

อินทิกร็ดตามเส้นทางสำหรับกำแพงศักย์อนันต์

อัฐชัย ถาวรสุวรรณ

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
มหาวิทยาลัยทักษิณ

2550



ใบรับรองวิทยานิพนธ์
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
มหาวิทยาลัยทักษิณ

ชื่อวิทยานิพนธ์ : อินทิกัลตามเส้นทางสำหรับกำแพงศักย์อนันต์

ชื่อ - สกุลผู้ทำวิทยานิพนธ์ : นายอภิสชัย ถาวรสุวรรณ

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

.....ประธานที่ปรึกษา
(รองศาสตราจารย์ ดร. นิคม ชูศิริ)

.....กรรมการที่ปรึกษา
(อาจารย์ ดร. ประสงค์ เกษราธิคุณ)

มหาวิทยาลัยทักษิณอนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

.....
(รองศาสตราจารย์ ประดิษฐ์ มีสุข)
คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

สำเร็จการศึกษา เมื่อวันที่ 30 เดือน มีนาคม พ.ศ. 2550

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยทักษิณ

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์นี้ได้ศึกษาปัญหาการกระจายตัวของน้ำในหนึ่งมิติ โดยอาศัยวิธีอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมน ได้คำนวณตัวแปรกระจายสำหรับกระจายตัวของน้ำโดยวิธีอินทิกรัลตามเส้นทางแบบลากรางเกียน ผลเฉลยที่ได้อาศัยวิธีจุดภาพของกระจุกเงาซึ่งสมมูลกับการรวมเส้นทางแบบฉบับ ตัวแปรกระจายที่ได้อยู่ในรูปแบบที่กระชับ และจากตัวแปรกระจายดังกล่าวเราสามารถนำไปคำนวณหาสถานะจะจางโมเมนต์และระดับพลังงานที่เป็นไปได้ของอนุภาคที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของการกระจายตัวของน้ำในหนึ่งมิติ

Abstract

The infinite potential barrier problem in one dimension was studied using Feynman path integral approach. The Lagrangian path integral was used to evaluate the propagator of this potential. The image point method equivalent was introduced to evaluate the propagator. The propagator of the infinite potential barrier can be calculated in a closed form. Moreover, all of momentum eigenstates and possible energy levels of a particle under the influence of an infinite potential barrier in one dimension were also evaluated.

ประกาศคุณูปการ

ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่ออำนวย ถาวรสุวรรณ คุณแม่สมบุญ ถาวรสุวรรณและ
คุณชูมาพร ช่วยสุริยา รวมทั้งญาติ พี่น้อง ที่เป็นกำลังใจให้ด้วยดีตลอดมา

ขอขอบคุณบัณฑิตวิทยาลัย และภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ
ที่สนับสนุนงานวิจัย

ขอขอบคุณ รศ.ดร.นิคม ชูศิริ และ ดร.ประสงค์ เกษราธิคุณ อาจารย์ที่ปรึกษา
วิทยานิพนธ์ ที่ได้ให้คำปรึกษา คำแนะนำ ติดตามแก้ไข ปรับปรุงและให้แนวคิดอันเป็นประโยชน์แก่
งานวิจัย ทำให้ผู้วิจัยได้รับประสบการณ์ ความรู้ จนสำเร็จตามวัตถุประสงค์ที่ได้ตั้งเป้าหมายไว้

ขอขอบคุณคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ทุกท่านที่ให้คำชี้แนะและตรวจทานแก้ไข
วิทยานิพนธ์จนสำเร็จสมบูรณ์เป็นเล่มดังปรากฏนี้

ขอขอบคุณ อาจารย์สิทธิศานต์ วิชาญาณภาพ อาจารย์จรัส จารุมณี อาจารย์มณู จิตรสิงห์
อาจารย์ณิชา ประสงค์จันทร์ อาจารย์สมบุญ ประสงค์จันทร์ อาจารย์นุชลี ทิพย์มณฑา อาจารย์
นพดล โพธิ์ท่าเหินดี อาจารย์วรวิภา ด้วงศิริ อาจารย์ภาณุณีย์ ตุกชุมแสง อาจารย์อดิศักดิ์
จิตภูษา อาจารย์พฤษภา อุษยสุข อาจารย์สิริพร อังกูรรัตน์ อาจารย์แผนกวิชาวิทยาศาสตร์ คณะ
ศิลปศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลศรีวิชัย ที่ให้กำลังใจ และคำแนะนำอันดีเสมอ
มา

ขอขอบคุณ อาจารย์เสวี เรืองดิษฐ์ อาจารย์อนุมัติ เดชนะ อาจารย์อภิชาติ พัฒน
วิริยะพิศาล อาจารย์สมพร ศรีอำภานนท์ อาจารย์บรรจง ทองสร้าง อาจารย์ประสาน เจียรบุตร
อาจารย์วิฑูร สุจริตธุการ อาจารย์อภิรักษ์ ฐิติภรณ์พันธ์ อาจารย์ชาญยุทธ ฟองสุวรรณ
อาจารย์เฉลิมชนม์ วรธนทอง อาจารย์ธนพงศ์ พันธุ์ทอง อาจารย์ธเนศ สีนประจิม อาจารย์
เจษฎา คำของ คุณวนิดา ศรีอุทรวรงค์ คุณจำเริญศรี พวงแก้ว คุณศุภกร กตาทิการกุล
คุณนฤฤทธิ์ กล่อมพงษ์ คุณวิทยา ทิพย์อักษร คุณศุภวุฒิ เบ็ญจุล คุณสุเจนต์ พรหมเหมือน
ตลอดรวมถึง พี่ๆ เพื่อนๆ และน้องๆ ชาวฟิสิกส์ทุกท่าน นักศึกษาปริญญาโทหลักสูตรวิทยาศาสตร
มหาบัณฑิตสาขาฟิสิกส์ทุกคน ที่ให้กำลังใจตลอดทั้งคำแนะนำที่เป็นประโยชน์

สุดท้ายนี้ขอขอบคุณงามความดีและประโยชน์ที่พึงได้รับจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้แก่
คุณพ่อ คุณแม่ ครูบาอาจารย์ และผู้มีพระคุณทั้งหลายที่ให้กำลังใจและปรารถนาดีต่อข้าพเจ้า
ตลอดมา

อภัยสิทธิ์ ถาวรสุวรรณ

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ความสำคัญและที่มาของปัญหา	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย	3
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	3
ขอบเขตของการวิจัย	3
ระยะเวลาที่ทำการวิจัย	4
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	5
ปัญหาอิเล็กทรอนิกส์ในศักราชแบบต่างๆ	5
ปัญหาค่าแรงแคปซิทอร์	6
สมการคลื่นของซเรดิงเงอร์	6
สมการคลื่นซเรดิงเงอร์แบบไม่ขึ้นกับเวลา	8
อนุภาคอิสระ	10
ศักย์เป็นขั้นและค่าแรงแคปซิทอร์	11
3 อินทิกรัลตามเส้นทางและการประยุกต์	20
อินทิกรัลตามเส้นทางเบื้องต้น	20
ฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของอนุภาค	26
การคำนวณหาตัวแผ่กระจายของอนุภาคอิสระ	28
ฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้น	31
ฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้น	35
4 ผลการวิจัย	38
ปัญหาค่าแรงแคปซิทอร์	38
สถานะเจาะจงโมเมนต์และระดับพลังงานที่เป็นไปได้	44
5 สรุป	50
บรรณานุกรม	52
ประวัติย่อผู้วิจัย	55

สารบัญภาพประกอบ

ภาพที่		หน้า
1	แสดงศักย์ไฟฟ้าเป็นชั้น	11
2	แสดงศักย์ไฟฟ้าเป็นชั้น เมื่อ $V_0 = \infty$	18
3	แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคจากจุด a ไปยังจุด b	21
4	แสดงเส้นทางเดินของอนุภาคจากจุด x_a ไปยังจุด x_b	23
5	แสดงเส้นทางแบบฉบับ $\bar{x}(t)$ และส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากเส้นทางแบบฉบับ $y(t)$	24
6	แสดงเส้นทางแบบฉบับสองเส้นทางที่เชื่อมต่อดูจุด (x_a, t_a) และ (x_b, t_b) พร้อมด้วยจุดภาพในกระจกเงาที่คล้องจองกัน	42

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

วิชากลศาสตร์แบบฉบับหรือกลศาสตร์ดั้งเดิม (classical mechanics) เป็นวิชาที่ศึกษาปรากฏการณ์ธรรมชาติของวัตถุหรือระบบวัตถุที่มีขนาดใหญ่ ปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นมีสาเหตุมาจากแรงที่กระทำต่อวัตถุหรือระบบวัตถุนั้น โดยธรรมชาติแรงที่สำคัญและพบบ่อยในชีวิตประจำวันคือ แรงโน้มถ่วง แรงแม่เหล็ก และแรงยืดหยุ่นหรือแรงฮาร์มอนิก เป็นต้น กลุ่มของแรงเหล่านี้จัดเป็นแรงอนุรักษ์ (conservative force) กล่าวคืองาน (work) อันเนื่องมาจากแรงเหล่านี้จะไม่ขึ้นกับเส้นทางของวัตถุ แต่จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสุดท้ายของวัตถุ โดยที่งานเนื่องจากแรงดังกล่าวสอดคล้องกับกฎอนุรักษ์งานและพลังงาน (Law of conservation of work and energy) กล่าวคือพลังงานรวมของระบบจะคงที่ทุกตำแหน่งเมื่อระบบอยู่ภายใต้แรงอนุรักษ์

วิชากลศาสตร์แบบฉบับที่นักวิทยาศาสตร์ได้คิดค้นเพื่อนำมาอธิบายปรากฏการณ์ธรรมชาติได้ผลอย่างดีเลิศจนกระทั่งถึงปลายศตวรรษที่ 19 มีสาระสำคัญพอสรุปได้ดังนี้ ในระบบต่างๆ ทางฟิสิกส์ ปริมาณทั้งหลายสามารถแทนได้ด้วยตัวแปรพลวัต (dynamical variable) ที่มีนิยามชัดเจน โดยตัวแปรเหล่านี้ยังแสดงถึงสถานะ (state) ของระบบขณะใดขณะหนึ่งด้วย ส่วนสถานะใดๆ สามารถติดตามได้ถ้าเพียงแต่ทราบสถานะเบื้องต้นเท่านั้น หลักนี้กล่าวในเชิงคณิตศาสตร์หมายความว่าตัวแปรพลวัตเหล่านี้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) อันดับหนึ่งที่มีตัวแปรเป็นเวลา ดังนั้นจุดประสงค์ของการศึกษาวิชากลศาสตร์แบบฉบับคือความพยายามของนักฟิสิกส์ที่จะแสวงหาตัวแปรพลวัตต่างๆ ที่สอดคล้องกับสมการการเคลื่อนที่ (equation of motion) เพื่อใช้ทำนายปรากฏการณ์ธรรมชาติ

นับตั้งแต่นิวตัน (Newton) ได้คิดค้นวิชากลศาสตร์ (mechanics) จนกระทั่งถึงปลายศตวรรษที่ 19 ยังไม่เคยปรากฏว่ามีปรากฏการณ์ใดขัดแย้งกับหลักสำคัญดังกล่าวข้างต้น แม้มีปรากฏการณ์ใหม่ๆ ที่ยุ่งยากเกิดขึ้นก็สามารถแก้ปัญหาได้โดยการเพิ่มหรือดัดแปลงตัวแปรหรือเพิ่มสมการใหม่ ทำให้กลศาสตร์แบบฉบับได้ก้าวหน้าไปอย่างไม่หยุดยั้งความก้าวหน้าดังกล่าวได้เจริญรุดหน้าไปเรื่อยๆ จนถึงปี ค.ศ. 1900 ก็เริ่มมีอุปสรรคเกิดขึ้นทั้งนี้เพราะเราได้เข้าไปสู่ปรากฏการณ์ธรรมชาติที่มีขนาดเล็กในระดับอะตอมหรือเล็กกว่าอะตอม ในระดับนี้หลักต่างๆ ที่มีอยู่ในกลศาสตร์แบบฉบับไม่อาจนำมาใช้ได้ การอธิบายปรากฏการณ์เหล่านี้ต้องอาศัยหลักฟิสิกส์แนวใหม่ การค้นพบฟิสิกส์แนวใหม่เกิดขึ้นหลายระยะและมีบุคคลหลายกลุ่มเกี่ยวข้องด้วย ทว่า

จุดเริ่มต้นที่ถือว่าเป็นการค้นพบฟิสิกส์แนวใหม่คือปี ค.ศ.1925 ซึ่งเป็นปีที่ชเรอดิงเงอร์ (Schrodinger) ได้ให้กำเนิดวิชากลศาสตร์ควอนตัม (quantum mechanics)

หลักการของชเรอดิงเงอร์คือ อนุภาคที่มีขนาดเล็กในระดับอะตอมหรือเล็กกว่าจะมีพฤติกรรมแบบคลื่นสสาร ตำแหน่งและโมเมนตัมของอนุภาคนั้นไม่อาจทำนายได้แน่นอน แต่จะสอดคล้องหลักความไม่แน่นอนของไฮเซนเบิร์ก (The Heisenberg Uncertainty Principle) ดังนั้นจึงไม่กล่าวถึงเส้นทางเดินของอนุภาคเลย ปริมาณต่างๆ ที่สังสรรค์อยู่กับอนุภาคสามารถหาได้จากฟังก์ชันคลื่น (wave function) ซึ่งสมนัยกับอนุภาคนั้น โดยฟังก์ชันคลื่นที่กล่าวถึงนี้จะต้องสอดคล้องกับสมการชเรอดิงเงอร์ (Schrodinger wave equation) ที่มีตัวแปรเป็นตำแหน่งและเวลา (x, y, z, t) ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z, t) \right) \psi(x, y, z, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, y, z, t) \quad (1.1)$$

เมื่อ ∇^2 และ $V(x, y, z, t)$ เป็นตัวดำเนินการลาปลาเซียน และพลังงานศักย์ของอนุภาคตามลำดับ ข้อจำกัดของสมการชเรอดิงเงอร์ก็คือ หากพลังงานศักย์ของระบบมีรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ซับซ้อนและขึ้นต่อเวลาอย่างชัดเจนแล้ว โอกาสที่จะแก้สมการหาคำตอบของฟังก์ชันคลื่อนั้นจึงแทบเป็นไปไม่ได้เลย

ในกรณีพิเศษเมื่อพลังงานศักย์ของระบบไม่ขึ้นต่อเวลาอย่างชัดเจน กล่าวคือ $V = V(x, y, z)$ สมการชเรอดิงเงอร์ในสมการ (1.1) จะลดรูปไปสู่

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z) \right) \psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z) \quad (1.2)$$

และเรียกสมการ (1.2) นี้ว่าสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นต่อเวลา จากสมการ (1.2) จะเห็นว่าแม้ตัวแปร t จะถูกกำจัดออกไปหนึ่งตัวแปรแล้ว หากพลังงานศักย์มีรูปแบบที่ซับซ้อนก็ใช้ว่าจะสามารถแก้สมการหาคำตอบฟังก์ชันคลื่นได้โดยง่าย

ต่อมาในปี ค.ศ.1948 ฟายน์แมน (Feynman) ได้เสนอกลศาสตร์ควอนตัมแนวใหม่คือ อินทิกรัลตามเส้นทาง (path integrals) โดยฟายน์แมนได้นำเสนอตัวแผ่กระจาย (propagator) ของอนุภาคซึ่งอยู่ในรูปของอินทิกรัลตามเส้นทางที่เป็นไปได้ทั้งหมดของอนุภาค นับตั้งแต่นั้นเป็นต้นมากลศาสตร์ควอนตัมตามแบบฉบับของฟายน์แมนได้รับความสนใจจากนักฟิสิกส์เป็นจำนวนมาก ทั้งนี้เนื่องจากการพิสูจน์ว่าอินทิกรัลตามเส้นทางดังกล่าวมีประโยชน์ต่อวงการฟิสิกส์

หลายสาขา อย่างไรก็ตามมีข้อเท็จจริงที่น่าประหลาดใจเป็นอย่างยิ่งว่าอินทิกรัลตามเส้นทางของ ฟายน์แมนกลับขาดประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาบางปัญหา อาทิเช่น ปัญหาอิเล็กทรอนิกส์ คูลอมป์ ปัญหากำแพงศักย์อนันต์ และปัญหาอนุภาคในกล่องหรือบ่อจตุรัสลึกอนันต์ สำหรับ วิทยานิพนธ์นี้ผู้ทำการวิจัยสนใจศึกษาปัญหามุมกำแพงศักย์อนันต์ โดยจะศึกษาวิธีการให้ได้มาของ ตัวแผ่กระจายของอนุภาคอิสระกรณีเคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของกำแพงศักย์สูงอนันต์ และจากตัว แผ่กระจายดังกล่าวก็สามารถนำไปหาปริมาณทางฟิสิกส์อื่นๆ ได้

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1.2.1 เพื่อศึกษาอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมนของอนุภาคอิสระกรณีเคลื่อนที่ ภายใต้อิทธิพลของกำแพงศักย์สูงอนันต์และอาศัยวิธีจุดภาพของกระจกเงา

1.2.2 เพื่อคำนวณหาตัวแผ่กระจายของอนุภาคอิสระกรณีเคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของ กำแพงศักย์สูงอนันต์

1.2.3 เพื่อคำนวณหาสถานะเจาะจงโมเมนตัมและระดับพลังงานที่เป็นไปได้ของอนุภาค อิสระกรณีเคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของกำแพงศักย์สูงอนันต์ พร้อมทั้งเปรียบเทียบผลที่ได้กับ สมการชเรอดิงเงอร์

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.3.1 ทำให้เข้าใจวิธีการอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมน ซึ่งนำไปแก้ปัญหาระบบ อนุภาคอิสระกรณีเคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของกำแพงศักย์สูงอนันต์

1.3.2 ทำให้ทราบรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ของตัวแผ่กระจาย สถานะเจาะจงโมเมนตัม และระดับพลังงานที่เป็นไปได้ของอนุภาค

1.3.3 ทำให้ทราบแนวทางในการนำแนวคิดวิธีจุดภาพของกระจกเงาไปประยุกต์ใช้กับ วิธีการอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมนของปัญหามุมกำแพงศักย์สูงอนันต์ และอาจขยายไปสู่ ระบบที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยนี้มุ่งเน้นศึกษาระบบอนุภาคอิสระกรณีเคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของกำแพงศักย์ สูงอนันต์ โดยการนำแนวคิดวิธีจุดภาพของกระจกเงาไปประยุกต์ใช้กับวิธีการอินทิกรัลตามเส้นทาง ของฟายน์แมน

1.5 ระยะเวลาที่ทำการวิจัย

เดือนมิถุนายน พ.ศ. 2549 ถึง เดือนมีนาคม พ.ศ. 2550

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

หลังจากฟายน์แมนได้เสนอกลศาสตร์ควอนตัมแนวใหม่คือวิธีการอินทิกรัลตามเส้นทาง โดยคำนวณหาตัวแผ่กระจายของอนุภาค ซึ่งตัวแผ่กระจายนี้สามารถให้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันคลื่นและพลังงานพร้อมกัน นับตั้งแต่นั้นเป็นต้นมากลศาสตร์ควอนตัมตามแบบฉบับของฟายน์แมนได้รับความสนใจจากนักฟิสิกส์เป็นจำนวนมาก ทั้งนี้เนื่องจากการพิสูจน์ว่าอินทิกรัลตามเส้นทางดังกล่าวมีประโยชน์ต่อวงการฟิสิกส์หลายสาขา แต่อย่างไรก็ตามมีข้อเท็จจริงที่น่าประหลาดใจเป็นอย่างยิ่งว่าอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมนกลับขาดประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาบางปัญหา อาทิเช่น ปัญหาอิเล็กตรอนในศักย์คูโลมบ์ของอะตอมไฮโดรเจน ปัญหากำแพงศักย์อนันต์ และปัญหาอนุภาคในกล่องหรือบ่อจตุรัสสี่กอนันต์ เป็นต้น ซึ่งการแก้ปัญหาเหล่านี้สามารถคำนวณได้โดยง่ายด้วยวิธีการของชเรอดิงเงอร์ จากปัญหาดังกล่าวจึงทำให้มีนักวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศพยายามที่จะใช้วิธีการอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมนในการแก้ปัญหานี้

2.1 ปัญหาอิเล็กตรอนในศักย์แบบต่างๆ

โฮ และอิโนมาตะ (Ho and Inomata. 1982) ประสบความสำเร็จในการสร้างรูปแบบการอินทิเกรตตามเส้นทางของอะตอมไฮโดรเจน โดยสามารถคำนวณฟังก์ชันกรีน (Green's function) ของอิเล็กตรอนในรูปแบบที่กระชับได้ และจากฟังก์ชันกรีนดังกล่าว นิคม ชูศิริ และ วิรุฬห์ สายคณิต (Choosiri and Sayakanit. 1984) สามารถคำนวณระดับพลังงานที่เป็นไปได้และฟังก์ชันคลื่นของอะตอมไฮโดรเจนในสามมิติได้

นอกจากนี้ได้มีการศึกษาอินทิกรัลตามเส้นทางของอนุภาคไฟฟ้าภายใต้แรงฮาร์มอนิกและสนามแม่เหล็กคงที่ โดยสามารถคำนวณตัวแผ่กระจายของอนุภาคไฟฟ้าภายใต้แรงฮาร์มอนิกและสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอได้ (นิคม ชูศิริ. 2540) และยิ่งไปกว่านั้นยังประสบความสำเร็จในการศึกษาอินทิกรัลตามเส้นทางของอิเล็กตรอนภายใต้อิทธิพลของแรงฮาร์มอนิก สนามแม่เหล็ก สนามไฟฟ้า และศักย์ที่ไร้ระเบียบ (disorder potential) โดยคำนวณความหนาแน่นสถานะและระดับพลังงานของอิเล็กตรอนได้ (นิคม ชูศิริ. 2541)

2.2 ปัญหาการแก้แรงแศกย์อนันต์

กู๊ดแมน (Goodman. 1981) ได้นำเสนอวิธีจุดภาพกระจกเงา (image point method) และได้นำไปประยุกต์ใช้กับอินทิกรัลตามเส้นทางของปัญหาการแก้แรงแศกย์อนันต์ โดยสามารถคำนวณหาตัวแผ่กระจายของอนุภาคภายใต้อิทธิพลของการแก้แรงแศกย์ดังกล่าวได้

จากที่กล่าวมาจะเห็นได้ว่าอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมนสามารถนำมาประยุกต์และแก้ปัญหาต่างๆ ทางควอนตัมได้ แม้ในบางปัญหาจะเป็นไปได้ยากก็ตาม ความแตกต่างโดยสิ้นเชิงระหว่างวิธีการของชเรอดิงเงอร์และวิธีการของฟายน์แมนกล่าวคือ วิธีการของชเรอดิงเงอร์ใช้การแก้สมการเชิงอนุพันธ์คำนวณหาฟังก์ชันคลื่น ในขณะที่วิธีการของฟายน์แมนนั้นใช้การอินทิกรัลตามเส้นทางคำนวณหาตัวแผ่กระจายออกมา วิธีการทั้งสองมีความยากง่ายแตกต่างกันขึ้นอยู่กับรูปแบบของปัญหาตัวอย่างเช่น ระบบของอิเล็กตรอนในอะตอมไฮโดรเจนสามารถคำนวณได้โดยง่ายด้วยวิธีการของชเรอดิงเงอร์ แต่ในการหาตัวแผ่กระจายของอิเล็กตรอนด้วยวิธีการของฟายน์แมนกลับกลายเป็นเรื่องยากจนแทบเป็นไปไม่ได้ ในทางกลับกันการหาฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคอิเล็กตรอนที่อยู่ภายใต้แรงฮาร์มอนิก สนามแม่เหล็ก และสนามไฟฟ้าที่ขึ้นต่อเวลาโดยใช้วิธีการของชเรอดิงเงอร์ กลับกลายเป็นเรื่องยากและไม่น่าเป็นไปได้

2.3 สมการคลื่นของชเรอดิงเงอร์

ที่มาของสมการคลื่นชเรอดิงเงอร์ ซึ่งไม่ใช่เป็นการพิสูจน์ โดยพิจารณาให้ฟังก์ชันคลื่นมีรูปแบบเป็น

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad (2.1)$$

เมื่อ A = แอมพลิจูด (amplitude) ของคลื่น

ω = ความถี่เชิงมุม (angular frequency) = $2\pi\nu$

k = เลขคลื่น (wave number) = $\frac{2\pi}{\lambda}$

โดย ω และ k สัมพันธ์กับพลังงาน E และโมเมนตัม p ของอนุภาคตามลำดับ ดังนี้

$$E = h\nu = \frac{h}{2\pi} 2\pi\nu = \frac{h}{2\pi} \omega = \hbar\omega$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k$$

หาอนุพันธ์ของ $\Psi(x, t)$ เทียบกับ x จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial x} &= ik\Psi(x, t) \\ \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} &= -k^2\Psi(x, t) \\ -\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} &= (\hbar k)^2 \Psi(x, t) \\ -\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} &= p^2 \Psi(x, t)\end{aligned}\tag{2.2}$$

และหาอนุพันธ์ของ $\Psi(x, t)$ เทียบกับ t จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} &= -i\omega\Psi(x, t) \\ i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} &= \hbar\omega\Psi(x, t) \\ i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} &= E\Psi(x, t)\end{aligned}\tag{2.3}$$

สำหรับอนุภาคที่มีอัตราเร็วต่ำเทียบกับอัตราเร็วแสงจะได้ว่า

พลังงานจลน์ + พลังงานศักย์ = พลังงานทั้งหมด

$$\frac{p^2}{2m} + V = E\tag{2.4}$$

คูณทั้งสองข้างของสมการ (2.4) ด้วย $\Psi(x, t)$

$$\frac{p^2}{2m} \Psi(x, t) + V\Psi(x, t) = E\Psi(x, t)\tag{2.5}$$

และแทนสมการ (2.2) และสมการ (2.3) ลงในสมการ (2.5) ได้ผลดังนี้

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V\psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad (2.6)$$

สมการ (2.6) คือสมการคลื่นชเรอดิงเงอร์ใน 1 มิติที่ขึ้นกับเวลา (time dependent Schrodinger) ในทำนองเดียวกัน กรณี 3 มิติ จะได้สมการคลื่นชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา คือ

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(x, y, z, t) + V\psi(x, y, z, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, y, z, t) \quad (2.7)$$

2.4 สมการคลื่นชเรอดิงเงอร์แบบไม่ขึ้นกับเวลา

จากสมการ (2.7) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับ $\psi(x, t)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตำแหน่งและเวลา เนื่องจากระบบต่างๆ ในทางฟิสิกส์ส่วนใหญ่แล้วพลังงานศักย์ V ของระบบไม่เป็นฟังก์ชันของเวลาอย่างชัดเจน ดังนั้นสามารถแก้สมการชเรอดิงเงอร์ได้ง่ายขึ้น โดยใช้วิธีการแยกตัวแปร โดยแยกฟังก์ชันคลื่นออกเป็นผลคูณของสองฟังก์ชัน ฟังก์ชันหนึ่งขึ้นกับตำแหน่งเพียงอย่างเดียวและอีกฟังก์ชันหนึ่งขึ้นอยู่กับเวลาอย่างเดียว ดังนี้

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z)T(t) \quad (2.8)$$

แทนค่า $\Psi(x, y, z, t)$ จากสมการ (2.8) ลงในสมการ (2.7)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} T(t) \nabla^2 \psi(x, y, z) + V(x, y, z) \psi(x, y, z) T(t) = i\hbar \psi(x, y, z) \frac{dT(t)}{dt} \quad (2.9)$$

จากสมการ (2.9) หารตลอดด้วย $\psi(x, y, z)T(t)$ จะได้

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x, y, z)} \nabla^2 \psi(x, y, z) + V(x, y, z) = i\hbar \frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} \quad (2.10)$$

จะเห็นว่าทางด้านซ้ายมือของสมการ (2.10) เป็นฟังก์ชันของตำแหน่งเพียงอย่างเดียว และทางขวามือเป็นฟังก์ชันของเวลาอย่างเดียว แสดงว่าแต่ละข้างของสมการ (2.10) ต้องเท่ากับค่าคงที่เท่านั้น นั่นคือ

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,y,z)+V(x,y,z)\psi(x,y,z)=C\psi(x,y,z) \quad (2.11)$$

และ
$$i\hbar\frac{dT(t)}{dt}=CT(t) \quad (2.12)$$

จากสมการ (2.12) หาผลเฉลยของสมการได้ดังนี้

$$\frac{dT(t)}{T(t)}=\frac{C}{i\hbar}dt=-\frac{iC}{\hbar}dt$$

$$\int\frac{dT(t)}{T(t)}=-\int\frac{iC}{\hbar}dt$$

$$\ln T(t)=-\frac{iCt}{\hbar}$$

$$T(t)=e^{-\frac{iCt}{\hbar}} \quad (2.13)$$

เนื่องจาก $e^{-\frac{iCt}{\hbar}}=\cos\left(\frac{Ct}{\hbar}\right)-i\sin\left(\frac{Ct}{\hbar}\right)$ ดังนั้น $\frac{C}{\hbar}=\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi E}{h}=\frac{E}{\hbar}$ (2.14)

จากสมการ (2.14) จะได้ว่า C ก็คือ E ซึ่งเป็นพลังงานรวมของระบบ และเมื่อนำไปแทนค่าลงในสมการ (2.11) และสมการ (2.13) จะได้

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,y,z)+V(x,y,z)\psi(x,y,z)=E\psi(x,y,z) \quad (2.15)$$

และ
$$T(t)=e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad (2.16)$$

เมื่อแทนสมการ (2.16) ลงในสมการ (2.8) ได้ผล

$$\Psi(x,y,z,t)=\psi(x,y,z)e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \quad (2.17)$$

2.5 อนุภาคอิสระ (the free particle)

อนุภาคอิสระเป็นอนุภาคที่เคลื่อนที่โดยปราศจากแรงภายนอกหรือภายใต้พลังงานศักย์คงที่ ทั้งนี้เพราะว่าความสัมพันธ์ระหว่างแรงกับพลังงานศักย์เป็นไปตามสมการ $F(x,t) = -\frac{\partial V(x,t)}{\partial x}$ เพื่อความสะดวกจะเลือกค่า $V(x,t) = 0$ ซึ่งหมายถึงอนุภาคอิสระจะหยุดนิ่งหรือเคลื่อนที่ด้วยโมเมนตัมที่คงที่ โดยมีพลังงานรวม E เป็นค่าคงที่

สำหรับกลศาสตร์ควอนตัม สามารถหาผลเฉลยของสมการคลื่นชเรอดิงเงอร์กรณี $V(x,t) = 0$ เนื่องจากพลังงานศักย์นี้ไม่เป็นฟังก์ชันของเวลา t ทำให้สามารถใช้สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลาได้ นั่นคือ

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E\psi(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0 \quad (2.18)$$

เมื่ออนุภาคอิสระมีพลังงานเป็น $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ และแทนค่า E ลงในสมการ (2.18) จะได้

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + k^2 \psi(x) = 0 \quad (2.19)$$

ผลเฉลยของสมการ (2.19) จะหาได้สำหรับพลังงานใดๆ ที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ ($E \geq 0$) และจะได้ผลเฉลยเป็น

$$\psi(x) = e^{\pm ikx}$$

เมื่อ $\psi(x) = e^{+ikx}$ แทนอนุภาคอิสระ โมเมนตัม $p = \hbar k$ เคลื่อนที่ในทิศ $+x$

เมื่อ $\psi(x) = e^{-ikx}$ แทนอนุภาคอิสระ โมเมนตัม $p = \hbar k$ เคลื่อนที่ในทิศ $-x$

ดังนั้นฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคอิสระคือ

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

และเมื่อพิจารณาความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาค

$$|\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$$

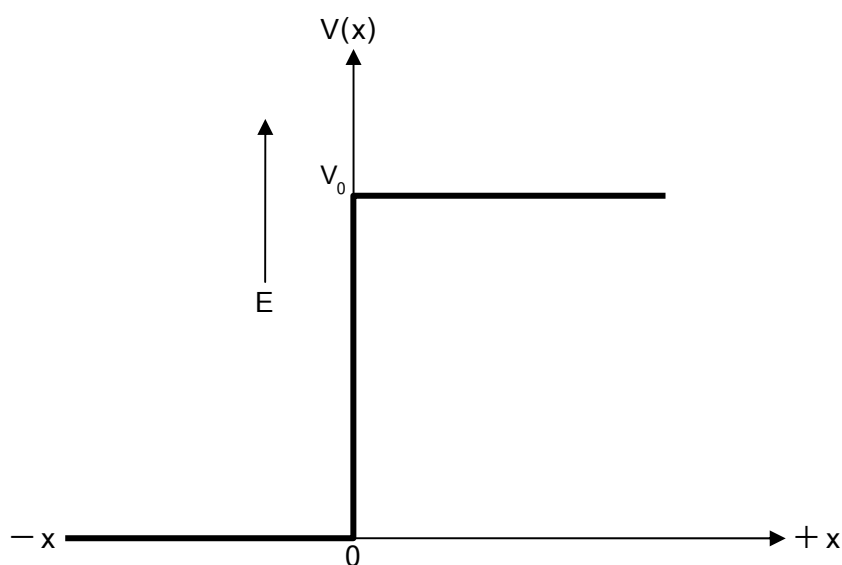
$$= 1$$

แสดงว่าโอกาสที่จะพบอนุภาคมีค่าเท่ากันทุกแห่ง ดังนั้นอนุภาคจะอยู่ตรงไหนก็ได้ตั้งแต่ $-\infty$ ถึง $+\infty$ นั่นคือ $\Delta x = \infty$ ซึ่งสอดคล้องกับหลักความไม่แน่นอนของไฮเซนเบิร์ก

กล่าวคือ $\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar}{\infty} = 0$ หมายความว่าโมเมนตัมของอนุภาคมีค่าแน่นอนนั่นเอง

2.6 ศักย์เป็นขั้น (The step potential) และกำแพงศักย์อนันต์ (Infinite potential barrier)

การหาฟังก์ชันคลื่น $\Psi(x,t)$ สำหรับอนุภาคที่เคลื่อนที่ผ่านพลังงานศักย์ ดังแสดงในภาพที่ 1



ภาพที่ 1 แสดงศักย์ไฟฟ้าเป็นขั้น

จากภาพที่ 1 เมื่อ $x \geq 0$ จะได้พลังงานศักย์ $V(x) = V_0$

เมื่อ $x < 0$ จะได้พลังงานศักย์ $V(x) = 0$

ในทางฟิสิกส์ประมาณได้ว่าลักษณะระบบของศักย์ไฟฟ้าเป็นขั้นคล้ายกับระบบของอนุภาคที่ประจุเคลื่อนที่ไปตามแกนของอิเล็กโทรด (electrod) 2 อัน และอิเล็กโทรดทั้งสองมีความต่างศักย์ไฟฟ้า V ในกรณีนี้แบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 ลักษณะ คือ

2.6.1 กรณี $E > V_0$

จากภาพที่ 1 กำหนดให้อนุภาคเคลื่อนที่มาจากทางซ้ายเพียงอย่างเดียว เมื่ออนุภาคมีพลังงาน E มากกว่า V_0 ในฟิสิกส์แผนเดิมคาดคะเนว่าอนุภาคทั้งหมดจะเคลื่อนที่เข้าไปในช่วง $x > 0$ แต่จะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่ช้าลงกว่าเดิม แต่ในกลศาสตร์ควอนตัมฟังก์ชันคลื่นสอดคล้องสมการชเรอดิงเงอร์

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (2.20)$$

2.6.1.1 ในบริเวณ $x < 0; V = 0$

สมการชเรอดิงเงอร์ คือ

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E\psi(x)$$

หรือ

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_1(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_1(x) = 0 \quad (2.21)$$

กำหนดให้ $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ ดังนั้นสมการ (2.21) จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_1(x) + k^2 \psi_1(x) = 0 \quad (2.22)$$

ผลเฉลยของสมการ (2.22) คือ

$$\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (2.23)$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงที่

e^{ikx} แทนอนุภาคที่เคลื่อนที่ในทิศ $+x$ (คลื่นตกกระทบ)

e^{-ikx} แทนอนุภาคที่เคลื่อนที่ในทิศ $-x$ (คลื่นสะท้อน)

2.6.1.2 ในบริเวณ $x > 0; V = V_0$

สมการชเรอดิงเงอร์ คือ

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_2(x) + V_0 \psi_2(x) = E \psi_2(x)$$

หรือ

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_2(x) + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \psi_2(x) = 0 \quad (2.24)$$

กำหนดให้ $(k')^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}$ ดังนั้นสมการ (2.24) จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_2(x) + (k')^2 \psi_2(x) = 0 \quad (2.25)$$

ผลเฉลยของสมการ (2.25) คือ

$$\psi_2(x) = C e^{ik'x} \quad (2.26)$$

ค่าคงที่ A, B และ C หาได้โดยใช้เงื่อนไขฟังก์ชันคลื่นและอนุพันธ์ของฟังก์ชันคลื่นจะต้องมีค่าต่อเนื่องที่รอยต่อขอบเขต เงื่อนไขนี้เรียกว่า เงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) ในกรณีนี้จะได้ว่า

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \quad (2.27)$$

และ

$$\left. \frac{d\psi_1}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\psi_2}{dx} \right|_{x=0} \quad (2.28)$$

เนื่องจากกำหนดให้อนุภาคเคลื่อนที่มาจากทางซ้าย และเมื่อใช้เงื่อนไขขอบเขต ที่ $x = 0$ จากสมการ (2.27) และสมการ (2.28) จะได้

$$A + B = C \quad (2.29)$$

และ

$$k(A - B) = k'C \quad (2.30)$$

จากสมการ (2.29) และสมการ (2.30) เราหาค่า B และ C ในเทอมของ A ได้ดังนี้

$$B = \frac{(k - k')}{(k + k')} A \quad (2.31)$$

$$C = \frac{2k}{(k + k')} A \quad (2.32)$$

ดังนั้น เมื่อ $x < 0$ จะได้
$$\Psi(x) = A \left[e^{ikx} + \left(\frac{k - k'}{k + k'} \right) e^{-ikx} \right]$$

และเมื่อ $x \geq 0$ จะได้
$$\Psi(x) = \frac{2k}{k + k'} A e^{ik'x}$$

กำหนดให้ v และ v' เป็นความเร็วของอนุภาคในบริเวณ $x < 0$ และบริเวณ $x > 0$ ตามลำดับ จะได้

$$v = \frac{p}{m} = \frac{\hbar k}{m} \quad (2.33)$$

และ
$$v' = \frac{p'}{m} = \frac{\hbar k'}{m} \quad (2.34)$$

เนื่องจากความเข้มของคลื่นที่ตกกระทบคือ $|A|^2$, ความเข้มของคลื่นสะท้อนคือ $|B|^2$ และความเข้มของคลื่นที่ผ่านเข้าไปคือ $|C|^2$ จะได้ฟลักซ์ (flux) ของคลื่นตกกระทบเป็น $v|A|^2$ และฟลักซ์ของคลื่นสะท้อนเป็น $v|B|^2$ รวมทั้งฟลักซ์ของคลื่นที่ผ่านเข้าไปเป็น $v'|C|^2$

เมื่อกำหนดให้ R คือ สัมประสิทธิ์การสะท้อน (reflection coefficient) และ T คือ สัมประสิทธิ์การส่งผ่าน (transmission coefficient) จะได้

$$R = \frac{v|B|^2}{v|A|^2} \quad (2.35)$$

และ
$$T = \frac{v'|C|^2}{v|A|^2} \quad (2.36)$$

จากสมการ (2.31) จะได้

$$R = \left(\frac{k - k'}{k + k'} \right)^2 \quad (2.37)$$

และเมื่อแทนค่า C, v และ v' จากสมการ (2.32), (2.33) และสมการ (2.34) ลงในสมการ (2.36) จะได้สัมประสิทธิ์การส่งผ่าน ดังนี้

$$T = \frac{k'}{k} \left(\frac{2k}{k + k'} \right)^2$$

หรือ

$$T = \frac{4kk'}{(k + k')^2} \quad (2.38)$$

ในกลศาสตร์แผนเดิมสัมประสิทธิ์การสะท้อนควรเท่ากับศูนย์ และสัมประสิทธิ์การส่งผ่าน ควรเท่ากับหนึ่ง แต่ตามกลศาสตร์ควอนตัมได้แสดงให้เห็นว่าสัมประสิทธิ์การสะท้อนไม่เท่ากับศูนย์ และสัมประสิทธิ์การส่งผ่านไม่เท่ากับหนึ่ง แต่ผลรวมของสัมประสิทธิ์การสะท้อนกับสัมประสิทธิ์การส่งผ่านมีค่าเท่ากับหนึ่ง

2.6.2 กรณี $E < V_0$

จากภาพที่ 1 กำหนดให้อนุภาคเคลื่อนที่มาจากทางซ้ายเพียงอย่างเดียว เมื่ออนุภาคมีพลังงาน E น้อยกว่า V_0 ซึ่งพิกัสแผนเดิมทำนายว่า อนุภาคจะผ่านไปทางขวามือไม่ได้ กล่าวคือ อนุภาคจะสะท้อนกลับหมด ซึ่งในกลศาสตร์ควอนตัมฟังก์ชันคลื่นที่ไม่เป็นฟังก์ชันของเวลาสอดคล้องกับสมการชเรอดิงเงอร์

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (2.39)$$

2.6.2.1 ในบริเวณ $x < 0; V = 0$

แทนค่าในสมการ (2.39) จะได้สมการชเรอดิงเงอร์คือ

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E\psi(x)$$

หรือ

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_1(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi_1(x) = 0 \quad (2.40)$$

กำหนดให้ $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ ดังนั้นสมการ (2.40) จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_1(x) + k^2 \psi_1(x) = 0 \quad (2.41)$$

ผลเฉลยของสมการ (2.41) คือ

$$\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (2.42)$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงที่

e^{ikx} แทนอนุภาคที่เคลื่อนที่ในทิศ $+x$ (คลื่นตกกระทบ)

e^{-ikx} แทนอนุภาคที่เคลื่อนที่ในทิศ $-x$ (คลื่นสะท้อน)

2.6.2.2 ในบริเวณ $x > 0; V = V_0$

แทนค่าในสมการ (2.39) ได้สมการชเรอดิงเงอร์คือ

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_2(x) + V_0 \psi_2(x) = E \psi_2(x)$$

หรือ
$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_2(x) - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \psi_2(x) = 0 \quad (2.43)$$

กำหนดให้ $\alpha^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$ ดังนั้นสมการ (2.43) จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi_2(x) - \alpha^2 \psi_2(x) = 0 \quad (2.44)$$

ผลเฉลยของสมการ (2.44) คือ

$$\psi_2(x) = Ce^{-\alpha x} + De^{\alpha x}$$

เนื่องจากเทอม $e^{\alpha x}$ ทำให้ฟังก์ชันของ $\psi_2(x)$ มีค่ามาก เมื่อ $x \rightarrow +\infty$ ซึ่งไม่ตรงกับความเป็นจริง เพราะเมื่อตกกระทบศักย์ V_0 ที่กีดขวาง โอกาสที่อนุภาคจะผ่านเข้ามาต้องน้อยลง จึงตัดเทอม $e^{\alpha x}$ ได้ ดังนั้น ผลเฉลยของสมการ (2.44) จึงเป็น

$$\psi_2(x) = Ce^{-\alpha x} \quad (2.45)$$

ความหนาแน่นของโอกาสที่จะพบอนุภาคในช่วง $x > 0$ คือ $|\psi_2(x)|^2 = |C|^2 e^{-2\alpha x}$ ถึงแม้ค่านี้จะลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อ x มีค่ามากขึ้น อย่างไรก็ตามยังแสดงว่ามีโอกาสที่จะพบอนุภาคในช่วงนี้ กล่าวคือ มีคลื่นของอนุภาคผ่านเข้าไปยังช่วงนี้ได้ ซึ่งในฟิสิกส์แผนเดิมจะผ่านเข้าไปในช่วงนี้ไม่ได้

โดยใช้เงื่อนไขขอบเขตดังที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 2.6.1.2 หาค่าคงที่ A, B และ C ได้ดังนี้

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \quad (2.46)$$

และ

$$\left. \frac{d\psi_1}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\psi_2}{dx} \right|_{x=0} \quad (2.47)$$

จากสมการ (2.46) จะได้

$$A + B = C \quad (2.48)$$

และจากสมการ (2.47) จะได้

$$ik(A - B) = -\alpha C \quad (2.49)$$

หาค่า B และ C ในเทอมของ A จากสมการ (2.48) และสมการ (2.49) ได้ดังนี้

$$B = \frac{(ik + \alpha)}{(ik - \alpha)} A \quad (2.50)$$

และ

$$C = \frac{2ik}{(ik - \alpha)} A \quad (2.51)$$

ดังนั้น เมื่อ $x < 0$ จะได้

$$\psi(x) = A \left[e^{ikx} + \left(\frac{ik + \alpha}{ik - \alpha} \right) e^{-ikx} \right]$$

และเมื่อ $x \geq 0$ จะได้

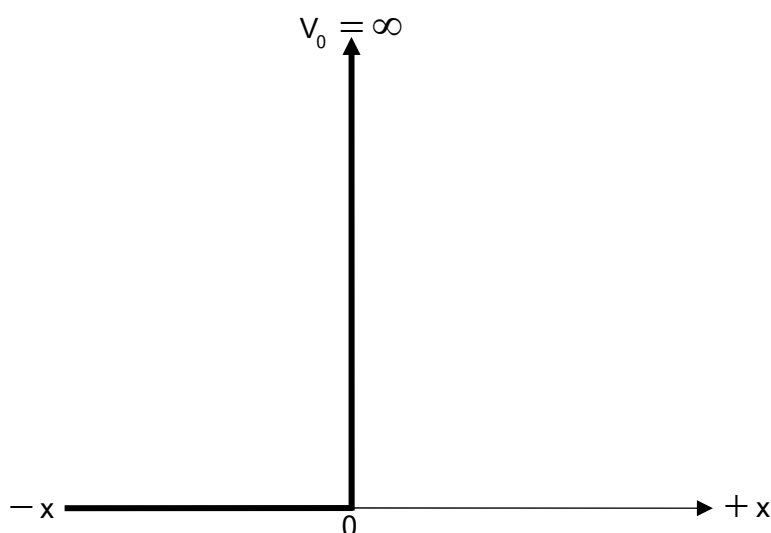
$$\psi(x) = \frac{2ik}{ik - \alpha} A e^{-\alpha x}$$

เนื่องจากกำหนดให้อนุภาคเคลื่อนที่มาจากทางซ้ายเพียงทางเดียว ดังนั้น A ในสมการ (2.42) แทนค่าแอมพลิจูดของคลื่นที่คลั่งจองกับอนุภาคที่ตกกระทบ ส่วน B เป็นแอมพลิจูดของคลื่นสะท้อน ซึ่งมีการสะท้อนที่ศักย์ไม่ต่อเนื่อง คือ ที่จุด $x=0$ และ C เป็นแอมพลิจูดของคลื่นที่ผ่านเข้ามาในช่วงที่ 2 จากสมการ (2.42) จะได้ความเข้มของคลื่นของอนุภาคที่ตกกระทบ คือ $(A^* e^{-ikx})(A e^{ikx}) = |A|^2$ และความเข้มของคลื่นสะท้อนกลับ คือ $(B^* e^{ikx})(B e^{-ikx}) = |B|^2$ จากสมการ (2.50) จะได้

$$|B|^2 = \left[\left(\frac{ik + \alpha}{ik - \alpha} \right) A \right] \left[\left(\frac{-ik + \alpha}{-ik - \alpha} \right) A^* \right] = |A|^2$$

แสดงว่าความเข้มของคลื่นที่ตกกระทบและคลื่นสะท้อนกลับมีค่าเท่ากัน หมายความว่าเมื่ออนุภาคที่มี $E < V_0$ มาถึงศักย์เป็นขั้น อนุภาคจะสะท้อนกลับรวมทั้งคลื่นที่ผ่านเข้าไปในช่วงที่ 2 เพียงเล็กน้อยด้วย

ในกรณีที่ศักย์เป็นขั้นเมื่อ $V_0 = \infty$ ย่อมส่งผลให้ $\alpha = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$ มีค่าเป็นอนันต์ด้วยเช่นกัน ปัญหาศักย์เป็นขั้นจะกลายเป็นปัญหากำแพงศักย์อนันต์ ดังแสดงในภาพที่ 2



ภาพที่ 2 แสดงศักย์ไฟฟ้าเป็นขั้น เมื่อ $V_0 = \infty$

โดยพิจารณาภาพที่ 2 และผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์ กรณี $E < V_0$ เมื่อ $V_0 = \infty$ ดังนั้น

บริเวณ $x < 0$, $\psi(x) = A(e^{ikx} - e^{-ikx}) = A' \sin kx$

หรือ $\psi_p(x) = A' \sin \frac{px}{\hbar}$ (2.52)

และบริเวณ $x > 0$, $\psi(x) = 0$ (2.53)

กล่าวคือ กรณีกำแพงศักย์อนันต์อนุภาคไม่อาจฝักำแพงศักย์เข้าไปในบริเวณ $x > 0$ ได้เลย

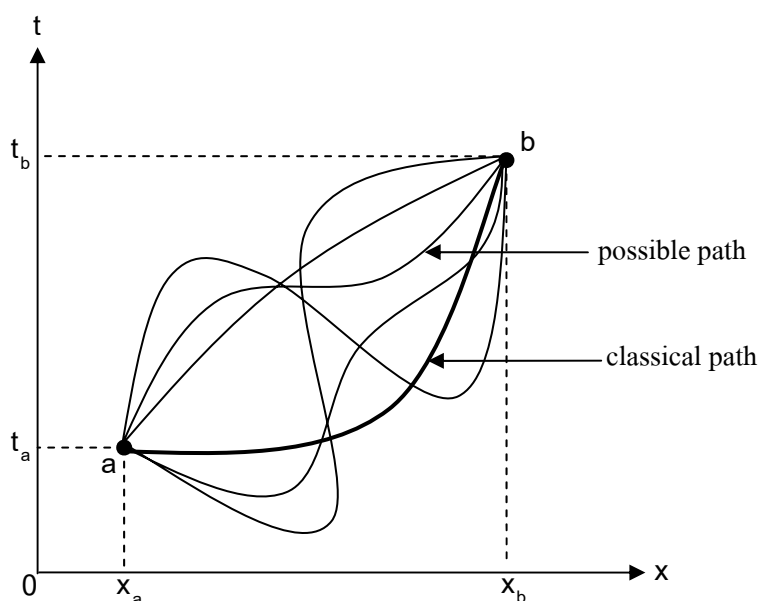
บทที่ 3

อินทิกรัลตามเส้นทางและการประยุกต์

3.1 อินทิกรัลตามเส้นทางเบื้องต้น

เมื่อพิจารณากลศาสตร์ควอนตัมซึ่งได้นำเสนอโดยใช้แนวความคิดของไฮเซนเบิร์กหรือแนวความคิดของชเรอดิงเงอร์ ความคิดทั้งสองแบบนี้แม้ว่าการเริ่มต้นจะแตกต่างกันมาก แต่ผลสุดท้ายก็ให้ผลลัพธ์เหมือนกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการอธิบายควอนตัมทั้งสองรูปแบบนี้สามารถพิสูจน์ได้ว่าเท่ากันทุกประการ ปริมาณต่างๆ ในกลศาสตร์แบบฉบับถูกแทนด้วยตัวดำเนินการ (operator) แทนที่จะเป็นปริมาณที่มีค่าเป็นเลขธรรมดา ดังนั้นจึงไม่สามารถนำเอาความรู้จากกลศาสตร์แบบฉบับมาใช้คำนวณหาปริมาณควอนตัมแบบใหม่ได้ เนื่องจากกลศาสตร์แบบฉบับได้รับการพัฒนามาเป็นระยะเวลานาน และปริมาณต่างๆ มีความหมายที่แน่นอน จึงควรจะนำเอาสิ่งเหล่านี้มาใช้ให้เป็นประโยชน์ ดังนั้นจึงได้มีนักฟิสิกส์เป็นจำนวนไม่น้อยที่พยายามจะคิดค้นกลศาสตร์ควอนตัมแบบใหม่ โดยอาศัยคณิตศาสตร์ที่มีความพร้อมอยู่แล้วในกลศาสตร์แบบฉบับ วิธีการเช่นนี้อาจถือได้ว่าเป็นความพยายามที่จะละทิ้งการใช้ตัวดำเนินการแล้วกลับมาใช้ความคิดที่ใช้ในกลศาสตร์แบบฉบับแทน ผู้ที่ประสบความสำเร็จในการสร้างกลศาสตร์ควอนตัมแนวใหม่ก็คือ ฟายน์แมน ในปี ค.ศ. 1948 ฟายน์แมนสังเกตว่า ถ้าต้องการศึกษาพฤติกรรมของอิเล็กตรอน อาจจะใช้วิธีการของชเรอดิงเงอร์เพื่อหาแอมพลิจูดของความน่าจะเป็น (probability amplitude) ของอิเล็กตรอนที่ประพัตต์ตัวเป็นคลื่น แต่จากการวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับธรรมชาติของการเป็นไปได้ทั้งคลื่นและอนุภาค แสดงว่าแอมพลิจูดของคลื่นของอิเล็กตรอนนั้นอาจคำนวณได้โดยถือว่าอิเล็กตรอนเป็นอนุภาค และแอมพลิจูดของคลื่นของอิเล็กตรอนที่จุดหนึ่งจุดใดสามารถคำนวณได้โดยการรวมเส้นทางเดินที่เป็นไปได้ทั้งหมด วิธีการรวมเส้นทางเดินของอนุภาคนี้สามารถคำนวณได้เช่นเดียวกับวิธีการในกลศาสตร์แบบฉบับกล่าวคือ เมื่อยอมรับว่าความคิดของเดอบรอยล์ (De Broglie) เป็นจริงการแทนที่อนุภาคโฟตอนด้วยอนุภาคอิเล็กตรอนก็จะทำให้สามารถคำนวณหาแอมพลิจูดของความน่าจะเป็นได้ นอกจากนี้ยังพบว่าแอมพลิจูดของความน่าจะเป็นนี้ที่แท้ก็คือ ฟังก์ชันคลื่นนั่นเอง และแอมพลิจูดของความน่าจะเป็นทั้งหมดของคลื่นที่สังสรรค์อยู่กับอนุภาคมีค่าเท่ากับแอมพลิจูดของความน่าจะเป็นย่อยๆ รวมกัน โดยที่แต่ละแอมพลิจูดของความน่าจะเป็นย่อยนั้นต้องคล้องจองกับทางเดินใดทางเดินหนึ่งของอนุภาค เพื่อความสะดวกในการคำนวณจะพิจารณาเฉพาะในกรณีการเคลื่อนที่ที่เป็นหนึ่งมิติเท่านั้น อย่างไรก็ตามวิธีการนี้สามารถจะขยายไปสู่กรณีสามมิติหรือมิติที่มากกว่าได้โดยไม่ยากนัก

เมื่อพิจารณาอนุภาคตัวหนึ่งเริ่มต้นเคลื่อนที่จากจุด a ที่ตำแหน่ง x_a ณ เวลา t_a ไปยังจุดสุดท้ายที่จุด b ที่ตำแหน่ง x_b ณ เวลา t_b ในกลศาสตร์แบบฉบับสามารถบอกตำแหน่งของอนุภาคที่เวลาใดๆ ได้ ทำให้ทราบเส้นทางที่แน่นอนของอนุภาคซึ่งมีอยู่เส้นทางเดียว แต่ในทางควอนตัมนั้นไม่สามารถบอกตำแหน่งของอนุภาคที่แน่นอนได้ แต่จะบอกได้เพียงโอกาสของความน่าจะเป็นเท่านั้น ฟายน์แมนพบว่าเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคมีได้หลายเส้นทาง นอกเหนือจากเส้นทางแบบฉบับ (classical path) ดังแสดงในภาพที่ 3



ภาพที่ 3 แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคจากจุด a ไปยังจุด b

ฟายน์แมนพบว่าขนาดของแอมพลิจูดของความน่าจะเป็นที่คล้องจองกับแต่ละทางเดินของอนุภาคนั้นจะมีค่าเท่ากันเสมอ ยกเว้นเฟสของคลื่นเท่านั้นที่ต่างกัน และมีรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ดังนี้

$$\phi[x(t)] = [\text{const.}] e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \quad (3.1)$$

เมื่อ $\phi[x(t)]$ คือแอมพลิจูดของความน่าจะเป็น และ $S[x(t)]$ คือกิริยาหรือแอคชัน (action) โดยที่

$$S[x(t)] = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt \quad (3.2)$$

และ $L(x, \dot{x}, t)$ คือลากรางเจียน (Lagrangian) ของระบบที่กำลังพิจารณา ในกรณีที่อนุภาคมีมวล m และเคลื่อนที่ภายใต้ศักย์ $V(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับโคออร์ดิเนต x เพียงอย่างเดียว

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) \quad (3.3)$$

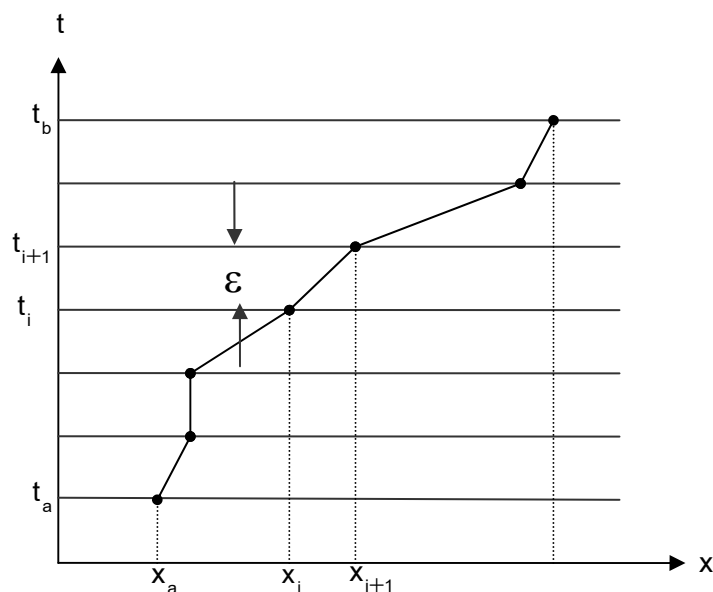
ฟายน์แมนได้ให้นิยามแอมพลิจูดของความน่าจะเป็นที่อนุภาคจะเคลื่อนที่จากจุด a ณ เวลา t_a ไปยังจุด b ณ เวลา t_b ไว้ดังนี้

$$K(b, a) = \sum_{\substack{\text{ทุกเส้นทาง} \\ \text{จาก } a \text{ ไป } b}} \phi[x(t)] = \sum_{\substack{\text{ทุกเส้นทาง} \\ \text{จาก } a \text{ ไป } b}} [\text{const.}] e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \quad (3.4)$$

และเรียกแอมพลิจูดของความน่าจะเป็นนี้ว่า ตัวแผ่กระจาย เนื่องจากจำนวนเส้นทางทั้งหมดระหว่างจุด a กับจุด b มีจำนวนมหาศาลจนนับไม่ถ้วนเป็นอนันต์ ในการรวมแอมพลิจูดตามสมการ (3.4) จึงเป็นเรื่องยุ่งยากจนแทบเป็นไปไม่ได้ อย่างไรก็ตามโดยอาศัยวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่ชาญฉลาดในแก้ปัญหาดังกล่าว ฟายน์แมนก็สามารถคำนวณเส้นทางทั้งหมดได้โดยเปลี่ยนการบวกหรือผลบวก (summation) ในสมการ (3.4) เป็นการอินทิเกรตแทนด้วยวิธีการดังนี้

สมมติว่าเส้นทางเดินของอนุภาคมีลักษณะดังแสดงในภาพที่ 4 โดยแบ่งช่วงเวลาที่ถือว่าเป็นตัวแปรอิสระจาก t_a ถึง t_b ออกเป็นช่วงย่อยๆ กว้างเท่ากันเป็นจำนวน n ช่วงโดยที่ $t_n - t_{n-1} = t_{n-1} - t_{n-2} = \dots = t_1 - t_{1-1} = \dots = t_2 - t_1 = t_1 - t_0 = \epsilon$ และกำหนดให้ $t_0 = t_a, t_n = t_b, x(t_a) = x_a$ และ $x(t_b) = x_b$ โดยการแบ่งเช่นนี้ทำให้ได้เวลาเป็นชุดๆ ซึ่งมีระยะห่างเท่ากับ ϵ แต่ละ t_i และเลือก x_i คล้องจองกับ t_i หนึ่งจุด โดยการเชื่อมโยงจุดเหล่านั้นเข้าด้วยกันด้วยเส้นตรง ก็จะได้เส้นทางของอนุภาคหนึ่งเส้นทางดังแสดงในภาพที่ 4 ในการเดินทางของอนุภาคจากจุด x_i ไปยังจุด x_{i+1} และได้แอมพลิจูดของความน่าจะเป็นมีค่าประมาณดังนี้

$$\begin{aligned} K(x_{i+1}, x_i) &\approx \frac{1}{A} \exp\left(\frac{i}{\hbar} [x_{i+1}, x_i]\right) \\ &\approx \frac{1}{A} \exp\left(\frac{i}{\hbar} L\left[\frac{x_{i+1} - x_i}{\epsilon}, \frac{x_{i+1} + x_i}{2}, \frac{t_{i+1} + t_i}{2}\right]\right) \epsilon \end{aligned} \quad (3.5)$$



ภาพที่ 4 แสดงเส้นทางเดินของอนุภาคจากจุด x_a ไปยังจุด x_b โดยแบ่งออกเป็น
เส้นทางย่อยๆ

แอมพลิจูดของความน่าจะเป็นในการเดินทางของอนุภาคจากจุด a ไปยังจุด b โดยใช้
เส้นทางดังแสดงในภาพที่ 4 คือ

$$\phi[x(t)] \approx K(x_n, x_{n-1})K(x_{n-1}, x_{n-2}) \dots K(x_i, x_{i-1}) \dots K(x_1, x_0) = \prod_{i=1}^{n-1} K(x_i, x_{i-1}) \quad (3.6)$$

จากสมการ (3.5) และสมการ (3.6) จะได้ผลรวมของการมีส่วนร่วม (contribution) ของ
แต่ละเส้นทางสามารถหาได้โดยการอินทิเกรตสมการ (3.6) ดังนี้

$$K(b, a) = \sum_{a \rightarrow b} \phi[x(t)] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint \dots \int \prod_{i=1}^n K(x_i, x_{i-1}) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint \dots \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_i L \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\epsilon}, \frac{x_{i+1} + x_i}{2}, \frac{t_{i+1} + t_i}{2} \right) \right\} \frac{dx_1}{A} \frac{dx_2}{A} \dots \frac{dx_i}{A} \dots \frac{dx_{n-2}}{A} \frac{dx_{n-1}}{A} \quad (3.7)$$

ขอให้สังเกตว่ากำหนดให้ $\epsilon \rightarrow 0$ ในสมการ (3.7) โดยตรงนั้นยังไม่ได้เพราะจะทำให้
สมการดังกล่าวไม่มีขีดจำกัด เพื่อให้ได้ค่าซึ่งเป็นที่ยอมรับได้จะต้องหาตัวประกอบแบบอย่าง

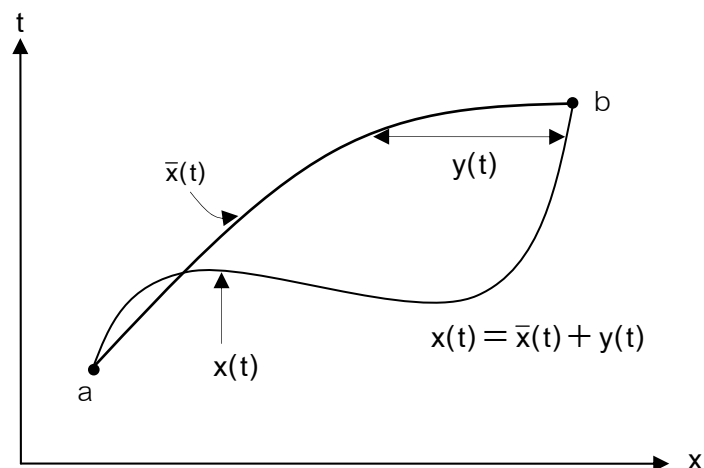
(normalizing factor) (A) ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ ϵ ที่จะทำให้สมการ (3.7) มีค่าเป็นที่ยอมรับได้เมื่อ

$\epsilon \rightarrow 0$ นั่นคือ A เป็นค่าคงที่ พบว่ามีค่าเป็น $\left(\frac{2\pi i \hbar \epsilon}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$ สมการ (3.7) จึงสามารถเขียนให้อยู่ในรูปที่กะทัดรัดเพื่อความสะดวกนิยมเขียนสมการ (3.7) ดังนี้

$$K(b,a) = \int_a^b e^{\frac{i}{\hbar} S[b,a]} D[x(t)] \quad (3.8)$$

$$S[b,a] = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt \quad (3.9)$$

สมการ (3.8) นี้จะรู้จักกันดีในนามของอินทิกรัลตามเส้นทางหรืออินทิเกรตตามเส้นทาง (path integration) พิจารณาสมการ (3.7) จะเห็นว่าการคำนวณตัวแผ่กระจายนั้น ความยากง่ายในการคำนวณขึ้นอยู่กับรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ของลากรางเจียนของระบบ ถ้าหากทำการอินทิเกรตแต่ละตัวแปรโดยตรงจำนวนครั้งของการอินทิเกรตมากมายมหาศาลจนแทบเป็นไปไม่ได้ในทางปฏิบัติ อย่างไรก็ตามสามารถเลี่ยงปัญหานี้ได้โดยการแทนเส้นทางใดๆ ที่เป็นไปได้ด้วยเส้นทางแบบฉบับ ดังแสดงในภาพที่ 5



ภาพที่ 5 แสดงเส้นทางแบบฉบับ $\bar{x}(t)$ และส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากเส้นทางแบบฉบับ $y(t)$

ตัวอย่างเช่น ระบบของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกเชิงเส้น ซึ่งมีลากรางเกียนดังนี้

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) \quad (3.10)$$

โดยการแทนเส้นทางใดๆ ที่เป็นไปได้ด้วยเส้นทางแบบฉบับกับส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากเส้นทางแบบฉบับ กล่าวคือ

$$x(t) = \bar{x}(t) + y(t) \quad (3.11)$$

เมื่อ $\bar{x}(t)$ และ $y(t)$ คือเส้นทางแบบฉบับและส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากเส้นทางแบบฉบับ เมื่อแทนสมการ (3.11) ลงในสมการ (3.8) จะได้

$$\begin{aligned} K(b, a) &= e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_b, x_a)} \int_0^0 D[y(t)] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} m(\dot{y}^2 - \omega^2 y^2) dt} \\ &= F(t_b, t_a) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_b, x_a) \right\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

โดยที่ $F(t_b, t_a)$ คือพรีแฟกเตอร์ (prefactor) ซึ่งเป็นปริมาณที่ไม่ขึ้นอยู่กับจุดเริ่มต้นและจุดปลายของการเคลื่อนที่ของอนุภาค ส่วน $S_{cl}(x_b, x_a)$ คือแอคชันแบบฉบับ (classical action) สามารถคำนวณได้โดยใช้หลักแห่งกิริยาน้อยสุด (the principle of least action) อย่างไรก็ตาม แวนเวิร์ลค์และเพาลี (van Vleck and Pauli) พบว่าในกรณีที่ลากรางเกียนของระบบมีรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นกำลังสอง (quadratic) พรีแฟกเตอร์ของระบบสามารถหาได้โดยใช้สูตร

$$F(t_b, t_a) = \left(\frac{i}{2\pi\hbar} \frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_b} S_{cl}(x_b, x_a) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

โดยอาศัยสมการ (3.12) และสมการ (3.13) จะได้ว่าในการคำนวณหาตัวแผ่กระจายของอนุภาคในทางควอนตัมกลับกลายเป็นการคำนวณหาเส้นทางแบบฉบับแทน

3.2 ฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของอนุภาค

เมื่อทราบตัวแผ่กระจายของอนุภาคที่เคลื่อนที่จากจุดหนึ่งจุดใดในอวกาศไปยังอีกจุดหนึ่งในอวกาศ ก็จะทำให้ทราบปริมาณทางฟิสิกส์อื่นๆ ของระบบควอนตัมได้ โดยการติดตามเส้นทางเดินของอนุภาค และเนื่องจากฟังก์ชันคลื่นแสดงถึงแอมพลิจูดของความน่าจะเป็น จึงต้องพิจารณาสมการ (3.8) ดังนี้

$$K(b,a) = \int_a^b e^{\frac{i}{\hbar} S[b,a]} D[x(t)] \quad (3.14)$$

$$\text{เนื่องจาก } S[b,a] = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt \text{ และจากคุณสมบัติของการอินทิเกรต จะสามารถ}$$

แบ่งช่วงของการอินทิเกรตออกเป็นสองส่วนได้ กล่าวคือ

$$\begin{aligned} S[b,a] &= \int_a^b L dt = \int_a^c L dt + \int_c^b L dt \\ S[b,a] &= S[b,c] + S[c,a] \end{aligned} \quad (3.15)$$

จากสมการ (3.14) และสมการ (3.15) จะได้

$$\begin{aligned} K(b,a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^c \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[b,a]\right) D[x(t)] \int_c^b \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[c,a]\right) D[x(t)] dx_c \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(b,a) K(c,a) dx_c \end{aligned} \quad (3.16)$$

สมการ (3.16) นี้อาจตีความได้ว่าอนุภาคเคลื่อนที่จากจุด a ถึงจุด b จะเท่ากับ(หรือให้ผลเหมือนกับ) อนุภาคเคลื่อนที่จาก a ถึง c แล้วจาก c ถึง b แอมพลิจูดของอนุภาคที่เคลื่อนที่จาก a ถึง b จะเท่ากับผลคูณของแอมพลิจูดของแต่ละช่วงของการเดินทาง แอมพลิจูดรวมทั้งหมดของอนุภาคที่เคลื่อนที่จาก a ถึง b จึงได้จากการอินทิเกรตตัวแปร x_c กล่าวคือ

$$\begin{aligned} K(a \rightarrow c \rightarrow b) &= K(b,a) K(c,a) \\ K(a \rightarrow b) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(b,a) K(c,a) dx_c \end{aligned} \quad (3.17)$$

ในกรณีที่สนใจว่าอนุภาคเริ่มต้นมาจากตำแหน่งใด (x_a อาจมาจากตำแหน่งใดๆ ก็ได้) $K(b, a)$ ก็จะกลายเป็นแอมพลิจูดของความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคที่ตำแหน่ง x_b ณ เวลา t_b แอมพลิจูดดังกล่าวนี้ก็คือฟังก์ชันคลื่นนั่นเอง กล่าวคือ

$$K(b, a) = K(x_b, t_b; x_a, t_a) \xrightarrow{\text{ไม่สนใจต้นกำเนิด } (x_a, t_a)} \psi(x_b, t_b)$$

ดังนั้น จากสมการ (3.16) หรือสมการ (3.17) ถ้าไม่สนใจตำแหน่งเริ่มต้น (x_a, t_a) จะได้

$$\psi(x_b, t_b) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_b, t_b; x_c, t_c) \psi(x_c, t_c) dx_c \quad (3.18)$$

สรุปได้ว่า ถ้าทราบฟังก์ชันคลื่น ณ เวลา t_c และทราบรูปแบบของตัวแผ่กระจายแล้วจะสามารถหาฟังก์ชันคลื่น ณ เวลา t ใดๆ ได้ โดยที่ $t > t_c$

พิจารณาระบบนิ่ง (stationary system) แฮมิลโทเนียนของระบบไม่ขึ้นต่อเวลาอย่างชัดเจน คำตอบหรือผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์

$$H\psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad (3.19)$$

จะอยู่ในรูป

$$\psi(x, t) = \sum_n C_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \psi_n(x) \quad (3.20)$$

โดยที่

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \psi_n^*(x) e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} dx \quad (3.21)$$

เมื่อแทน C_n ลงในสมการ (3.20) จะได้

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x', t') \psi_n^*(x') e^{\frac{i}{\hbar} E_n t'} dx' \psi_n(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \psi_n(x) \psi_n^*(x') e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t-t')} \psi(x', t') dx' \end{aligned} \quad (3.22)$$

เปรียบเทียบสมการ (3.18) กับสมการ (3.22) จะได้

$$K(x, t, x', t') = \sum_n \psi_n(x) \psi_n^*(x') e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t-t')} \quad (3.23)$$

และต่อกรณีที่สเปกตรัมพลังงานของอนุภาคมีค่าต่อเนื่องสมการ (3.23) จะกลายเป็น

$$K(x, t, x', t') = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(x) \psi_k^*(x') e^{-\frac{i}{\hbar} E(k)(t-t')} dk \quad (3.24)$$

โดยที่ k เป็นเลขคลื่น ซึ่งสัมพันธ์กับโมเมนตัมตามสมการ $p = \hbar k$ เมื่อพิจารณาสมการ (3.24) จะเห็นว่า ตัวแพร่กระจายสามารถให้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันคลื่น และพลังงานพร้อมกัน

3.3 การคำนวณหาตัวแพร่กระจายของอนุภาคอิสระ

อนุภาคอิสระหมายถึงอนุภาคที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของแรงใดๆ พลังงานศักย์ของอนุภาคมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นพลังงานรวมและลากรางเกียนของระบบจะประกอบด้วยพลังงานจลน์เพียงอย่างเดียว กล่าวคือ

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (3.25)$$

อาศัยสมการ (3.7) ตัวแพร่กระจายสามารถเขียนได้ดังนี้

$$K(b, a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \dots \int \exp\left(\frac{im}{2\hbar\epsilon} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2\right) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon}\right)^{\frac{n}{2}} \quad (3.26)$$

เมื่อพิจารณาสมการ (3.26) จะเห็นว่าประกอบไปด้วยอินทิกรัลแบบเกาส์เซียน (Gaussian integral) เป็นจำนวนมาก การอินทิเกรตเหล่านี้กล่าวคือเป็นอินทิกรัลในรูปแบบ

$$\int \exp(-ax^2) dx \quad \text{หรือ} \quad \int \exp(-ax^2 + bx) dx$$

เนื่องจากการอินทิเกรตเทอมที่เป็นเกาส์เซียน ผลลัพธ์ที่ได้กลับมามีอยู่ในรูปเกาส์เซียนอีก ดังนั้นสามารถอินทิเกรตตัวแปรในสมการ (3.26) ทีละตัว พิจารณาการอินทิเกรตตัวแรกที่มีตัวแปรเป็น x_1 ดังนั้นนิพจน์ที่ควรพิจารณาคือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon}\right) \exp\left(-\frac{m}{2i\hbar\epsilon} [(x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_0)^2]\right) dx_1$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \cdot 2\mathcal{E}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{m}{2i\hbar \mathcal{E}} (x_2 - x_0)^2 \right) \quad (3.27)$$

อันดับต่อไปคูณสมการ (3.27) ด้วยเทอม

$$\left(\frac{m}{2\pi i \hbar \mathcal{E}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{m}{2i\hbar \mathcal{E}} (x_3 - x_2)^2 \right) \quad (3.28)$$

แล้วทำการอินทิเกรตโดยให้ x_2 เป็นตัวแปร ผลที่ได้จะคล้ายกับสมการ (3.27) ยกเว้นตำแหน่ง $(x_2 - x_0)^2$ ต้องเปลี่ยนเป็น $(x_3 - x_0)^2$ นอกจากนี้เทอม $2\mathcal{E}$ จะถูกแทนด้วย $3\mathcal{E}$ ในสองตำแหน่ง ผลที่ได้คือ

$$\left(\frac{m}{2\pi i \hbar \cdot 3\mathcal{E}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{m}{2i\hbar \cdot 3\mathcal{E}} (x_3 - x_0)^2 \right) \quad (3.29)$$

โดยวิธีการดังกล่าว หลังจากที่ได้ปฏิบัติเป็นจำนวน $n-1$ ครั้ง จะได้

$$\left(\frac{m}{2\pi i \hbar \cdot n\mathcal{E}} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{m}{2i\hbar \cdot n\mathcal{E}} (x_n - x_0)^2 \right) \quad (3.30)$$

เนื่องจาก $n\mathcal{E} = t_n - t_0 = t_b - t_a$ ดังนั้น ในที่สุดจะได้ตัวแพร่กระจายของอนุภาคอิสระ

$$K(b, a) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{m}{2i\hbar (t_b - t_a)} (x_b - x_a)^2 \right) \quad (3.31)$$

ในอันดับต่อไปจะแสดงให้เห็นว่า ตัวแพร่กระจายได้ให้รายละเอียดหลายอย่าง เพื่อความสะดวก จะเลือกจุดเริ่มต้น a อยู่ที่ศูนย์ และเวลาเป็นศูนย์ด้วย ส่วนที่จุดปลาย b นั้นจะแทนด้วย x, t ดังนั้นตัวแพร่กระจายในสมการ (3.31) จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$K(x, t; 0, 0) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{m}{2i\hbar t} x^2 \right) \quad (3.32)$$

จากสมการ (3.32) ถ้ากำหนดให้ t มีค่าคงที่ แอมพลิจูดของคลื่นจะเปลี่ยนแปลงไปตามระยะทาง x ซึ่งจะเห็นได้ว่า อนุภาคยิ่งเคลื่อนที่ไกลจากจุดเริ่มต้นมากเท่าใด การแกว่งของแอมพลิจูดจะเพิ่มมากขึ้น การแกว่งของแอมพลิจูดมีค่ามากจนระยะระหว่างบัพหรือลูกคลื่นเกือบจะเท่ากัน แสดงว่าคลื่นนี้มีลักษณะคล้ายคลื่นไซน์มากขึ้น ในกรณีเช่นนี้ความยาวคลื่นจะเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ เมื่อ x มีค่ามาก และทำการคำนวณการเปลี่ยนแปลงของความยาวคลื่นได้ดังนี้

เมื่อ x เพิ่มขึ้นหนึ่ง λ เฟสของคลื่นจะเปลี่ยนไปเป็นจำนวน 2π เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$2\pi = \frac{m(x+\lambda)^2}{2\hbar t} - \frac{mx^2}{2\hbar t} = \frac{m\lambda x}{\hbar t} + \frac{m\lambda^2}{2\hbar t} \quad (3.33)$$

เนื่องจาก x มีค่ามากหรือ $x \gg \lambda$ ดังนั้นเทอมที่สองทางด้านขวามือของสมการ (3.33) จึงอาจตัดทิ้งได้ ในที่สุดจะได้

$$\lambda \approx \frac{2\pi\hbar}{m\left(\frac{x}{t}\right)} \quad (3.34)$$

ในกลศาสตร์แบบฉบับอนุภาคที่เคลื่อนที่เป็นระยะทาง x จากจุดเริ่มต้นในเวลา t จะมีความเร็วเท่ากับ $\frac{x}{t}$ และถ้าอนุภาคมีมวลเป็น m อนุภาคนี้ก็มีโมเมนตัมเท่ากับ $m\frac{x}{t}$ เมื่อพิจารณาสมการ (3.34) โดยให้ $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ และแทนค่า $m\frac{x}{t}$ ด้วย p จะได้

$$\lambda \approx \frac{h}{p} \quad (3.35)$$

จะเห็นได้ว่าสมการ (3.35) นี้ก็คือสูตรของเดอบรอยล์นั่นเอง แสดงว่าตัวแผ่กระจายมีคุณสมบัติของคลื่นบรรจุอยู่ในตัวแล้ว

นอกจากจะศึกษาการเปลี่ยนแปลงของแอมพลิจูดกับระยะทางแล้วยังอาจจะศึกษาการเปลี่ยนแปลงของแอมพลิจูดกับเวลา โดยกำหนดให้ x มีค่าคงที่ แล้วปล่อยให้ตัวแผ่กระจายในสมการ (3.32) เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา เมื่อสมมติว่า t มีค่ามาก และแอมพลิจูดของคลื่นที่

ค่าคงที่หรือไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ถ้าให้ T คือคาบของการแกว่ง เมื่อ t เพิ่มขึ้นเป็นจำนวน T เฟสของตัวแผ่กระจายจะเปลี่ยนแปลงไปเท่ากับ 2π หรือเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$2\pi = \frac{mx^2}{2\hbar t} - \frac{mx^2}{2\hbar(t+T)} = \frac{mx^2}{2\hbar t^2} \left(\frac{T}{1 + \frac{T}{t}} \right) \quad (3.36)$$

เมื่อ $t \gg T$ สมการ (3.36) จะกลายเป็น

$$2\pi \approx \frac{mx^2}{2\hbar t^2} T \quad (3.37)$$

จากคำจำกัดความ $\omega = \frac{2\pi}{T}$ จะได้

$$\omega \approx \frac{m}{2\hbar} \left(\frac{x}{t} \right)^2 \quad (3.38)$$

และจากกลศาสตร์แบบฉบับ $\frac{1}{2} m \left(\frac{x}{t} \right)^2 = E$ คือพลังงานจลน์ ดังนั้นสมการ (3.38)

จึงกลายเป็น

$$E \approx \hbar \omega \approx h\nu \quad (3.39)$$

โดยที่ $\omega = 2\pi\nu$ จะเห็นได้ว่าสมการ (3.39) นี้ก็คือสูตรพลังงานของแพลงค์นั่นเอง

3.4 ฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้น

ฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้นหรือตัวแกว่งกวัดฮาร์โมนิกหนึ่งมิติ มีลากรางเกียนในรูปแบบดังนี้

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) \quad (3.40)$$

ดังนั้นตัวแผ่กระจายสามารถเขียนได้เป็น

$$K(b, a) = \int_a^b \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_a^b \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 x^2 \right) dt \right) D[x(t)] \quad (3.41)$$

เมื่อพิจารณาการอินทิเกรตข้างต้นโดยตรงเช่นเดียวกับกรณีของอนุภาคอิสระในทางทฤษฎีแล้วอาจคำนวณค่าอินทิกรัลเหล่านี้ได้ เนื่องจากรูปแบบของการอินทิเกรตยังคงเป็นแบบเกาส์เซียน แต่ในทางปฏิบัติแล้วการคำนวณดังกล่าวค่อนข้างยุ่งยาก จึงขอเสนอวิธีใหม่ดังได้แสดงไว้ในหัวข้อ 3.1 กล่าวคือแยกเส้นทางเดินแบบฉบับออกจากเส้นทางเดินที่เป็นไปได้ทั้งหมด วิธีการนี้จะเป็นประโยชน์ไม่เฉพาะแต่ปัญหาของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เท่านั้น แต่จะมีประโยชน์ต่อปัญหาอื่นๆ ที่มีลักษณะยุ่งยากกว่านี้

จากวิชากลศาสตร์แบบฉบับเส้นทางเดินของอนุภาคจะต้องสอดคล้องสมการลากราง (Lagrange equation) หรือสอดคล้องหลักแห่งกิริยาน้อยสุดกล่าวในเชิงคณิตศาสตร์คือ

$$\delta S = \delta \int L(x, \dot{x}, t) dt = 0 \quad (3.42)$$

ขั้นตอนในการคำนวณหาเส้นทางแบบฉบับ $\bar{x}$ อาจกระทำได้ดังนี้ สมมติว่าให้เส้นทางเดินเปลี่ยนไปจากเส้นทางเดินแบบฉบับเป็นจำนวน δx เนื่องจาก $\delta x(t_a) = \delta x(t_b) = 0$ ดังนั้น

$$\delta S = S(\bar{x} + \delta x) - S(\bar{x}) = 0 \quad (3.43)$$

และกระจาย δx ออกเป็นอนุกรมกำลัง โดยคิดเฉพาะกำลังที่หนึ่งของ δx สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} S(\bar{x} + \delta x) &= \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{\bar{x}} + \delta \dot{x}, \bar{x} + \delta x, t) dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \left(L(\dot{\bar{x}}, \bar{x}, t) + \delta \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \delta x \frac{\partial L}{\partial x} \right) dt \\ &= S(\bar{x}) + \int_{t_a}^{t_b} \left(\delta \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \delta x \frac{\partial L}{\partial x} \right) dt \end{aligned} \quad (3.44)$$

โดยการอินทิเกรตบางส่วนจะได้

$$\delta S = \delta x \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \delta x \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right) dt \quad (3.45)$$

เนื่องจาก δx ที่จุดปลายทั้งสองมีค่าเป็นศูนย์ เทอมแรกทางขวาของสมการ (3.45) จึงมีค่าเป็นศูนย์ ระหว่างจุดปลายทั้งสอง δx มีค่าเท่าใดก็ได้ เงื่อนไข $\delta S = 0$ จึงสอดคล้องกับ

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.46)$$

เราเรียกสมการ (3.46) ว่า สมการลากราง

สำหรับกรณีของฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์ สมการ (3.46) กลับกลายเป็น

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (3.47)$$

ผลเฉลยหรือคำตอบทั่วไปของสมการ (3.47) คือ

$$\bar{x} = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (3.48)$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงที่ไม่เจาะจง อาศัยเงื่อนไข $\bar{x}(t_a) = x_a$ และ $\bar{x}(t_b) = x_b$ คำตอบของสมการ (3.48) จึงกลายเป็น

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{\sin \omega(t_b - t_a)} [x_b \sin \omega(t - t_a) + x_a \sin \omega(t_b - t)] \quad (3.49)$$

สมการ (3.49) นี้สามารถนำไปคำนวณหาแอคชันแบบฉบับ S_{cl} ได้ กล่าวคือ

$$S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{m}{2} \dot{\bar{x}}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 \bar{x}^2 \right) dt \quad (3.50)$$

คำนวณหา S_{cl} โดยการแทนค่า $\dot{\bar{x}}^2$ และ $\bar{x}^2$ ที่ได้จากสมการ (3.49) ลงในสมการ (3.50) แล้วทำการอินทิเกรต อย่างไรก็ตามการคำนวณจะสะดวกกว่าหากทำการอินทิเกรตสมการ (3.50) บางส่วนเสียก่อน โดยที่

$$S_{cl} = \frac{m}{2} (\dot{\bar{x}} \bar{x}) \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{m}{2} \dot{\bar{x}}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 \bar{x}^2 \right) dt \quad (3.51)$$

จะเห็นว่าเทอมที่ 2 ทางด้านขวามือของสมการ (3.51) มีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจาก $\bar{x}$ สอดคล้องสมการ (3.49) ในที่สุดจะได้

$$S_{cl} = \frac{m}{2} (\dot{\bar{x}}(t_b) \bar{x}(t_a) - \dot{\bar{x}}(t_a) \bar{x}(t_b)) \quad (3.52)$$

หาค่าอนุพันธ์ของ $\bar{x}(t)$ เทียบกับเวลา t แล้วแทนค่า t เท่ากับ t_a และ t_b จะได้

$$\dot{\bar{x}}(t_a) = \frac{\omega}{\sin \omega(t_b - t_a)} (x_b - x_a \cos \omega(t_b - t_a)) \quad (3.53)$$

$$\dot{\bar{x}}(t_b) = \frac{\omega}{\sin \omega(t_b - t_a)} (x_b \cos \omega(t_b - t_a) - x_a) \quad (3.54)$$

แทนค่า $\dot{\bar{x}}(t_a), \dot{\bar{x}}(t_b), \bar{x}(t_a)$ และ $\bar{x}(t_b)$ ลงในสมการ (3.52) จะได้

$$S_{cl} = \frac{m\omega}{2 \sin \omega(t_b - t_a)} ((x_a^2 + x_b^2) \cos \omega(t_b - t_a) - 2x_a x_b) \quad (3.55)$$

เมื่อได้ S_{cl} แล้วก็สามารถคำนวณหาพรีแฟกเตอร์ได้ โดยใช้สูตรของแวนเวิลค์และเพาลี จากสมการ (3.13) ดังนี้

$$\begin{aligned} F(t_b, t_a) &= \left(\frac{i}{2\pi\hbar} \frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_b} S_{cl}(x_b, x_a) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega(t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.56)$$

จากสมการ (3.55), (3.56) และอาศัยสมการ (3.12) ในที่สุดจะได้ตัวแผ่กระจายของฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้นดังนี้

$$K(b, a) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin \omega T} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{im\omega}{2\hbar \sin \omega T} ((x_a^2 + x_b^2) \cos \omega T - 2x_a x_b) \right) \quad (3.57)$$

โดยที่ $T = t_b - t_a$

3.5 ฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้น

ในหัวข้อนี้จะแสดงให้เห็นว่าตัวแผ่กระจายของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ ได้ให้รายละเอียดเกี่ยวกับฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของระบบไว้ครบถ้วน จากสมการ (3.57) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันคลื่นและพลังงานได้ดังนี้

$$\left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin \omega T}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{im\omega}{2\hbar \sin \omega T} \left((x_a^2 + x_b^2) \cos \omega T - 2x_a x_b\right)\right) = \sum_n \psi_n(x_b) \psi_n^*(x_a) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n T} \quad (3.58)$$

เพื่อให้ได้ฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ ต้องเขียนสมการทางซ้ายมือของสมการ (3.58) เสียใหม่ โดยอาศัยความสัมพันธ์

$$\left. \begin{aligned} i \sin \omega T &= \frac{e^{i\omega T} (1 - e^{-2i\omega T})}{2} \\ \cos \omega T &= \frac{e^{i\omega T} (1 + e^{-2i\omega T})}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

แทนค่าเหล่านี้ลงในสมการทางด้านซ้ายของสมการ (3.58) จะได้

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\omega T}{2}} (1 - e^{-2i\omega T})^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} \left[(x_a^2 + x_b^2) \frac{1 + e^{-2i\omega T}}{1 - e^{-2i\omega T}} - \frac{4x_a x_b e^{-i\omega T}}{1 - e^{-2i\omega T}}\right]\right) = \sum_n \psi_n(x_b) \psi_n^*(x_a) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n T} \quad (3.60)$$

ถ้าต้องการให้นิพจน์ทางซ้ายมือของสมการ (3.58) มีลักษณะคล้ายกับนิพจน์ทางขวามือ ซึ่งเป็นอนุกรม จึงจำเป็นต้องกระจายสมการ (3.60) ออกเป็นอนุกรมกำลังของ $e^{-i\omega T}$ เนื่องจากเทอมแรกของสมการ (3.60) คือ $e^{-\frac{i\omega T}{2}}$ ดังนั้นเทอมต่อไปจะต้องมีรูปแบบเป็น $e^{-\frac{i\omega T}{2}} e^{-in\omega T}$ โดยที่ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ การที่อนุกรมมีลักษณะเช่นนี้แสดงว่าพลังงานของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์คือ

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega \quad (3.61)$$

ถ้าต้องการทราบฟังก์ชันคลื่นของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ จะต้องกระจายนิพจน์ของสมการ (3.60) ให้สมบูรณ์กว่านี้ ในที่นี้จะแสดงวิธีการกระจายถึงเทอม $n=2$ เท่านั้น อย่างไรก็ตามโดยหลักการแล้วสามารถกระจายถึงเทอมที่ n ใดๆ ก็ได้ โดยการกระจายนิพจน์ของสมการ (3.60) ถึงอันดับ $n=2$ ดังนี้

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\omega T}{2}} \left(1 + \frac{e^{-2i\omega T}}{2} + \dots\right) \exp\left\{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_a^2 + x_b^2) - \frac{m\omega}{\hbar}(x_a^2 + x_b^2) \right. \\ \left. (e^{-2i\omega T} + \dots) + \frac{2}{\hbar}m\omega x_a x_b e^{-i\omega T} + \dots\right\}$$

หรือ

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_a^2 + x_b^2)} e^{-\frac{i\omega T}{2}} \left(1 + \frac{e^{-2i\omega T}}{2}\right) \exp\left\{1 + \frac{2}{\hbar}m\omega x_a x_b e^{-i\omega T} \right. \\ \left. + \frac{4m^2\omega^2}{2\hbar^2}x_a^2 x_b^2 e^{-2i\omega T} - \frac{m\omega}{\hbar}(x_a^2 + x_b^2)e^{-2i\omega T} + \dots\right\} \quad (3.62)$$

เปรียบเทียบเทอมแรกของสมการ (3.62) กับสมการ (3.60) จะได้

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_a^2 + x_b^2)} e^{-\frac{i\omega T}{2}} = e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 T} \psi_0(x_b) \psi_0^*(x_a) \quad (3.63)$$

สมการ (3.63) นี้หมายความว่า $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ และฟังก์ชันคลื่นที่สมนัยกับสถานะพื้นคือ

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega^2 x^2}{2\hbar}} \quad (3.64)$$

ทั้งนี้อาจคำนวณหาพลังงานและฟังก์ชันคลื่นในสถานะอื่นได้โดยพิจารณาเทอมต่อไป เช่น สถานะถัดจากสถานะพื้น โดยพิจารณา

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_a^2 + x_b^2)} e^{-\frac{i\omega T}{2}} e^{-i\omega T} \frac{2m\omega}{\hbar} x_a x_b = e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 T} \psi_1(x_b) \psi_1^*(x_a) \quad (3.65)$$

ซึ่งสมการนี้แสดงว่า $E_1 = \frac{3\hbar\omega}{2}$ และฟังก์ชันคลื่นคือ

$$\psi_1(x) = \left(\frac{2m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} x \psi_0(x) \quad (3.66)$$

ซึ่งสมการ (3.66) ที่ได้นี้ก็ตรงกับสูตรที่ได้จากวิธีการของชเรอดิงเงอร์ ในทำนองเดียวกัน
เทอมต่อไปจะให้พลังงาน $E_2 = \frac{5\hbar\omega}{2}$ สำหรับส่วนที่ขึ้นกับ x_a และ x_b จะมีลักษณะดังนี้

$$\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x_a^2+x_b^2)} \left\{ \frac{2m^2\omega^2}{\hbar} x_a^2 x_b^2 - \frac{m\omega}{\hbar} (x_a^2 + x_b^2 + \frac{1}{2}) \right\} \quad (3.67)$$

เทอมนี้จะต้องเท่ากับ $\psi_2(x_b)\psi_2^*(x_a)$ เนื่องจากเทอมที่อยู่ภายในวงเล็บใหญ่สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2m\omega}{\hbar} x_a^2 - 1 \right) \left(\frac{2m\omega}{\hbar} x_b^2 - 1 \right) \quad (3.68)$$

ดังนั้นจะได้

$$\psi_2(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2m\omega}{\hbar} x^2 - 1 \right) \psi_0(x) \quad (3.69)$$

ซึ่งสมการ (3.69) ที่ได้นี้ก็ตรงกับสูตรที่ได้จากวิธีการของชเรอดิงเงอร์เช่นกัน ในที่นี้ได้พิสูจน์ให้เห็นด้วยสองตัวอย่างข้างต้นแล้วว่า ถ้าทราบตัวแปรกระจายก็จะทำให้ทราบทั้งพลังงานและฟังก์ชันคลื่น และโดยอาศัยวิธีการดังกล่าวนี้ จะสามารถคำนวณหาพลังงานกับฟังก์ชันคลื่นใดๆ ของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ได้ทุกระดับ

บทที่ 4

ผลการวิจัย

4.1 ปัญหากำแพงศักย์อนันต์ (Infinite Potential Barrier)

กำแพงศักย์อนันต์เป็นปัญหาของสถานะที่มีขอบเขตไม่จำกัด (unbounded-state problem) ที่ง่ายที่สุดปัญหาหนึ่งในกลศาสตร์ควอนตัม โดยทั่วไปแล้วมักปรากฏเป็นปัญหตัวอย่างแรกๆ ตัวอย่างหนึ่งในตำรากลศาสตร์ควอนตัมเบื้องต้นทั่วไป เป็นปัญหาของอนุภาคตัวหนึ่งที่เคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของศักย์

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ \infty & \text{เมื่อ } x \leq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

สถานะไอเกนโมเมนตัมต่อกรณีดังกล่าวนี้ได้เป็นไปตามแบบอย่างของอนุภาคอิสระ ทว่ากลับมีรูปแบบเป็น

$$\psi_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}} \sin\left(\frac{px}{\hbar}\right) & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \leq 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

สำหรับอนุภาคอิสระที่เคลื่อนที่นอกกำแพงศักย์สูงอนันต์ ($x > 0$) แอคชันแบบฉบับมีรูปแบบเป็น

$$S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt$$

เมื่อ

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

โดยที่แอคชันแบบฉบับดังกล่าวสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\delta S_{cl} = \delta \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt = 0$$

แสดงว่า $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ และหาผลเฉลยของสมการดังนี้

จาก
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (4.3)$$

สำหรับอนุภาคอิสระ
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

และ
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

เมื่อแทนความสัมพันธ์ข้างต้นลงในสมการ (4.3) จะได้

$$m\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right) = c_1$$

$$x = c_1 t + c_2 \quad (4.4)$$

หาค่าคงที่ c_1, c_2 ได้จากเงื่อนไขเริ่มต้น โดยพิจารณาภาพที่ 6 ประกอบ ดังนี้

$$x(t_b) = x_b ; x_b = c_1 t_b + c_2 \quad (4.5)$$

และ

$$x(t_a) = x_a ; x_a = c_1 t_a + c_2 \quad (4.6)$$

จากสมการ (4.5) และสมการ (4.6) จะได้ค่าคงที่ c_1, c_2 ดังนี้

$$c_1 = \frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \quad (4.7)$$

และ

$$c_2 = x_b - \left(\frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \right) t_b \quad (4.8)$$

เมื่อแทนสมการ (4.7) และสมการ (4.8) ลงในสมการ (4.4) จะได้

$$x = \left(\frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \right) t + x_b - \left(\frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \right) t_b \quad (4.9)$$

โดยที่ x ในสมการ (4.9) คือเส้นทางแบบฉบับ $\bar{x}(t)$ หรือ $x_{cl}(t)$

$$\bar{x}(t) = x_{cl}(t) = \left(\frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \right) t + x_b - \left(\frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \right) t_b \quad (4.10)$$

และ

$$\dot{\bar{x}}(t) = \dot{x}_{cl}(t) = \left(\frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \right) \quad (4.11)$$

จาก $S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt$ สำหรับอนุภาคอิสระซึ่งมีลากรางเจียนเป็น $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ ดังนั้น

$$S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 dt \quad (4.12)$$

เมื่อแทนสมการ (4.11) ลงในสมการ (4.12) จะได้

$$S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} m \left(\frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \right)^2 dt$$

$$S_{cl} = \frac{1}{2} m \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a} \quad (4.13)$$

จากสมการ (3.12) นั่นคือ

$$K(b, a) = F(t_b, t_a) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_b, x_a) \right\} \quad (4.14)$$

โดยที่

$$F(t_b, t_a) = \left(\frac{i}{2\pi\hbar} \frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_b} S_{cl}(x_b, x_a) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.15)$$

เมื่อแทนสมการ (4.13) ลงในสมการ (4.15) จะได้

$$F(t_b, t_a) = \left(\frac{i}{2\pi\hbar} \left(\frac{-m}{t_b - t_a} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.16)$$

$$F(t_b, t_a) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.17)$$

เมื่อแทนสมการ (4.13) และสมการ (4.17) ลงในสมการ (4.14) จะได้

$$K(b, a) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \frac{(x_b - x_a)^2}{(t_b - t_a)} \right\} \quad (4.18)$$

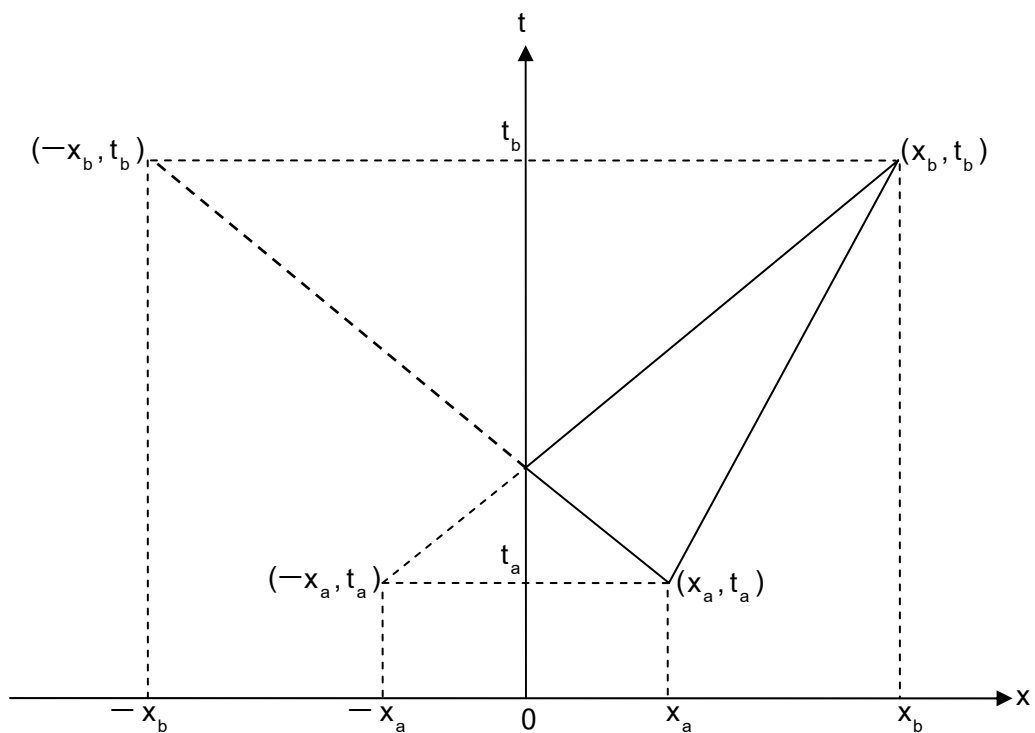
ตัวแพร่กระจายที่ได้จากสมการ (4.18) เป็นตัวแพร่กระจายของอนุภาคอิสระที่เคลื่อนที่จากตำแหน่ง (x_a, t_a) ไปยัง (x_b, t_b) โดยตรง ซึ่งอิทธิพลของกำแพงศักย์สูงอนันต์มิได้มีผลต่ออนุภาคแต่ประการใด ตัวแพร่กระจายดังกล่าวจึงไม่อาจใช้เป็นตัวแพร่กระจายของอนุภาคภายใต้อิทธิพลของกำแพงศักย์สูงอนันต์ได้

ในปี ค.ศ.1981 กูดแมน (Goodman) ได้เสนอแนวทางแก้ปัญหาดังกล่าว โดยกูดแมนเสนอว่าเส้นทางแบบฉบับของอนุภาคในการเคลื่อนที่จาก (x_a, t_a) ไปยัง (x_b, t_b) มีได้สองเส้นทาง เส้นทางแรกคือเส้นทางจาก (x_a, t_a) ไปยัง (x_b, t_b) โดยตรง ส่งผลให้ได้ตัวแพร่กระจายของอนุภาคอิสระดังสมการ (4.18) ส่วนเส้นทางที่สองนั้นอนุภาคเคลื่อนที่จาก (x_a, t_a) ไปยังผนังกำแพงศักย์ก่อน แล้วจึงสะท้อนกลับไปยัง (x_b, t_b) ดังแสดงในภาพที่ 6 อย่างไรก็ตามเส้นทางที่สองที่ผ่านการสะท้อนผนังกำแพงศักย์นั้นอาจอาศัยวิธีจุดภาพกระจกเงาหาเส้นทางสมมูลได้ กล่าวคือ โดยอาศัยผนังกำแพงศักย์เป็นกระจกเงาสะท้อนจุด (x_a, t_a) และ (x_b, t_b) ซึ่งเงาจุดคู่ดังกล่าวคือ $(-x_a, t_a)$ และ $(-x_b, t_b)$ ตามลำดับ จะได้ว่าเส้นทางแบบฉบับที่สะท้อนผ่านผนังจะสมมูลกับเส้นทางแบบฉบับจาก $(-x_a, t_a)$ ไปยัง (x_b, t_b) และ (x_a, t_a) ไปยัง $(-x_b, t_b)$ ส่งผลให้ตัวแพร่กระจายที่ผ่านการสะท้อนกลับกลายเป็น

$$K(b, -a) = K(-b, a)$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \frac{(x_b - (-x_a))^2}{(t_b - t_a)} \right\}$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \frac{(-x_b - x_a)^2}{(t_b - t_a)} \right\} \quad (4.19)$$



ภาพที่ 6 แสดงเส้นทางแบบฉบับสองเส้นทางที่เชื่อมต่อกจุด (x_a, t_a) และ (x_b, t_b) พร้อมด้วยจุดภาพในกระจกเงาที่คลั่งจองกัน

โดยอาศัยวิธีจุดภาพกระจกเงาของกูดแมน ตัวแผ่กระจายของอนุภาคอิสระกรณีเคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของกำแพงศักย์สูงอนันต์จากจุด a ไปยังจุด b เขียนเป็นสมการได้ ดังนี้

$$K(b, a) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \exp \left(\frac{im}{2\hbar (t_b - t_a)} (x_b - x_a)^2 \right) - \exp \left(\frac{im}{2\hbar (t_b - t_a)} (-x_b - x_a)^2 \right) \right\} \quad (4.20)$$

$$K(b, a) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \exp \left(\frac{i^2}{2i \frac{\hbar}{m} (t_b - t_a)} (x_b - x_a)^2 \right) - \exp \left(\frac{i^2}{2i \frac{\hbar}{m} (t_b - t_a)} (-(x_b + x_a))^2 \right) \right\} \quad (4.21)$$

$$K(b, a) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \exp \left(\frac{(-1)}{2i \frac{\hbar}{m} (t_b - t_a)} (x_b - x_a)^2 \right) - \exp \left(\frac{(-1)}{2i \frac{\hbar}{m} (t_b - t_a)} (-(x_b + x_a))^2 \right) \right\} \quad (4.22)$$

$$K(b, a) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \exp \left(\frac{(x_b - x_a)^2}{4 \left(\frac{-i \hbar (t_b - t_a)}{2m} \right)} \right) - \exp \left(\frac{-(x_b + x_a)^2}{4 \left(\frac{-i \hbar (t_b - t_a)}{2m} \right)} \right) \right\} \quad (4.23)$$

สมการ (4.23) คือ ตัวแพร่กระจายของอนุภาคอิสระกรณีเคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของ
 กำแพงศักย์สูงอนันต์จากจุด a ไปยังจุด b ดังเส้นทางที่แสดงในภาพที่ 6 สาเหตุที่เทอมที่สองของ
 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (exponential) มีค่าเป็นลบนั้น เนื่องจากเป็นตัวแพร่กระจายของอนุภาคที่
 สะท้อนผ่านผนังกำแพงศักย์ เฟสย่อมเปลี่ยนไป π

4.2 สถานะเจาะจงโมเมนตัมและระดับพลังงานที่เป็นไปได้

การพิจารณาสถานะเจาะจงโมเมนตัมและระดับพลังงานของอนุภาคภายใต้กำแพงศักย์
 อนันต์ ต้องอาศัยตัวแพร่กระจายที่ได้จากสมการ (4.23) โดยใช้สูตร

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax^2+bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{-a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad \text{หรือ} \quad e^{-\frac{b^2}{4a}} = \sqrt{\frac{-a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax^2+bx} dx$$

และ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax^2 \pm ibx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{-a}} e^{\frac{b^2}{4a}} \quad \text{หรือ} \quad e^{\frac{b^2}{4a}} = \sqrt{\frac{-a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax^2 \pm ibx} dx$$

โดยการเปลี่ยนตัวแปร x เป็น $\frac{p}{\hbar}$ นั่นคือ

$$e^{\frac{b^2}{4a}} = \sqrt{\frac{-a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{a \left(\frac{p}{\hbar} \right)^2 \pm bi \left(\frac{p}{\hbar} \right)} d \left(\frac{p}{\hbar} \right) \quad (4.24)$$

เมื่อพิจารณาแต่ละเทอมที่เป็นฟังก์ชันที่กำลังในสมการ (4.23) และใช้สมการ (4.24) สามารถแปลงตัวประกอบเลขชี้กำลังในสมการดังกล่าวได้ดังนี้

$$\exp\left(\frac{(x_b - x_a)^2}{4\left(\frac{-i\hbar(t_b - t_a)}{2m}\right)}\right) = \left(\frac{-(-i\hbar(t_b - t_a))}{2m\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\left(\frac{-i\hbar(t_b - t_a)}{2m}\right)\left(\frac{p}{\hbar}\right)^2 + (i(x_b - x_a))\left(\frac{p}{\hbar}\right)\right\} d\left(\frac{p}{\hbar}\right) \quad (4.25)$$

$$= \left(\frac{i\hbar(t_b - t_a)}{2m\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\left(\frac{-i\hbar(t_b - t_a)}{2m}\right)\left(\frac{p}{\hbar}\right)^2 + (i(x_b - x_a))\left(\frac{p}{\hbar}\right)\right\} d\left(\frac{p}{\hbar}\right) \quad (4.26)$$

$$= \left(\frac{i\hbar(t_b - t_a)}{2m\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\left(\frac{-i(t_b - t_a)}{\hbar}\right)\left(\frac{p^2}{2m}\right) + (i(x_b - x_a))\left(\frac{p}{\hbar}\right)\right\} d\left(\frac{p}{\hbar}\right) \quad (4.27)$$

$$\exp\left(\frac{-(x_b + x_a)^2}{4\left(\frac{-i\hbar(t_b - t_a)}{2m}\right)}\right) = \left(\frac{-(-i\hbar(t_b - t_a))}{2m\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\left(\frac{-i\hbar(t_b - t_a)}{2m}\right)\left(\frac{p}{\hbar}\right)^2 + (-i(x_b + x_a))\left(\frac{p}{\hbar}\right)\right\} d\left(\frac{p}{\hbar}\right) \quad (4.28)$$

$$= \left(\frac{i\hbar(t_b - t_a)}{2m\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\left(\frac{-i\hbar(t_b - t_a)}{2m}\right)\left(\frac{p}{\hbar}\right)^2 + (-i(x_b + x_a))\left(\frac{p}{\hbar}\right)\right\} d\left(\frac{p}{\hbar}\right) \quad (4.29)$$

$$= \left(\frac{i\hbar(t_b - t_a)}{2m\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \left(\frac{-i(t_b - t_a)}{\hbar} \right) \left(\frac{p^2}{2m} \right) + (-i(x_b + x_a)) \left(\frac{p}{\hbar} \right) \right\} d \left(\frac{p}{\hbar} \right) \quad (4.30)$$

เมื่อแทนสมการ (4.27) และสมการ (4.30) ลงในสมการ (4.23) จะได้

$$\begin{aligned} K(b, a) = & \left(\frac{m}{2\pi i\hbar(t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{i\hbar(t_b - t_a)}{2m\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\hbar} \right) \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left\{ \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a) + i(x_b - x_a) \left(\frac{p}{\hbar} \right) \right) \right\} - \right. \\ & \left. \left\{ \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a) - i(x_b + x_a) \left(\frac{p}{\hbar} \right) \right) \right\} \right] dp \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} K(b, a) = & \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left\{ \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a) + i(x_b - x_a) \left(\frac{p}{\hbar} \right) \right) \right\} - \right. \\ & \left. \left\{ \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a) - i(x_b + x_a) \left(\frac{p}{\hbar} \right) \right) \right\} \right] dp \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} K(b, a) = & \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a) \right) \right] \right. \\ & \left. \left\{ \left[\exp \left(i(x_b - x_a) \left(\frac{p}{\hbar} \right) \right) \right] - \left[\exp \left(-i(x_b + x_a) \left(\frac{p}{\hbar} \right) \right) \right] \right\} \right\} dp \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$K(b, a) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a) \right) \right] \left[\exp \left(-i \frac{p}{\hbar} x_a \right) \right] \right. \\ \left. \left\{ \exp \left(i \frac{p}{\hbar} x_b \right) - \exp \left(-i \frac{p}{\hbar} x_b \right) \right\} \right\} dp \quad (4.34)$$

$$K(b, a) = \left(\frac{2i}{2\pi\hbar} \right) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a) \right) \right] \left[\exp \left(-i \frac{p}{\hbar} x_a \right) \right] \right. \\ \left. \left\{ \frac{\exp \left(i \frac{p}{\hbar} x_b \right) - \exp \left(-i \frac{p}{\hbar} x_b \right)}{2i} \right\} \right\} dp \quad (4.35)$$

$$K(b, a) = \left(\frac{i}{\pi\hbar} \right) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a) \right) \right] \right. \\ \left. \left[\exp \left(-i \frac{p}{\hbar} x_a \right) \right] \left[\sin \left(\frac{p}{\hbar} x_b \right) \right] \right\} dp \quad (4.36)$$

$$K(b, a) = \left(\frac{i}{\pi\hbar} \right) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a) \right) \right] \right. \\ \left. \left[\cos \left(\frac{p}{\hbar} x_a \right) - i \sin \left(\frac{p}{\hbar} x_a \right) \right] \left[\sin \left(\frac{p}{\hbar} x_b \right) \right] \right\} dp \quad (4.37)$$

$$K(b, a) = \left(\frac{i}{\pi\hbar} \right) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a) \right) \right] \left[\cos \left(\frac{p}{\hbar} x_a \right) \right] \left[\sin \left(\frac{p}{\hbar} x_b \right) \right] \right\} dp + \\ \left(\frac{-i^2}{\pi\hbar} \right) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a) \right) \right] \left[\sin \left(\frac{p}{\hbar} x_a \right) \right] \left[\sin \left(\frac{p}{\hbar} x_b \right) \right] \right\} dp$$

(4.38)

$$\begin{aligned}
K(b, a) = & \left(\frac{i}{\pi \hbar} \right) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a) \right) \right] \left[\cos \left(\frac{p}{\hbar} x_a \right) \right] \left[\sin \left(\frac{p}{\hbar} x_b \right) \right] \right\} dp + \\
& \left(\frac{1}{\pi \hbar} \right) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a) \right) \right] \left[\sin \left(\frac{p}{\hbar} x_a \right) \right] \left[\sin \left(\frac{p}{\hbar} x_b \right) \right] \right\} dp
\end{aligned} \tag{4.39}$$

เมื่อพิจารณาอินทิกรัลเทอมแรกในสมการ (4.39) ซึ่งเป็นการอินทิเกรตฟังก์ชันคี่รอบแกนสมมาตรใดๆ ดังนั้น

$$\left(\frac{i}{\pi \hbar} \right) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a) \right) \right] \left[\cos \left(\frac{p}{\hbar} x_a \right) \right] \left[\sin \left(\frac{p}{\hbar} x_b \right) \right] \right\} dp = 0 \tag{4.40}$$

เมื่อแทนสมการ (4.40) ในสมการ (4.39) จะได้ตัวแปรกระจายของอนุภาคอิสระกรณีเคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของกำแพงศักย์สูงอนันต์จากจุด a ไปยังจุด b คือ

$$K(b, a) = \left(\frac{1}{\pi \hbar} \right) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a) \right) \right] \left[\sin \left(\frac{p}{\hbar} x_a \right) \right] \left[\sin \left(\frac{p}{\hbar} x_b \right) \right] \right\} dp \tag{4.41}$$

และเมื่อนำสมการ (4.41) เปรียบเทียบกับสมการ (3.24) จะได้สถานะเจาะจงโมเมนตัมดังนี้

$$\Psi_p(x_a) = \frac{1}{\sqrt{\pi \hbar}} \sin \left(\frac{px_a}{\hbar} \right) \tag{4.42}$$

$$\Psi_p^*(x_b) = \Psi_p(x_b) = \frac{1}{\sqrt{\pi \hbar}} \sin \left(\frac{px_b}{\hbar} \right) \tag{4.43}$$

พร้อมด้วยระดับพลังงานที่ต่อเนื่องที่เป็นไปได้คือ $E(p) = \frac{p^2}{2m}$ ผลลัพธ์ที่ได้ดังกล่าว
สอดคล้องกันเป็นอย่างดีกับค่าที่ได้โดยการแก้สมการชเรอดิงเงอร์

บทที่ 5

สรุป

จากการวิจัยพบว่าวิธีการอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมนสามารถหาตัวแผ่กระจายของอนุภาคอิสระกรณีเคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของกัมแพงศักย์สูงอนันต์ได้คือ

$$K(b, a) = \left(\frac{1}{\pi \hbar} \right) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a) \right) \right] \left[\sin \left(\frac{p}{\hbar} x_a \right) \right] \left[\sin \left(\frac{p}{\hbar} x_b \right) \right] \right\} dp$$

พร้อมทั้งได้สถานะเจาะจงโมเมนตัมและระดับพลังงานที่ต่อเนื่องที่เป็นไปได้คือ

$$\Psi_p(x_a) = \frac{1}{\sqrt{\pi \hbar}} \sin \left(\frac{px_a}{\hbar} \right), \quad \Psi_p(x_b) = \frac{1}{\sqrt{\pi \hbar}} \sin \left(\frac{px_b}{\hbar} \right) \quad \text{และ} \quad E(p) = \frac{p^2}{2m}$$

ผลเฉลยของปัญหากัมแพงศักย์อนันต์ที่ได้นี้สอดคล้องกันเป็นอย่างดีกับผลเฉลยที่ได้โดยการแก้สมการชเรอดิงเงอร์ซึ่งเป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้ว ดังนั้นโดยตัวผลเฉลยจึงมิได้มีความสำคัญพิเศษแต่ประการใด ที่สำคัญก็คือวิธีการอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมนสามารถแก้ปัญหาดังกล่าวได้หรือไม่ วิธีการอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมนนั้นสามารถใช้ได้ผลดีต่อกรณีที่อินทิกรัลมีรูปแบบเป็นเกาส์เซียนและขอบเขตของการอินทิเกรตจะต้องไม่จำกัดเท่านั้น สิ่งที่ได้แสดงในการวิจัยนี้คือการนำแนวคิดวิธีจุดภาพของกระจกเงาไปประยุกต์ใช้กับวิธีการอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมน เพื่อหาตัวแผ่กระจายของอนุภาคอิสระกรณีเคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของกัมแพงศักย์สูงอนันต์ แนวคิดดังกล่าวในปัญหานี้ก็คือมีเส้นทางแบบฉบับจำนวนสองเส้นทาง โดยเส้นทางแรกเป็นเส้นทางของอนุภาคอิสระที่เคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้น (x_a, t_a) ไปยังจุดปลาย (x_b, t_b) โดยตรง ในขณะที่เส้นทางที่สองนั้นเป็นเส้นทางที่อนุภาคอิสระเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้น (x_a, t_a) ไปยังผนังกัมแพงศักย์ก่อน แล้วจึงสะท้อนกลับไปยังจุดปลาย (x_b, t_b) โดยเส้นทางที่สองนั้นสมมูลกับเส้นทางของอนุภาคอิสระที่เคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้น (x_a, t_a) ไปยังจุด $(-x_b, t_b)$ จากแนวคิดวิธีจุดภาพของกระจกเงานี้และใช้วิธีการอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมน ทำให้หาตัวแผ่กระจายของอนุภาคได้และสามารถคำนวณหาสถานะเจาะจงโมเมนตัมและระดับพลังงานที่ต่อเนื่องที่เป็นไปได้ของอนุภาคในระบบดังกล่าวได้ด้วย ซึ่งนั่นเป็นข้อดีของตัวแผ่กระจายที่สามารถให้สถานะเจาะจงโมเมนตัมหรือฟังก์ชันคลื่นและระดับพลังงานที่ต่อเนื่องได้ไปพร้อมๆ กัน จะเห็นได้ว่าวิธีการอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมนนั้นก็สามารถแก้ปัญหากัมแพงศักย์อนันต์ได้ ซึ่งที่ผ่านมาแล้วยังขาด

ประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาดังกล่าว ทั้งนี้โดยการนำแนวคิดวิธีจุดภาพของกระจกเงาไปประยุกต์ใช้กับวิธีการอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมน วิธีจุดภาพของกระจกเงานี้จึงมีประโยชน์มาก ซึ่งอาจนำขยายไปสู่ระบบที่ซับซ้อนยิ่งขึ้นได้ อาทิเช่น ปัญหาอนุภาคในกล่องหรือบ่อจตุรัสสี่กอนันต์ ทั้งยังเป็นอีกปัญหาหนึ่งที่วิธีการอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมนขาดประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาเช่นกัน

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- นิคม ชูศิริ. (2539). อินทิกรัลตามเส้นทางของอนุภาคไฟฟ้าภายใต้แรงฮาร์มอนิกและสนามแม่เหล็กคงที่. รายงานการวิจัย. สงขลา : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ภาคใต้.
- นิคม ชูศิริ. (2540). ตัวแผ่กระจายของอิเล็กตรอนภายใต้อิทธิพลของแรงฮาร์มอนิก สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้า. รายงานการวิจัย. สงขลา : มหาวิทยาลัยทักษิณ.
- นิคม ชูศิริ. (2541). อินทิกรัลตามเส้นทางของก๊าซอิเล็กตรอนในระบบสองมิติภายใต้อิทธิพลของแรงฮาร์มอนิก สนามแม่เหล็ก สนามไฟฟ้าและศักย์ที่ไร้ระเบียบ. รายงานการวิจัย. สงขลา : มหาวิทยาลัยทักษิณ.
- นิคม ชูศิริ. (2548). กลศาสตร์ควอนตัม:แนวคิดและการประยุกต์ 1. ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์. มหาวิทยาลัยทักษิณ.
- นิพนธ์ ตั้งประเสริฐ. (2542). กลศาสตร์ควอนตัม 1. ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์. มหาวิทยาลัยรามคำแหง.
- วิรุฬห์ สายคณิต. (2525). ทฤษฎีควอนตัม. ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- อภิชาติ พัฒนวิริยะพิศาล. (2547). ฟิสิกส์แผนใหม่. ภาควิชาฟิสิกส์และวิทยาศาสตร์ทั่วไป คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. มหาวิทยาลัยราชภัฏสุราษฎร์ธานี.
- Choosiri, N. and Sayakanit, V. (1984). Path Integrals of the Hydrogen Atom. Thai Journal of Physics., 1(1) , 1-13.
- Feynman, R.P. and Hibbs, A.R. (1965). Quantum Mechanics and Path Integrals. New York : McGraw-Hill.
- Goodman, M. (1981). Path Integral Solution of the Square Well. Am. J. Phys., 49(9), 843-847.
- Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. (1965). Table of Integrals, Series and Products. 4th ed. New York : Academic Press.
- Ho, R. and Inomata, A. (1982). Phys. Rev. Lett., 48(4), 231.
- Liboff, R.L. (1993). Introductory Quantum Mechanics. Reading : Addison-Wesley.
- Messiah, A. (1961). Quantum Mechanics I. New York : Wiley.

Pauli, W. (1952). Ausgewählte Kapitel der Feldquantisierung (Lecture note). Zurich : ETH.

139.

van Vleck, J.H. (1978). Proc. Natn. Acad. Sci., 14,178.

ประวัติย่อผู้วิจัย

ชื่อ – ชื่อสกุล	นายอัฐชัย ถาวรสุวรรณ
วันเดือนปีเกิด	8 กรกฎาคม พ.ศ. 2517
สถานที่เกิด	จ.สงขลา
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	301 ถ.ไทรบุรี ต.บ่อยาง อ.เมือง จ.สงขลา 90000
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	อาจารย์พิเศษ
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	แผนกวิชาวิทยาศาสตร์ คณะศิลปศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลศรีวิชัย สงขลา
ประวัติการศึกษา	
พ.ศ. 2539	การศึกษาระดับบัณฑิต/วิทยาศาสตร์-ฟิสิกส์//มหาวิทยาลัย ศรีนครินทรวิโรฒ ภาควิชา