

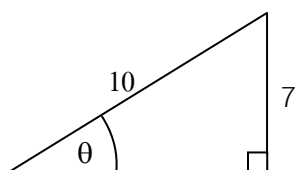
11. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มีมุม A เป็นมุมฉาก ดังรูป ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง



- ก. $\sin C \cos C = 0$
 ข. $\sin C \cos C = 1$
 ค. $\sin C \cos C < 1$
 ง. $\sin C \cos C > 1$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการหาขนาดของมุมโดยประมาณเมื่อกำหนดความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมาให้และสามารถคิดคำนวณ ให้เหตุผลและเปรียบเทียบได้

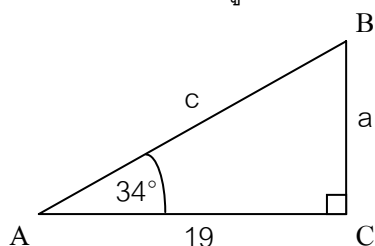
12. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาค่าของมุม θ โดยประมาณเป็นทศนิยมสองตำแหน่ง



- ก. 45.42° ข. 44.42°
 ค. 44.58° ง. 43.58°

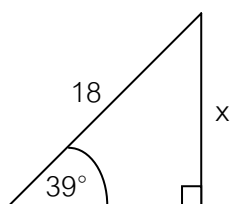
จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้โดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ และสามารถคิดคำนวณได้

13. จงหาค่า a และ c จากรูปที่กำหนดให้



- ก. $a = 12.8$, $b = 22.9$
 ข. $a = 13.8$, $b = 22.9$
 ค. $a = 12.8$, $b = 23.9$
 ง. $a = 13.8$, $b = 23.9$

14. จงหาค่า x จากรูปที่กำหนดให้



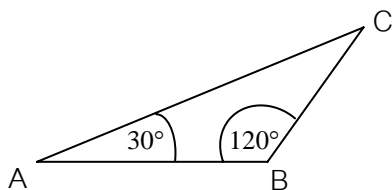
ก. 12.72

ข. 12.32

ค. 11.72

ง. 11.32

15. จากรูปกำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า $BC = 10$ หน่วย มุม A มีขนาด 30° และมุม B มีขนาด 120° แล้วความยาวรอบรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใด



ก. $25 + 10\sqrt{3}$

ข. $15 + 10\sqrt{3}$

ค. $20 + 10\sqrt{3}$

ง. $10 + 10\sqrt{3}$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ และสามารถคิดคำนวณและเชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์ได้

16. สามเหลี่ยม ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก มุม A มีขนาด 30° และ มุม B มีขนาด 60° ถ้า \overline{AB} ยาว 200 หน่วย จงหาว่า \overline{AC} ยาวเท่าไร

ก. $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ หน่วย ข. $\frac{200\sqrt{3}}{3}$ หน่วย ค. $100\sqrt{3}$ หน่วย ง. $200\sqrt{3}$ หน่วย

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการหาความสูงและระยะทางของสิ่งต่างๆ ที่มีขนาดของมุมก้มและมุมเงยเข้ามาเกี่ยวข้อง และสามารถแก้ปัญหา คิดคำนวณและเชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์ได้

17. ต้นไม้ต้นหนึ่งทอดเงายาว 40 เมตร แนวของเส้นตรงที่ลากผ่านจุดปลายของเงาต้นไม้และยอดต้นไม้ทำมุม 20° กับเงาของต้นไม้ จงหาความสูงของต้นไม้

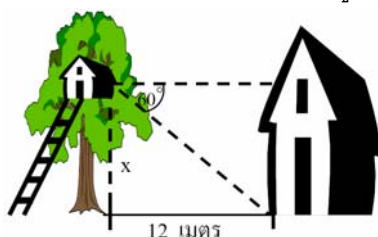
ก. 15.56 เมตร

ข. 14.56 เมตร

ค. 13.56 เมตร

ง. 12.56 เมตร

18. จากรูปที่กำหนดให้ จงหาว่าบ้านที่อยู่บนต้นไม้สูงเท่าไร



ก. 20.5 เมตร

ข. 30.5 เมตร

ค. 20.8 เมตร

ง. 30.8 เมตร

19. จากจุดยอดบนหน้าผาแห่งหนึ่งซึ่งสูง 90 เมตร จากระดับน้ำทะเล ถ้ามองไปที่เรือสองลำที่จอดอยู่ในทะเลในแนวเส้นตรงเดียวกันพบว่าต้องมองเป็นมุมก้ม 25° และ 38° ตามลำดับ จงหาว่าระยะห่างระหว่างเรือทั้งสองลำ (ตอบค่าประมาณเป็นจำนวนเต็ม)

ก. 78 เมตร ข. 80 เมตร ค. 79 เมตร ง. 81 เมตร

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการคำนวณหาความสูงของวัตถุที่มีความสูงของระดับสายตาเข้ามาเกี่ยวข้องโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ และสามารถแก้ปัญหา คิดคำนวณและเชื่อมโยงความรู้คณิตศาสตร์ได้

20. นาวินยืนอยู่ตรงหน้าผาแห่งหนึ่งซึ่งอยู่สูงจากระดับน้ำทะเล 48.30 เมตร เมื่อเขามองลงไปยังเรือลำหนึ่งกลางทะเล โดยมุมที่แนวสายตาทำกับแนวระดับเป็นมุมก้มมีขนาด 60° ถ้าความสูงจากพื้นถึงตาของนาวินเท่ากับ 1.70 เมตร อยากทราบว่าเรือลำนี้อยู่ห่างจากเชิงหน้าผาประมาณกี่เมตร

ก. 28.97 เมตร ข. 28.87 เมตร ค. 29.97 เมตร ง. 29.87 เมตร

ภาคผนวก จ
ผลการวิเคราะห์เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

หาค่าความตรงตามเนื้อหา (content – validity) จากความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญที่มีต่อความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม คำนวณจากสูตรของโรวินลลีและแฮมเบิลตัน (Rowinelli and Hambleton)

ตารางที่ 5 ค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
วิชาคณิตศาสตร์กับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

ข้อที่	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่า IOC	สรุปผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
1	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
2	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
3	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
4	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
5	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
6	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
7	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
8	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
9	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
10	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
11	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
12	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
13	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
14	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
15	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
16	1	1	1	1	1.0	ใช้ได้
17	1	1	1	1	1.0	ใช้ได้
18	1	1	1	1	1.0	ใช้ได้
18	1	1	1	1	1.0	ใช้ได้
20	1	1	1	1	1.0	ใช้ได้

ตารางที่ 5 (ต่อ)

ข้อที่	คะแนนความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ			รวม	ค่า IOC	สรุปผล
	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3			
21	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
22	0	1	1	2	0.67	ใช้ได้
23	1	1	0	2	0.67	ใช้ได้
24	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
25	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
26	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
27	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
28	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
29	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
30	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
31	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
32	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
33	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
34	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
35	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
36	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
37	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
38	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
39	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้
40	1	1	1	3	1.0	ใช้ได้

จากตารางที่ 5 แสดงให้เห็นว่า ข้อสอบแต่ละข้อมีค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมมีค่าตั้งแต่ .67 ถึง 1 ซึ่งสามารถนำไปใช้ได้

ตารางที่ 6 ค่าความยากง่าย ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ
 วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติของนักเรียน
 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

ข้อที่	ค่าความยากง่าย	ค่าอำนาจจำแนก
1	0.63	0.37
2	0.78	0.70
3	0.74	0.78
4	0.61	0.21
5	0.41	0.24
6	0.41	0.24
7	0.52	0.23
8	0.74	0.64
9	0.65	0.53
10	0.35	0.29
11	0.37	0.32
12	0.28	0.22
13	0.63	0.51
14	0.48	0.32
15	0.65	0.26
16	0.70	0.86
17	0.61	0.76
18	0.67	0.84
19	0.61	0.34
20	0.48	0.32

$$\begin{aligned}r_{tt} &= \frac{n}{n-1} \left[1 - \frac{\sum pq}{S_t^2} \right] \\ &= \frac{20}{19} \left[1 - \frac{4.5175}{17.4372} \right] \\ &= 0.78\end{aligned}$$

ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ทั้งฉบับ
มีค่าเท่ากับ 0.78

ประวัติย่อผู้วิจัย

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ – ชื่อสกุล	นางสาวกัญญารัตน์ หนูชุม
วันเดือนปีเกิด	15 กุมภาพันธ์ 2523
สถานที่เกิด	33 หมู่ 7 ตำบลเขาโร อำเภอทุ่งสง จังหวัดนครศรีธรรมราช 80110
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	33 หมู่ 7 ตำบลเขาโร อำเภอทุ่งสง จังหวัดนครศรีธรรมราช 80110
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	-
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	-
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2542	ม. 6 แผนการเรียนวิทย์ – คณิต โรงเรียนสตรีทุ่งสง อำเภอทุ่งสง จังหวัดนครศรีธรรมราช
พ.ศ. 2546	ครุศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สถาบันราชภัฏสุราษฎร์ธานี อำเภอเมือง จังหวัดสุราษฎร์ธานี
พ.ศ. 2549	การศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา