ผลของการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่มีต่อมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ และความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ของนักศึกษาหลักสูตร ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 โรงเรียนนครอาชีวศึกษา

วิทยานิพนธ์

ของ

ศุภชัย เรืองเดช

เสนอต่อมหาวิทยาลัยทักษิณ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

กรกฎาคม 2546

ISBN 974-451-505-8

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัย

จากมหาวิทยาลัยทักษิณ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

คณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์และคณะกรรมการสอบปากเปล่าวิทยานิพนธ์ได้พิจารณาวิทยานิพนธ์ฉบับนี้แล้วเห็นสมควรรับเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ของมหาวิทยาลัยทักษิณได้

คณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

……………………..………..…………… ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิชัย ชำนิ)

……………………..………..…………… กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เฉลิมศรี ชำนิ)

คณะกรรมการสอบปากเปล่าวิทยานิพนธ์

……………………..………..…………… ประธานกรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิชัย ชำนิ)

……………………..………..…………… กรรมการ
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เฉลิมศรี ชำนิ)

…………………..………..……………… กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(อาจารย์ ดร.เรวดี กระโหมวงศ์)

…………………..………..……………… กรรมการที่แต่งตั้งเพิ่มเติม
(ผู้ช่วยศาสตราจารย์เสกสรรค์ ดำกระบี่)

มหาวิทยาลัยทักษิณอนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ของมหาวิทยาลัยทักษิณ

………….……………………… ..ประธานอนุกรรมการบัณฑิตศึกษา
(อาจารย์ ดร.ฉันทัส ทองช่วย)
วันที่ เดือน กรกฎาคม พ.ศ. 2546

ประกาศคุณูปการ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์ได้ด้วยความช่วยเหลือ แนะนำ ตรวจแก้ไขข้อบกพร่องของวิทยานิพนธ์และให้คำปรึกษาอย่างดียิ่งจากผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วิชัย ชำนิ ประธานกรรมการและผู้ช่วยศาสตราจารย์เฉลิมศรี ชำนิ กรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร. เรวดี กระโหมวงศ์ ดร. สมมาต บรรจงรัตน์ และอาจารย์สมคิด วงศ์นาถ ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำ ซึ่งเป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่อการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ และขอบพระคุณอาจารย์ผู้สอนทุกท่านที่ได้ถ่ายทอดความรู้ แนวคิด และให้คำแนะนำต่าง ๆ เป็นอย่างดีตลอดระยะเวลาที่ได้ศึกษาอยู่ในมหาวิทยาลัยทักษิณ

ขอขอบพระคุณ นางเดือนฉาย สุวรรณโชติ ครูใหญ่โรงเรียนนครอาชีวศึกษาและขอขอบคุณนักศึกษาระดับชั้น ปวส.1 โรงเรียนนครอาชีวศึกษา ที่ได้กรุณาให้ความร่วมมือในการเก็บรวบรวมข้อมูลเป็นอย่างดี

ขอขอบคุณบริษัทเท็กซัส อินสทรูเมนท์ (Taxas Instrument) ที่ได้สนับสนุนเงินทุนอุดหนุนการทำวิทยานิพนธ์และกรุณาให้ความอนุเคราะห์ในการให้ยืมเครื่องคำนวณเชิงกราฟมาใช้ในการทดลองวิจัย

ขอขอบคุณนายทรงวิทย์ ฤทธิกัณฑ์ และนางสาวจินดา สวัสดิ์ทวี ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำซึ่งเป็นประโยชน์อย่างยิ่งต่อการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้

ขอขอบคุณนางสาวอังคณา โฆษิตธาตรี และนางสาวจารุวรรณ เดชพรหม ที่ได้กรุณาช่วยเหลือในการพิสูจน์อักษรของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และขอขอบคุณ พี่ ๆ เพื่อน ๆ น้อง ๆ ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือและให้กำลังใจในการทำวิทยานิพนธ์ครั้งนี้จนสำเร็จ

คุณค่าทั้งหลายที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบเป็นกตัญญูกตเวทิตาแด่บิดามารดา บูรพาจารย์และญาติพี่น้องทุกท่านที่ให้ความเมตตาและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยตลอดมา

ศุภชัย เรืองเดช

สารบัญ

บทที่ หน้า

บทที่ **หน้า**

บัญชีภาพประกอบ

ภาพประกอบ **หน้า**

บัญชีตาราง

ตาราง **หน้า**

บทที่ 1

บทนำ

ภูมิหลัง

ในยุคโลกาภิวัตน์ ซึ่งสภาวะแวดล้อมเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว ทั้งด้านเศรษฐกิจ การเมือง สังคม เทคโนโลยี วัฒนธรรม และความต้องการของสังคมไทยที่จะต้องปรับเปลี่ยนให้พร้อมสำหรับการแข่งขันในเวทีเศรษฐกิจโลก สภาพการณ์ดังกล่าวส่งผลให้เกิดกระแสเรียกร้องการปฏิรูปการศึกษา เพื่อให้การศึกษาเป็นเครื่องมือในการพัฒนาเศรษฐกิจ สังคม วัฒนธรรม และการเมืองของประเทศอย่างแท้จริง (วัฒนพร ระงับทุกข์. 2542 : 4) การศึกษาเป็นเครื่องมือของการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ เพื่อส่งเสริมสังคมแห่งการเรียนรู้ สร้างคนที่มีคุณภาพ (สุรศักดิ์ ปาเฮ. 2543 : 6)

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีบทบาทสำคัญในการพัฒนานักเรียนให้เป็นคนมีความรับผิดชอบ มีวินัยในตนเอง มองการณ์ไกล คิดดี มีคุณธรรม มีความรู้ความสามารถ และดำรงชีวิตอยู่ในสังคมได้อย่างมีความสุข ทั้งนี้เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการคิด มีระบบและระเบียบขั้นตอนในการคิด มีเหตุผล มีประโยชน์ในชีวิตประจำวันและเป็นพื้นฐานในการศึกษาวิทยาการสาขาต่าง ๆ และความเจริญก้าวหน้าทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีล้วนแต่อาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์ (สิริพร ทิพย์คง. 2544 : 7) ยุพิน พิพิธกุล (2539 : 1) ได้กล่าวว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เกี่ยวข้องกับความคิด กระบวนการและเหตุผล คณิตศาสตร์ฝึกให้คนคิดอย่างมีระเบียบและเป็นรากฐานของวิทยาการหลาย ๆ สาขา ความเจริญก้าวหน้าทางเทคโนโลยี วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ ฯลฯ ล้วนแต่อาศัยคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น นักเรียนส่วนมากไม่ประสบผลสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์เท่าที่ควร จากการรายงานของศูนย์ปฏิบัติการปฏิรูปการศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ ทำให้ทราบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับต่ำ (ศูนย์ปฏิบัติการปฏิรูปการศึกษา. 2544 : 3) สาเหตุหนึ่งที่ทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับต่ำก็เนื่องมาจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เป็นนามธรรม ยากที่จะทำให้เกิดความเข้าใจ ครูผู้สอนจำเป็นที่จะต้องหาทางอธิบายความเป็นนามธรรมให้เป็นรูปธรรมโดยอาศัยเทคโนโลยีทางการศึกษา

ปัจจุบันสื่อและเทคโนโลยีทางการศึกษาได้เข้ามามีบทบาทต่อการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ภาพลักษณ์การสอนเก่า ๆ ที่ครูจะเน้นให้นักเรียนท่องจำเนื้อหาวิชา และเรียนเฉพาะในห้องเรียนอย่างเดียวก็จะค่อย ๆ หมดไป ความเจริญรุดหน้าทางด้านเทคโนโลยีก่อให้เกิดสื่อการสอนมากมาย เช่น เครื่องฉายสไลด์ โทรทัศน์ แถบบันทึกภาพพร้อมเสียง (วีดิทัศน์) เครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ เครื่องคอมพิวเตอร์ เครื่องคำนวณ เป็นต้น สื่อการสอนทำให้เกิดการเรียนรู้ง่ายขึ้น ประหยัดเวลา ช่วยถ่ายทอดความรู้สึก ความคิดเห็นระหว่างครูและนักเรียน ช่วยสร้างความเข้าใจในเรื่องราวที่ครูสอนได้เร็วและจำได้อย่างถาวร และสามารถเรียนรู้ได้มากขึ้นในช่วงเวลาเท่าเดิม (จริยา เหนียนเฉลย. ม.ป.ป. : 6) สื่อการศึกษายังช่วยส่งเสริมกิจกรรมการเรียนการสอนให้เป็นรูปธรรม ส่งเสริมให้ครูสามารถเปลี่ยนพฤติกรรมการสอนโดยเน้นนักเรียนเป็นศูนย์กลางได้ง่ายกว่าการสอนบรรยายแต่เพียงอย่างเดียว (อำนวย เดชชัยศรี. 2542 : 1) และผู้เรียนทุกวัยจะต้องมีโอกาสเรียนรู้จากแหล่งความรู้ที่มีอยู่รอบตัว ทั้งจากครูผู้สอน เครื่องคอมพิวเตอร์และธรรมชาติแวดล้อม

เครื่องคำนวณเชิงกราฟ (graphing calculator) เป็นเทคโนโลยีทางการศึกษาชนิดหนึ่งที่มีประสิทธิภาพในการทำงานสูง สามารถใช้เป็นเครื่องคำนวณได้ มีหน่วยความจำ สามารถเขียนโปรแกรมเบื้องต้น แสดงรูปกราฟได้ทั้งสองมิติและสามมิติ ใช้งานได้หลาย ๆ อย่างเช่นเดียวกับเครื่องคอมพิวเตอร์ แต่มีขนาดเล็กสามารถพกพาติดตัวได้สะดวก เครื่องคำนวณเชิงกราฟ เพิ่งเข้ามามีบทบาทต่อการเรียนการสอนในประเทศไทย ซึ่งต่างกับนานาประเทศที่นำเครื่องคำนวณเชิงกราฟไปใช้ในการเรียนการสอนอย่างแพร่หลาย ดังที่สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของประเทศสหรัฐอเมริกา (The National Council of Teachers of Mathemetics : NCTM) และสมาคมต่าง ๆ รวมทั้งเอกชน ได้สนับสนุนให้ใช้เครื่องคำนวณในการเรียนของนักเรียนตั้งแต่ชั้นอนุบาลจนถึงวิทยาลัย (Pomerantz . 1997 : 1) สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของประเทศสหรัฐอเมริกายังเชื่อว่าเครื่องคำนวณเป็นเครื่องมือที่สำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (www.nctm.org/news/speaksout/spksoutcal.pdf : 2001) เครื่องคำนวณเชิงกราฟช่วยปฏิวัติการสอนและการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่จะต้องเสียเวลากับการคำนวณโดยใช้ปากกาและกระดาษ ให้สามารถเรียนรู้มโนทัศน์และการประยุกต์ (Wheeler et.al. 1996 : preface) เครื่องคำนวณเชิงกราฟสามารถใช้ในการเรียนการสอนวิชาสถิติ พีชคณิตเชิงเส้น แคลคูลัส ฟังก์ชันและกราฟ และเรขาคณิต

แคลคูลัสนับเป็นเครื่องมือสำคัญทางคณิตศาสตร์ประยุกต์เพื่อใช้กับสาขาวิชาการต่าง ๆ โดยเฉพาะในสาขาวิศวกรรมศาสตร์ บริหารธุรกิจ เศรษฐศาสตร์ แพทยศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ (วิชัย ทิพณีย์และรัชเมธี รัชนิพันธ์. 2538 : คำนำ) การเรียนการสอนแคลคูลัสที่ผ่านมาในอดีตสมัยยังไม่มีการใช้สื่อและเทคโนโลยีเข้ามาช่วยในการเรียนการสอน พบว่าเราต้องใช้เวลามากใน

การคำนวณขั้นพื้นฐาน ทำให้นักเรียนมีประสบการณ์ในการประยุกต์และแก้ปัญหาของเนื้อหาน้อย การใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟจะช่วยทำให้นักเรียนมีเวลาในการคิดแก้ปัญหามากขึ้น และไม่รู้สึกเบื่อหน่ายต่อการคำนวณ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2544 : 1) อันอาจจะส่งผลให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงขึ้น

เนื่องจากปัจจุบันการศึกษาและการวิจัยเกี่ยวกับการนำเครื่องคำนวณเชิงกราฟมาใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในประเทศไทยยังมีน้อย ณัชชา กมล ได้ทำการศึกษาเรื่อง ผลของการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟที่มีต่อมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ และความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิต สังกัดทบวงมหาวิทยาลัย ผลปรากฏว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟมีมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์และความสามารถด้านมิติสัมพันธ์สูงกว่านักเรียนที่ไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เพื่อศึกษาว่านักศึกษาที่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียน จะมีมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์และการประยุกต์ปริพันธ์สูงกว่านักเรียนที่ไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟหรือไม่ ซึ่งผลของการวิจัยจะทำให้เกิดประโยชน์ต่อการนำเครื่องคำนวณเชิงกราฟไปใช้ในการเรียนการสอนต่อไป

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อเปรียบเทียบมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์ของนักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ระหว่างกลุ่มที่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟกับกลุ่มที่ไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียน
2. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์ของนักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ระหว่างกลุ่มที่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟกับกลุ่มที่ไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียน

สมมติฐานของการวิจัย

1. นักศึกษาที่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ มีมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์สูงกว่านักศึกษาที่ไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

2. นักศึกษาที่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนวิชาคณิตศาสตร์มีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์สูงกว่านักศึกษาที่ไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ความสำคัญของการวิจัย

1. ทำให้ทราบพัฒนาการด้านมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์และความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์ของนักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ในการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

2. เป็นแนวทางในการพัฒนาการการเรียนการสอนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

3. เป็นแนวทางให้มีการวิจัยเกี่ยวกับการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟระดับชั้นต่าง ๆ สำหรับเนื้อหาคณิตศาสตร์อื่น ๆ

ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้ ได้กำหนดขอบเขตของการวิจัยไว้ดังนี้

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ปีการศึกษา 2545 โรงเรียนนครอาชีวศึกษา อำเภอเมือง จังหวัดนครศรีธรรมราช สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาเอกชน ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ 6

กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 (ปวส.1) โรงเรียนนครอาชีวศึกษา อำเภอเมือง จังหวัดนครศรีธรรมราช สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการ-ศึกษาเอกชน ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ 6 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 ซึ่งได้จากการสุ่มอย่างง่าย จำนวน 40 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 20 คน และกลุ่มควบคุม 20 คน

2. เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยเป็นเนื้อหาหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ 6 เรื่อง ปริพันธ์และการประยุกต์ปริพันธ์ ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ตามหลักสูตรกรมอาชีวศึกษา สายวิชาชีพช่างอุตสาหกรรม ซึ่งครอบคลุมหัวข้อต่อไปนี้

1) ปริพันธ์และปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

2) ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

3) ปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันชี้กำลัง

4) เทคนิคการหาค่าปริพันธ์

5) ปริพันธ์จำกัดเขตและการประยุกต์

3. ระยะเวลาที่ใช้ในการสอนจำนวน 18 คาบ คาบละ 50 นาทีในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545

4. ตัวแปรที่ศึกษา

1) ตัวแปรอิสระ คือการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

2) ตัวแปรตามประกอบด้วย

(1) มโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์

(2) ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์

นิยามศัพท์เฉพาะ

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ใช้คำศัพท์ในความหมายดังนี้

1. นักศึกษา หมายถึงนักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 สายวิชาชีพช่างอุตสาหกรรม ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ 6 ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 โรงเรียนนครอาชีวศึกษา จังหวัดนครศรีธรรมราช

2. เครื่องคำนวณเชิงกราฟ (graphing calculator) หมายถึง เครื่องคำนวณที่มีหน่วยความจำ สามารถเขียนโปรแกรมการคำนวณเบื้องต้น แสดงรูปกราฟทั้ง 2 มิติและ 3 มิติ ใช้งานได้หลาย ๆ อย่างเช่นเดียวกับเครื่องคอมพิวเตอร์ แต่มีขนาดเล็กสามารถพกพาติดตัวได้ เครื่องคำนวณเชิงกราฟที่ใช้ในการวิจัยเป็นของบริษัทเท็กซัส อินสทรูเมนท์ (Taxas Instrument) รุ่น TI – 92

3. การใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนคณิตศาสตร์หมายถึง การนำเครื่องคำนวณเชิงกราฟมาใช้เป็นสื่อในการสอนคณิตศาสตร์ ให้นักศึกษามีโอกาสใช้เป็นสื่อในการเรียน ทำแบบฝึกหัดทั้งในและนอกห้องเรียน

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษาเรื่อง ผลของการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่มีต่อมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ ของนักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 โรงเรียนนครอาชีวศึกษา ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องตามลำดับต่อไปนี้

เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

1. บทบาทของเครื่องคำนวณเชิงกราฟในการสอนคณิตศาสตร์
2. ข้อแนะนำในการใช้เครื่องคำนวณและเครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์
3. การใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในห้องเรียน

มโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์

1. ความหมายของมโนทัศน์และมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์
2. การสอนให้เกิดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์

ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์

1. ความหมายโจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์
2. ขั้นตอนการสอนการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์
3. การพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์
4. ยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. งานวิจัยในประเทศ
2. งานวิจัยต่างประเทศ

เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

1. บทบาทของเครื่องคำนวณเชิงกราฟในการสอนคณิตศาสตร์

เครื่องคำนวณเชิงกราฟได้เข้ามามีบทบาทต่อการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เป็นอย่างมากในปัจจุบัน เนื่องจากเนื้อหาคณิตศาสตร์มีลักษณะเป็นนามธรรมยากที่จะเข้าใจนักการศึกษาได้กล่าวถึงบทบาทของเครื่องคำนวณเชิงกราฟ ดังนี้

จอห์น เบอร์รี และ บอบ ฟรานซิส (ณัชชา 2542 : 13 อ้างถึง Berry and Francis, 1996 : 3-13) กล่าวถึงบทบาทของเครื่องคำนวณเชิงกราฟไว้ สรุปได้ดังนี้

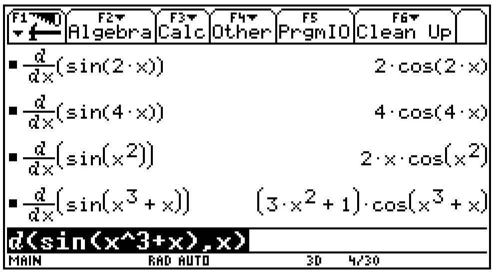
1) เครื่องคำนวณเชิงกราฟเป็นเครื่องมือในการกระทำทางคณิตศาสตร์ เช่น

(1) การหาค่าของ $V(t) = \ln (m_o + gt^2) + gt$ เมื่อกำหนดค่าของ m_o, g และ t มาให้

(2) การเขียนกราฟของ $y = x^3 - 2x^2 + 1$

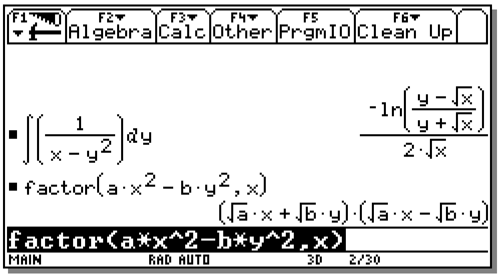
(3) การหาค่า $\int \frac{1}{1+x^4}$ เป็นต้น

2) เครื่องคำนวณเชิงกราฟเป็นเครื่องมือในการอธิบายหลักการสำคัญ ๆ ทางคณิตศาสตร์ การเรียนรู้มโนทัศน์ใหม่ ๆ เชิงคณิตศาสตร์ เช่น ในการสอนให้นักเรียนเข้าใจสูตรทั่วไปของ $\frac{d}{dx}\sin(u(x)) = \cos(u(x))\frac{du}{dx}$ โดยครูยกตัวอย่างค่าของ sin (2x), sin (4x) และ $\sin(x^3 + x)$ แล้วให้นักเรียนเปรียบเทียบค่าที่ได้ เพื่ออธิบายคำตอบของ $\frac{d}{dx}\sin(u(x))$ โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟเข้าช่วยในการเรียนรู้และอธิบายสิ่งที่เกิดขึ้นดังภาพประกอบ 1

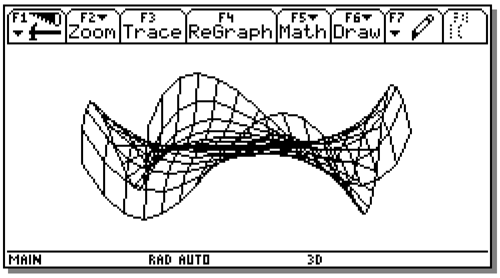


ภาพประกอบ 1 แสดงการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

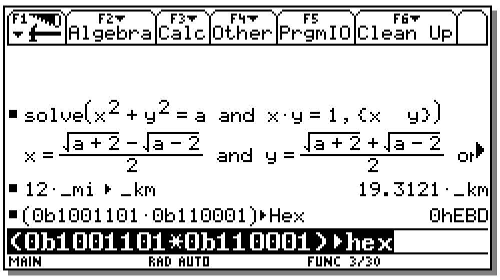
คัทซ์เลอร์ (Kutzler. 2000 : 5-6) กล่าวว่า เครื่องคำนวณเชิงกราฟเป็นเครื่องคำนวณที่มีความสามารถเกือบเท่าเทียมกับคอมพิวเตอร์ สามารถแสดงการหา อนุพันธ์ ปริพันธ์ เขียนกราฟ แก้สมการ การคิดคำนวณและแก้ปัญหาเกี่ยวกับเมทริกซ์ ได้อย่างรวดเร็ว ดังภาพประกอบ



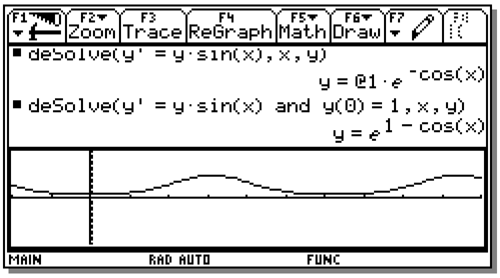
ภาพประกอบ 2 แสดงการหาค่าปริพันธ์ไม่จำกัดเขต และการแยกตัวประกอบของฟังก์ชันพหุนาม



ภาพประกอบ 3 แสดงกราฟ 3 มิติ ซึ่งสามารถหมุนได้ในเวลาปฏิบัติจริง



ภาพประกอบ 4 แสดงการแก้ระบบสมการ การแปลงหน่วยทางด้านฟิสิกส์ และการแปลงของเลขฐานในระบบเลขฐานหก



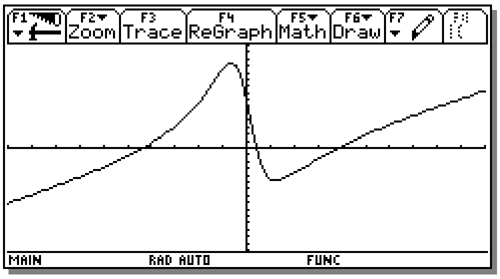
ภาพประกอบ 5 แสดงการคำนวณทางพีชคณิต และแสดงกราฟของสมการเชิงอนุพันธ์

เวทส์ และ ดิมานา (Waits and Demana. 2000 : 54-55) ได้กล่าวถึงเครื่องคำนวณเชิงกราฟไว้ว่า เราสามารถที่จะเรียนรู้จากเครื่องคำนวณเชิงกราฟ เพราะเครื่องคำนวณเชิงกราฟสามารถเปลี่ยนแปลงวิธีการเรียนการสอนคณิตศาสตร์จากการเรียนรู้โดยตรงจากครูก่อน หลังจากนั้นจึงใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ตัวอย่างข้างล่างเป็นการคำนวณโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

1) การคำนวณเลขคณิตที่สลับซับซ้อน เช่น $\frac{1789}{1.0725}$

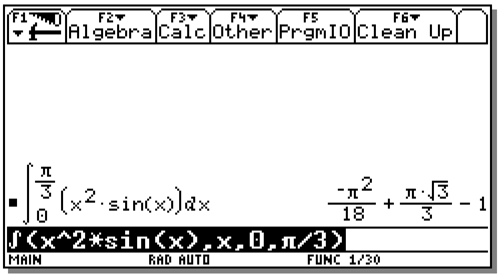
2) การคำนวณ $1250(1.04125)^{12}$

3) การเขียนกราฟที่สลับซับซ้อน เช่น กราฟของ $f(x) = \frac{x^3 - 17x + 7}{x^2 + 1}$ ซึ่งในอดีตการเขียนกราฟจะต้องหาอนุพันธ์ $f'(x)$ และแก้สมการ $f'(x) = 0$ โดยใช้กระดาษปากกาและสูตรเท่านั้น ปัจจุบันนักเรียนสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันได้หลายฟังก์ชัน และถูกต้องกว่า



ภาพประกอบ 6 แสดงกราฟของ $f(x) = \frac{x^3 - 17x + 7}{x^2 + 1}$

4) การหาค่าปริพันธ์ที่สลับซับซ้อนเช่น $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin(x)\,dx$ ดังภาพประกอบ 7



ภาพประกอบ 7 แสดงการหาค่า $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin(x)\,dx$

5) การแก้ปัญหาสมการที่สลับซับซ้อน เช่นสมการพหุนาม $3x^3 + 2x^2 - 7x + 9 = 0$

6) การแก้ปัญหาที่สลับซับซ้อนที่ไม่สามารถแก้โดยวิธีการ กระดาษ และปากกา

จากแนวคิดของนักการศึกษาเกี่ยวกับบทบาทของเครื่องคำนวณเชิงกราฟ จะเห็นได้ว่า เครื่องคำนวณเชิงกราฟ เป็นสื่อที่มีบทบาทมากในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ที่ทำให้ครูผู้สอนต้องเปลี่ยนแปลงวิธีการสอน โดยอาศัยประสบการณ์ผสมผสานกับการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ เพื่อทำให้นักเรียนสามารถเรียนรู้โดยเห็นความเป็นรูปธรรมมากขึ้น ทำให้การเรียนการสอนไม่น่าเบื่อ และมีความสุขในการเรียน

2. ข้อแนะนำในการใช้เครื่องคำนวณและเครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

ฟุยส์ และ ทิสช์เลอร์ (Fuys and Tischler. 1979 : 562-568) ได้เสนอแนะเกี่ยวกับการใช้เครื่องคำนวณไว้ว่า

1) ใช้เครื่องคำนวณเกี่ยวกับเลขคณิตเบื้องต้น เช่น บวก ลบ คูณ และหาร

2) ใช้เครื่องคำนวณในการตรวจคำตอบ

3) ใช้เครื่องคำนวณในการกะประมาณและคำนวณ

4) ใช้ในการหารูปแบบทั่วไป

5) ใช้เครื่องคำนวณในการแก้ปัญหาประจำวัน

มอร์ริส (Morris. 1981 : 202-204) ได้เสนอแนะเกี่ยวกับการใช้เครื่องคำนวณไว้ว่า

1) ใช้เครื่องคำนวณในการตรวจสอบรูปแบบของจำนวน

2) ใช้เครื่องคำนวณในการค้นหาความสัมพันธ์และพัฒนามโนทัศน์ โดยหาความแตกต่างในการคำนวณ

3) ใช้เครื่องคำนวณในการกะประมาณในใจ

4) ใช้เครื่องคำนวณในการจัดเตรียมความพร้อมของงานสำหรับแก้ปัญหาสมการ

5) ใช้เครื่องคำนวณในการประยุกต์ปัญหา

6) ใช้เครื่องคำนวณในการพัฒนาเทคนิคการแก้ปัญหาโจทย์ เดาและตรวจคำตอบ

7) ใช้เครื่องคำนวณสำหรับสำรวจลักษณะเฉพาะ

ลิมลิช (Lemlech. 1984 : 190-191) ได้แนะนำการใช้เครื่องคำนวณในห้องเรียนไว้ดังต่อไปนี้ คือ

1) ใช้เป็นแรงจูงใจ เครื่องคำนวณช่วยกระตุ้นให้นักเรียนเกิดความอยากรู้อยากเห็นและมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์เพิ่มขึ้นในการคำนวณ

2) ใช้เป็นเครื่องมือสำหรับค้นคว้าหามโนทัศน์ใหม่ ๆ

3) ใช้ในการฝึกฝน ปฏิบัติ และตรวจคำตอบ

4) ใช้ในการประยุกต์ เครื่องคำนวณถูกนำมาใช้ในชีวิตจริง ใช้แก้ปัญหาของตนเองและครอบครัว เช่น งบประมาณ งบบัญชีของหนังสือ และประมาณค่าใช้จ่าย ซึ่งสามารถประยุกต์ใช้เครื่องคำนวณได้

5) ใช้ในการแก้ปัญหา เครื่องคำนวณช่วยลดความยุ่งยากในการ “เดา” หรือ “ลองผิดลองถูก” ในขั้นตอนของการแก้ปัญหา เมื่อนักเรียนมีงาน การ “เดา” โดยใช้กระดาษและปากกาทำให้น่าเบื่อ การใช้เครื่องคำนวณทำให้ขั้นตอนของการแก้ปัญหาง่ายขึ้น มีประสิทธิภาพ นักเรียนมีความสุขในการเรียนและได้รับประสบการณ์ในการแก้ปัญหา

6) ใช้เป็นเครื่องมือในการสอนเสริม สำหรับนักเรียนที่สอบไม่ผ่าน

7) ใช้สร้างมโนทัศน์ เครื่องคำนวณช่วยให้นักเรียนสามารถเรียนรู้มโนทัศน์ของระบบจำนวน เช่น เลขฐาน และเลขยกกำลัง

สมพล เล็กสกุล (2525 : 66-67) ได้กล่าวถึงเครื่องคำนวณขนาดเล็กว่าไม่สามารถจะใช้แทนระบบการคิดคำนวณที่สอนทั้งหมดในโรงเรียน แต่ควรจะใช้เครื่องคำนวณเพื่อประโยชน์ในแง่ต่อไปนี้

1) เป็นเครื่องมือจูงใจให้นักเรียนมีความสนใจอย่างต่อเนื่องในวิชาคณิตศาสตร์มากยิ่ง ๆ ขึ้นไป

2) เป็นเครื่องมือในการคิดคำนวณแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ทั่วไปได้รวดเร็ว ถูกต้องและมีประสิทธิภาพมากขึ้น

3) เป็นเครื่องมือจูงใจให้นักเรียนพยายามแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ที่ยุ่งยากและสลับซับซ้อน

4) เป็นเครื่องมือสำหรับให้นักเรียนได้ประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ที่เรียนมาแล้วให้กว้างขวางออกไป ซึ่งรวมไปถึงการใช้เครื่องเพื่อสำรวจค้นหาความจริงต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ ในเรื่องที่เกี่ยวข้องกับที่เรียนมาแล้วให้เพิ่มพูนมากขึ้นด้วย

และก่อนที่จะอนุญาตให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณขนาดเล็กได้นั้น น่าจะพิจารณาเสียก่อนว่านักเรียนมีทักษะพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ในด้านต่าง ๆ ต่อไปนี้พอสมควรแล้ว

1) การคิดคำนวณหาผลบวก ผลลบ ผลคูณและผลหารเบื้องต้น ในระบบจำนวนเต็ม ทศนิยมและเศษส่วนที่ไม่ยุ่งยากมากนัก โดยขอบเขตของทักษะทางเลขคณิตเหล่านี้ ควรจะครอบคลุมถึงความคล่องแคล่วในการหาผลลัพธ์ สำหรับการคำนวณที่เกี่ยวข้องกับตัวเลขโดดเพียงตัวเดียว สามารถหาผลลัพธ์แบบคิดในใจได้พอควร และสามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับเศษส่วนในชีวิตประจำวันได้ เช่นเรื่องเปอร์เซ็นต์ เป็นต้น

2) การแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นขบวนการที่ประยุกต์ใช้ความรู้ที่เรียนมาแล้วกับสถานการณ์ใหม่หรือไม่คุ้นเคยมาก่อน โดยการฝึกให้นักเรียนสามารถเลือกใช้ข้อมูลที่มีอยู่ในมืออย่างถูกต้อง จะใช้ข้อมูลใดก่อนหรือหลัง และจะต้องมีความเชื่อมั่นต่อการหาคำตอบของตัวเอง

3) การประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ในสถานการณ์ประจำวัน โดยให้นักเรียนสามารถนำสถานการณ์ในชีวิตประจำวันที่เป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ มาแปลความหมายเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และใช้คณิตศาสตร์มาช่วยแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ

4) การรู้จักวิเคราะห์ถึงความเป็นไปได้ของผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ที่ได้มา โดยให้นักเรียนสามารถวิเคราะห์ สำรวจและตรวจสอบถึงความเป็นไปได้ของผลลัพธ์ในเทอมของข้อมูลเบื้องต้น

5) การคาดคะเนและการประมาณทางคณิตศาสตร์ โดยให้นักเรียนสามารถคำนวณโดยวิธีประมาณค่าได้อย่างรวดเร็วด้วยวิธีการปัดเศษหรือทศนิยมเสียก่อน ทั้งสามารถตัดสินใจได้ว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณนั้น มีนัยสำคัญของค่าตัวเลขละเอียดถึงขั้นที่ต้องการแล้วหรือยัง

6) การอ่านแปลความหมาย และสร้างตาราง แผนภาพและกราฟ โดยให้นักเรียนสามารถอ่านแปลความหมาย และสรุปข้อมูลจากตาราง แผนภาพและกราฟได้ ทั้งควรสามารถจัดการเปลี่ยนรูปข้อมูลที่มีอยู่ให้เป็นสิ่งที่สื่อความหมายในรูปของตาราง แผนภาพและกราฟได้

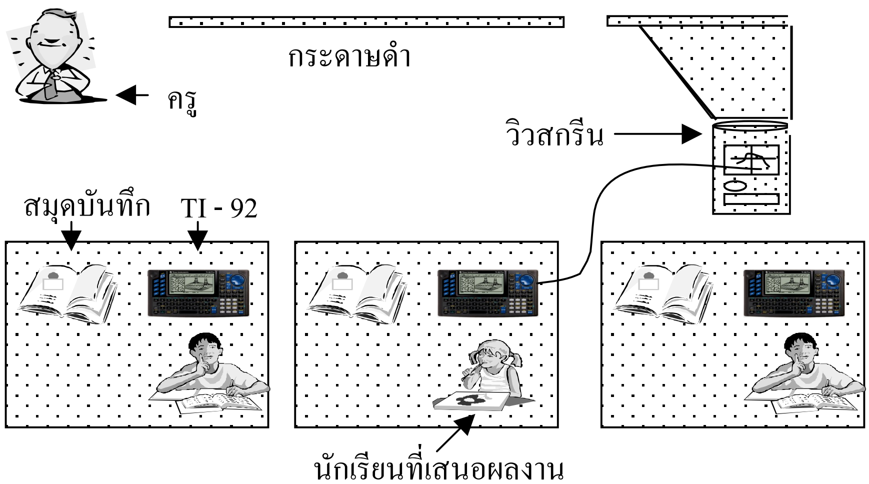
จากข้อเสนอแนะของนักศึกษาเกี่ยวกับการใช้เครื่องคำนวณและเครื่องคำนวณเชิงกราฟ สรุปได้ว่าเครื่องคำนวณและเครื่องคำนวณเชิงกราฟสามารถใช้เป็นเครื่องมือในการเรียนคณิตศาสตร์ ช่วยสร้างมโนทัศน์ในการเรียน สามารถช่วยตรวจคำตอบ และประยุกต์ในการแก้ปัญหาได้อย่างแม่นยำ

3. การใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในห้องเรียน

โทรเช (Troche. 2000 : 176-178) ได้กล่าวถึงการจัดห้องเรียนโดยนำเครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI – 92 มาใช้ในห้องเรียนไว้ดังนี้

1) การจัดระบบในห้องเรียน

จากภาพประกอบ 8 แสดงทิศทางของครูผู้สอน กระดานดำและจอภาพ รวมทั้งกระดาษ ปากกา เครื่องคำนวณเชิงกราฟของนักเรียน ข้อมูลจากเครื่องคำนวณของนักเรียนที่เป็นผลงานจะแสดงออกที่จอหน้าห้องเรียน



ภาพประกอบ 8 แสดงทิศทางของครูผู้สอน กระดานดำและจอภาพ

2) การจัดตามสถานการณ์

(1) นักเรียนทำงานเป็นคู่ มีการแก้ปัญหา (ภาพประกอบ 9) ในสุดสัปดาห์ของภาคเรียน โดยปัญหาถูกเลือกให้สัมพันธ์กันระหว่างเครื่องคำนวณและใบงาน ที่ช่วยในการพัฒนากระบวนการคิด

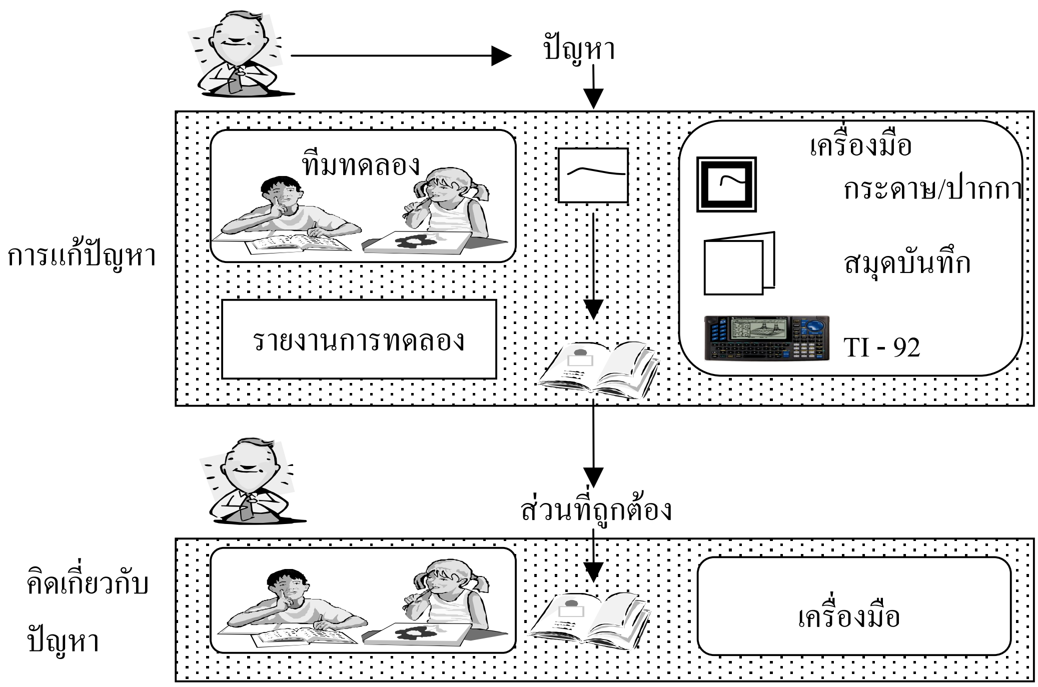
(2) นักเรียนทั้งคู่ร่วมกันทำงานเป็นทีม เพื่อให้ผลงานออกมาอย่างสมบูรณ์

(3) นักเรียนจะมีการดำเนินการบันทึกงานอย่างต่อเนื่อง

(4) ครูอนุญาตให้นักเรียนใช้เวลาอย่างเพียงพอสำหรับความพยายามในการค้นหารูปแบบที่หลากหลายในการแก้ปัญหา

(5) มีการเน้นที่สำคัญจากผลการทดลองที่เกิดขึ้นในการค้นพบหนทางการแก้ปัญหาโดยนักเรียนทั้งคู่

(6) เมื่อขั้นตอนสุดท้ายสิ้นสุดลง ครูจะมาอธิบายความคิดทางคณิตศาสตร์ใหม่ให้กระจ่างขึ้น



ภาพประกอบ 9 แสดงการแก้ปัญหาและคิดเกี่ยวกับปัญหา

บิทเตอร์ และ ฮัทฟิลด์ (Bitter and Hatfield. 1992 : 206) ได้เสนอแนะเกี่ยวกับการใช้เครื่องคำนวณในห้องเรียนไว้ดังนี้

1) จัดเตรียมนักเรียนให้มีความรู้ในการดูแล และการใช้เครื่องคำนวณ

2) แนะนำการใช้เครื่องคำนวณหลังจากนักเรียนทำกิจกรรมด้วยมืออย่างชำนาญแล้ว

3) อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณในเวลาว่าง

4) ให้นักเรียนสำรวจและค้นพบการแก้ปัญหาโดยใช้เครื่องคำนวณตรวจสอบความถูกต้อง

5) ให้นักเรียนคาดคะเน และประมาณคำตอบก่อนการใช้เครื่องคำนวณ

6) นำข้อมูล และปัญหาในชีวิตจริงมาใช้ในการตั้งปัญหา

7) เน้นกิจกรรม และผลงานที่ต้องใช้ความคิด

8) ใช้เครื่องคำนวณเป็นเครื่องมือสำหรับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์มากกว่าที่จะกำหนดเป็นจุดหมายของการเรียนการสอน

9) สนับสนุนนักเรียนในการคำนวณโดยใช้เครื่องคำนวณแทนการกะประมาณหรือคำนวณในใจ

10) ให้นักเรียนจะต้องทำงานเป็นคู่ หรือเป็นกลุ่มตามความเหมาะสม

11) สนับสนุนความคิดเห็นและความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ในการแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์

จากความคิดเห็นของนักการศึกษาเกี่ยวกับการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟสรุปได้ว่า การนำเครื่องคำนวณเชิงกราฟมาใช้ในการเรียนคณิตศาสตร์นั้น ครูเพียงแต่ใช้เป็นเครื่องมือเพื่อสร้างความเข้าใจและมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์

มโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์

1. ความหมายของมโนทัศน์และมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์

มโนทัศน์เป็นคำที่มีความหมายเดียวกันกับคำว่า ความคิดรวบยอด มโนภาพ มโนมติ และสังกัป มีนักการศึกษาไทยได้ให้ความหมายมโนทัศน์ไว้ดังนี้

พรรณทิพย์ ม้ามณี (2520 : 9) ได้ให้ความหมาย มโนทัศน์ ไว้ว่าหมายถึง ความเข้าใจ สามารถเก็บใจความหรือย่อเนื้อหาที่เรียนมาได้ ประกอบกับสามารถนำเอาไปใช้หรือสร้างเป็นกรณีทั่ว ๆ ไปได้ (generalization abstraction) ซึ่งมีความหมายกว้างขวางกว่าความเข้าใจธรรมดา

วิชัย วงษ์ใหญ่ (2532 : 18) ได้ให้ความหมาย มโนทัศน์ไว้ว่า หมายถึง ภาพที่เกิดขึ้นในใจของบุคคลเกี่ยวกับกลุ่มของสิ่งเร้าที่มีคุณสมบัติ คุณลักษณะร่วมกัน กลุ่มของสิ่งเร้านี้อาจจะเป็นชนิด ประเภทวัตถุธรรมชาติ เหตุการณ์ หรือบุคคลก็ได้

วิไลวรรณ ตรีศรี ชะนะมา (2537 : 44) ได้ให้ความหมาย มโนทัศน์ไว้ว่า หมายถึง แนวคิดสำคัญที่ได้จากการสรุปหรือกลั่นกรองจากข้อมูลหรือข้อเท็จจริง การสรุปอาจจะได้เป็นถ้อยคำหรือประโยคที่กะทัดรัดและสื่อความหมายได้หรืออาจสรุปออกมาเป็นกลุ่ม เป็นประเภทในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่ง

สุรางค์ โค้วตระกูล (2537 : 207) ได้ให้ความหมาย มโนทัศน์ไว้ว่า มโนทัศน์เป็นคำที่ (เป็นนามธรรม) ใช้แทนสัตว์ วัตถุ สิ่งของ ที่ได้จัดไว้ในจำพวกเดียวกัน โดยถือลักษณะที่สำคัญเป็นเกณฑ์

นวลจิตต์ เชาวกีรติพงศ์ (2538 : 55) ได้ให้ความหมาย มโนทัศน์ไว้ว่า หมายถึง ความเข้าใจทั้งหมดที่มีต่อสิ่งของหรือสถานการณ์อย่างใดอย่างหนึ่ง เช่น เมื่อพูดถึงโรงเรียนก็จะนึกได้ถึงสถานที่แห่งหนึ่งที่มีลักษณะเฉพาะที่แตกต่างไปจากสถานที่อื่น ๆ เป็นเพราะว่ามีมโนทัศน์ของโรงเรียนแล้วในความทรงจำ มโนทัศน์นี้จะอยู่ในรูปของนามธรรม เกิดจากผลสรุปการรับรู้ลักษณะของสิ่งนั้น ๆ

มาลินี จุฑะรพ (2541 : 121) ได้ให้ความหมาย มโนทัศน์ไว้ว่า หมายถึง ความเข้าใจในลักษณะของสิ่งเร้า และสามารถแยกประเภทของสิ่งเร้าได้

สมนึก ภัททิยธนี (2543 : 37) ได้ให้ความหมาย มโนทัศน์ไว้ว่า หมายถึง ลักษณะร่วมของสิ่งใดสิ่งหนึ่งหรือของเรื่องใดเรื่องหนึ่งที่เคยเกิดขึ้นหลาย ๆ ครั้งหรือมีสิ่งเหล่านั้นหลาย ๆ ครั้ง

ส่วนในทางการศึกษาคณิตศาสตร์ได้มีผู้ให้ความหมายมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

เมธี ลิมอักษร (2520 : 4) ได้ให้ความหมาย มโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ไว้ว่า หมายถึง การสรุปรวบยอดคุณสมบัติที่เป็นองค์ประกอบร่วมของสิ่งที่เราได้ประสพพบเห็น แล้วสามารถกำหนดสัญลักษณ์หรือความหมายแทนคุณสมบัติดังกล่าวได้ เช่น เราให้ความหมายของรูป " สามเหลี่ยม " หมายถึง รูปหลายเหลี่ยมที่ประกอบด้วยด้านสามด้าน และเขียนสัญลักษณ์ แทนรูปสามเหลี่ยมว่า " Δ " เป็นต้น

โสภาพรรณ ศิริรัตน์ (2527 : 14) ได้ให้ความหมาย มโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ไว้ว่า หมายถึง ความคิดขั้นสุดท้ายเพื่อที่จะให้ได้เป็นข้อสรุปหรือคำจำกัดความที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์

พินิจ ศรีจันทร์ดี (2530 : 30) ได้ให้ความหมาย มโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ไว้ว่า หมายถึง ความคิด ความเข้าใจของบุคคลต่อสิ่งของหรือเหตุการณ์ต่าง ๆ อันทำให้บุคคลนั้นสามารถสรุปรวมลักษณะเหมือน หรือแยกแยะลักษณะที่แตกต่างของคุณสมบัติของสิ่งของ หรือเหตุการณ์นั้นได้ เช่น เราให้ความหมายของสี่เหลี่ยมจัตุรัสว่าเป็นสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน มุมทุกมุมเป็นมุมฉาก และให้สัญลักษณ์เป็น $\boxed{\text{จ}}$ เป็นต้น

ณัชชา กมล (2542 : 21) ได้ให้ความหมาย มโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ไว้ว่า ความคิดและความเข้าใจเกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์ อันเกิดจากการได้รับประสบการณ์ในการเรียนคณิตศาสตร์ โดยการสรุปความเข้าใจที่ได้ออกมาเป็นนิยาม และสามารถจัดประเภทของสิ่งเร้าที่เหมือนกันเข้าด้วยกัน และแยกประเภทของสิ่งเร้าที่ไม่สัมพันธ์กันออก

พนัส หันนาคินทร์ และ พิทักษ์ รักษ์พลเดช (ม.ป.ป. : 50) ได้ให้ความหมาย มโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ไว้ว่าหมายถึง การสรุปรวบยอดคุณสมบัติที่เป็นองค์ประกอบร่วมของสิ่งของที่เราได้ประสบพบเห็นแล้ว สามารถกำหนดสัญลักษณ์แทนคุณสมบัติดังกล่าวได้

จากความหมายมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ดังกล่าวข้างต้น สามารถสรุปความหมายมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ได้ว่า หมายถึงภาพที่เกิดขึ้นในใจของบุคคลเกี่ยวกับสิ่งเร้าที่มีคุณสมบัติร่วมกันในวิชาคณิตศาสตร์ แล้วสรุปภาพดังกล่าวออกมาเป็นนิยาม หรือคุณสมบัติ แล้วสามารถกำหนดสัญลักษณ์แทนคุณสมบัติดังกล่าว

2. การสอนให้เกิดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์

การสอนให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ตามที่ครูต้องการให้เกิดขึ้นแก่นักเรียนนั้น ย่อมขึ้นอยู่กับหลักการที่ครูจะสร้างให้เกิดขึ้น ได้มีนักการศึกษาได้เสนอหลักการที่สอนให้เกิดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

เมธี ลิมอักษร (2520 : 5-6) ได้กล่าวถึงขั้นตอนในการสอนเพื่อให้เกิดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1) ก่อนที่จะสอนให้นักเรียนมีมโนทัศน์ใหม่ขึ้นมานั้น ครูจะต้องแน่ใจเสียก่อนว่าพื้นความรู้ ทักษะ หรือประสบการณ์เดิมที่จำเป็นต่อการสร้างมโนทัศน์อันใหม่ขึ้นมานั้น นักเรียนมีความพร้อมแล้ว ดังนั้นก่อนที่ครูจะสอนเรื่องการบวกหรือลบเศษส่วน ครูจะต้องแน่ใจว่านักเรียนมีความรู้ ความเข้าใจ และทักษะในการเปรียบเทียบเศษส่วน หรือการทำให้ส่วนของเศษส่วนมีค่าเท่ากันได้เสียก่อน

2) ครูต้องไม่ลืมที่จะเร้านักเรียนให้มีความปรารถนาที่จะเรียนในสิ่งที่ครูต้องการจะสร้างมโนทัศน์นั้นเสียก่อน ทั้งนี้เพราะเราเข้าใจและยอมรับกันอยู่แล้วว่า นักเรียนจะเรียนในสิ่งที่เขาได้ลงมือกระทำ ได้เห็น ได้รู้สึก และพร้อมที่จะคิด การเรียนรู้จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อนักเรียนมีความพร้อมและความเต็มใจที่จะเรียน

3) สิ่งที่จะนำมาสอนเพื่อให้เกิดมโนทัศน์นั้น ครูจะต้องพิจารณาว่าอยู่ในวิสัยที่นักเรียนจะเข้าใจได้ ครูต้องจำไว้ว่าการสร้างมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์นั้นย่อมจะต้องผ่านขบวนการต่าง ๆ เช่น การได้ลงมือทำด้วยตนเอง ได้เห็นได้ยิน ได้คำนวณ และรู้จักใช้สัญลักษณ์ไม่ว่าจะเป็นรูปหรือนามก็ตาม ดังนั้นในการสร้างมโนทัศน์ซึ่งแต่ละคนต้องการเวลาแตกต่างกัน ครูจึงต้องนึกถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลที่จะต้องใช้เวลา แตกต่างกันในการสร้างมโนทัศน์ในแต่ละเรื่อง

4) ครูจะต้องเป็นผู้คอยช่วยเหลือ แนะนำ และพยายามรักษาแรงจูงใจให้มีอยู่เสมอ เพื่อให้การเรียนรู้มีประสิทธิภาพอยู่เสมอ การเรียนรู้แบบลองผิดลองถูก เป็นการเรียนรู้ที่ปราศจากหลักการ อาจก่อให้เกิดความรู้สึกท้อใจแก่นักเรียนได้ สิ่งที่นำมาพิจารณานั้น ควรจะเป็นสิ่งที่นักเรียนสามารถมองเห็นองค์ประกอบรวมได้โดยไม่ยากเกินไป

5) ครูจะต้องพยายามจัดหาสิ่งที่จะเป็นเครื่องมือเพื่อให้เกิดมโนทัศน์ได้โดยแจ่มแจ้ง ไม่ว่าจะเป็นหนังสือตำรา หุ่น หรือเครื่องประกอบความเข้าใจอย่างอื่นก็ตาม

6) ครูจะต้องให้เวลาแก่นักเรียนอย่างเพียงพอที่จะมีส่วนร่วมในกิจกรรม อันจะนำไปสู่การสร้างมโนทัศน์นั้น ๆ โดยแจ่มชัด การสร้างมโนทัศน์นั้น เป็นขบวนการที่กินเวลาและต้องการประสบการณ์หลายด้าน ตลอดจนความสามารถที่จะนำไปใช้ได้ในสถานการณ์ต่าง ๆ กัน เพื่อจะเป็นเครื่องประกันได้ว่านักเรียนเข้าใจมโนทัศน์นั้น ๆ ได้อย่างแจ่มชัด

พินิจ ศรีจันทร์ดี (2530 : 31-32) ได้กล่าวว่าในวิชาคณิตศาสตร์นั้นเราศึกษาจุดประสงค์ที่ชัดเจน จำนวนนับ จำนวนเชิงซ้อน ระบบประโยคเปิด เวคเตอร์ ฟังก์ชั่น และการพิสูจน์ สิ่งหนึ่งที่เราต้องเรียนเป็นลำดับแรกก็คือ สิ่งต่าง ๆ เหล่านั้นคืออะไร เช่น เส้นตรงคืออะไร เราจะบอกได้ไหมว่านี่คือ สี่เหลี่ยมด้านขนาน เราสามารถศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งต่าง ๆ เหล่านั้นและศึกษาได้ว่าเราจะนำมาใช้ประโยชน์ได้อย่างไร

การสอนให้ผู้เรียนเกิดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ ควรประกอบด้วยขบวนการดังนี้

1) เริ่มจากการรับรู้ (perception) คือให้เด็กสังเกตเพื่อหาข้อมูลจากสิ่งที่เราต้องการจะสร้างมโนทัศน์โดยการสัมผัสหลาย ๆ ทาง ทั้งการดู การฟัง และการสัมผัสจับต้อง เช่น จะสอนให้ผู้เรียนเกิดมโนทัศน์เกี่ยวกับสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยการให้เด็กได้รู้จักกับรูปเหลี่ยมหรือรูปทรงต่าง ๆ เพื่อจะได้เก็บข้อมูลจากสิ่งต่าง ๆ เหล่านั้น ในหลาย ๆ ด้าน หลายลักษณะ

2) การพิจารณาข้อแตกต่าง (differentiation) เมื่อเด็กได้ดู ได้ฟังและจับต้องรูปเหลี่ยมหรือรูปทรงต่าง ๆ แล้วให้เด็กพิจารณาหาความคล้ายคลึงหรือความแตกต่างของรูปเหลี่ยมเหล่านั้น ซึ่งเป็นการดูรายละเอียดให้มากขึ้นอีก เช่น สี่เหลี่ยมจัตุรัสมีลักษณะแตกต่างหรือคล้ายคลึงกับรูปเหลี่ยมใด เพื่อเด็กจะได้เข้าใจคุณสมบัติรวม ๆ ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสดีขึ้น

3) การพัฒนาแนวคิดแบบนามธรรม (abstraction) เมื่อดูรายละเอียดและเห็นความแตกต่างของสิ่งนั้น ๆ แล้ว ผู้เรียนจะสามารถแยกสิ่งนั้นออกจากสิ่งอื่นได้ เช่น เมื่อดูรายละเอียดจนสามารถเห็นความแตกต่างของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จากรูปเหลี่ยมอื่น ๆ แล้ว ผู้เรียนจะสามารถแยกรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสออกจากรูปสี่เหลี่ยมหรือรูปเหลี่ยมอื่นได้

4) การบูรณาการ (integration) คือการสรุปรวบยอดหรือหาแบบทั่ว ๆ ไป (generalization) ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสเพื่อสร้างเป็นหน่วยความคิด เป็นการกำหนดและหาความ

สัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ได้พิจารณาแล้ว ผลที่ได้ออกมานั้นจะถูกกำหนดเป็นสัญลักษณ์ เช่น การกำหนดชื่อว่าเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส

สิ่งที่ถูกสรุปรวบยอดและให้สัญลักษณ์นี้เรียกว่ามโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ ก็อาจเป็นกฎหรือหลักบางอย่างที่ได้จากการพิจารณาคุณสมบัติซึ่งเป็นแบบของมันเองโดยเฉพาะ

5) การอนุมาน (deduction) เป็นขบวนการสร้างมโนทัศน์ อีกขั้นหนึ่ง คือการนำเอาสิ่งที่ค้นพบนี้ไปประยุกต์ใช้กับเหตุการณ์อื่นบ้างในรูปประโยค ถ้า…..แล้ว….. เช่น ถ้าสี่เหลี่ยมใดเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสแล้ว สี่เหลี่ยมนั้นต้องมีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน และมีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก เป็นต้น

ชูชาติ เชิงฉลาด (ม.ป.ป. : 57) ได้กล่าวถึงการสอนให้เกิดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ว่ามีหลักเบื้องต้นดังนี้

1) ผู้สอนไม่ควรจะกำหนดมโนทัศน์ให้แก่ผู้เรียน ผู้เรียนจะต้องสร้างมโนทัศน์จากประสบการณ์และความคิดของตนเอง การสอนที่มีประสิทธิภาพนั้นจะต้องประกอบด้วยการจัดประสบการณ์การเรียนให้แก่ผู้เรียนทุกคน

2) มโนทัศน์จะเกิดขึ้นในขณะที่ดำเนินการสอนซึ่งผู้เรียนจะสร้างความคิดไปตามลำดับขั้น ดังนั้นผู้สอนจะต้องคำนึงถึงวิธีการสอนที่จะทำให้เกิดความคิด

3) มโนทัศน์จะมีความหมายและมีประโยชน์มากขึ้น เมื่อได้นำไปใช้ในบทเรียนอื่น ๆ ด้วย

4) มโนทัศน์จะพัฒนาดีที่สุด โดยได้รับประสบการณ์ที่แตกต่างกันมากกว่าการได้รับประสบการณ์ที่ซ้ำ ๆ กันอยู่เสมอ ดังนั้นในการแก้ปัญหาหรือการกระทำกิจกรรมที่แตกต่างกันจะช่วยให้เกิดมโนทัศน์ ได้ผลดีกว่าการกระทำกิจกรรมที่ซ้ำ ๆ กันจนน่าเบื่อหน่าย

5) การที่จะให้ผู้เรียนเกิดมโนทัศน์ในบทเรียนที่กำหนดให้นั้น ขึ้นอยู่กับความพร้อม แรงจูงใจและความสามารถของผู้เรียน ดังนั้นในการจัดบทเรียนแต่ละบทจะต้องคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลและแรงจูงใจด้วย

6) มโนทัศน์จะเกิดขึ้นแก่ผู้เรียนเมื่อได้ลงมือกระทำกิจกรรมนั้นจริง ๆ และเกิดความคิดด้วยตัวของผู้เรียนเองมากกว่าที่ผู้สอนให้คำแนะนำ ดังนั้นในการสอนคณิตศาสตร์ ผู้สอนไม่ควรจะใช้การบรรยายโดยตลอด ซึ่งควรจะให้ผู้เรียนได้ลงมือกระทำกิจกรรมจริง ๆ และสร้างความคิดด้วยตนเอง ตลอดจนรู้จักใช้กลวิธีต่าง ๆ เพื่อจะค้นหาหลักทั่วไป ซึ่งจะเป็นทางนำไปสู่การสรุปรวบยอด

พนัส หันนาคินทร์ และ พิทักษ์ รักษพลเดช (ม.ป.ป. : 50-51) ได้กล่าวว่าการสอนให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์นั้นมีขบวนการดังนี้

1) หาข้อมูลที่เกี่ยวกับสิ่งที่เราต้องการสร้างมโนทัศน์จากประสบการณ์หรือสัมผัสหลาย ๆ ทาง (experience) อันจะเป็นการทำให้ข้อมูลที่เราจะได้รับแน่นอน ยิ่งเรามีประสบการณ์ในเรื่องที่จะเรียนหลายด้านมากขึ้นเท่าไร การที่เราจะสร้างมโนทัศน์ในสิ่งนั้นก็ยิ่งจะแน่นอนมากขึ้นเท่านั้น ขั้นนี้เราถือได้ว่าเป็นขั้นสร้างสัญชาญ (perception)

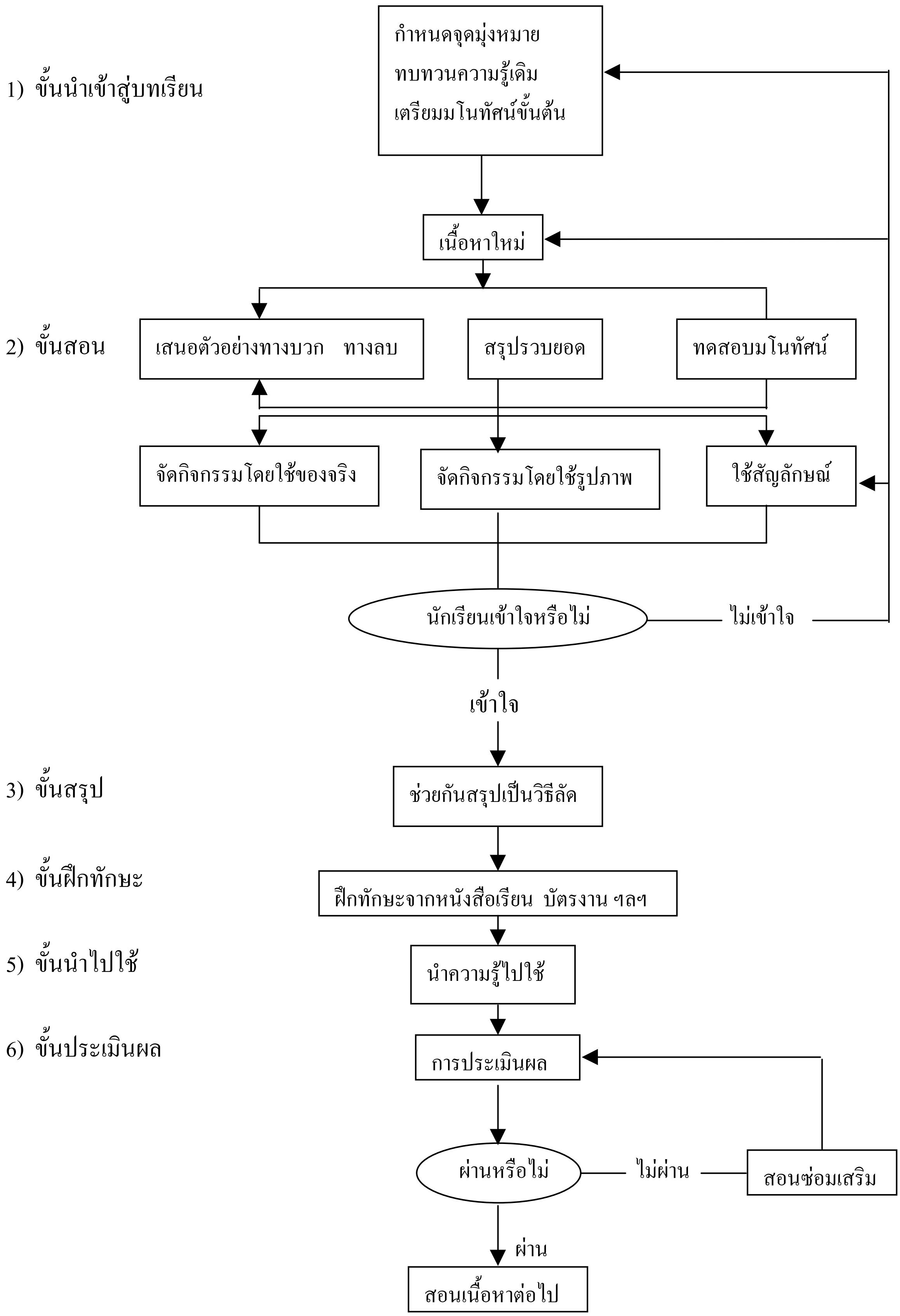
2) มองหาความแตกต่างหรือความคล้ายคลึงในกรณีหรือสิ่งที่เราได้สังเกตนั้นเป็นราย ๆ ไป (differentiation) ในขั้นนี้เป็นการพิจารณารายละเอียดลงไปอีก เช่น ในเรื่องรูปร่างมะนาวผิดกับผลไม้อื่นอย่างไร การเปรียบเทียบหาความคล้ายคลึงหรือความแตกต่างจะทำให้ความเข้าใจในคุณสมบัติร่วมของสิ่งเหล่านั้นดีขึ้น

3) สรุปรวบยอดหรือการหาแบบทั่วไปของสิ่งที่เราต้องการสร้างมโนทัศน์ เพื่อสร้างขึ้นเป็นหน่วยความคิด (generalization and abstraction) เป็นการสรุปและหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่เราได้รับหรือได้พิจารณาแล้ว ผลที่ได้ออกมานั้นเรามักจะกำหนดสัญลักษณ์ เช่น การกำหนดชื่อให้แก่สิ่งที่เราได้สร้างขึ้นมานั้น

เราเรียกสิ่งที่เราได้สรุปรวบยอดและได้ให้สัญลักษณ์แล้วนี้ว่าเป็นมโนทัศน์ในสิ่งนั้น ๆ ในเชิงคณิตศาสตร์ก็อาจจะเป็นหลักหรือกฎเกณฑ์บางอย่าง ที่เราได้จากการพิจารณาดูคุณสมบัติซึ่งมีเป็นแบบของมันเองโดยเฉพาะ

4) การนำไปใช้โดยวิธีอนุมาน (deduction) ขบวนการสร้างมโนทัศน์ขั้นสุดท้ายคือการนำเอาสิ่งที่เราได้ค้นพบแล้วนั้นไปใช้ปรับเข้ากับเหตุการณ์เอกเทศอื่น ๆ ในรูปของ " ถ้า…… แล้ว………" เช่น เมื่อเราสร้างมโนทัศน์ได้ว่า ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ความยาวของด้านสองด้านของสามเหลี่ยมนั้น รวมกันย่อมยาวกว่าด้านที่สาม ดังนั้น ถ้า ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่งแล้ว ด้าน a บวกกับ ด้าน b ย่อมยาวกว่าด้าน c เป็นต้น

ส่วนกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เพื่อสร้างมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ของสถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (ณัชชา กมล 2542 : 25-27 อ้างถึง สถาบันส่งเสริมวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี) ได้เสนอขั้นตอนการสอนให้เกิดมโนทัศน์ ดังภาพประกอบ 10



ภาพประกอบ 10 แสดงลำดับขั้นตอนการสอนมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์

จากภาพประกอบ 10 ข้างต้น สามารถสรุปวิธีการสอนคณิตศาสตร์ให้เกิดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ ตามลำดับดังนี้

1) ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน ในการนำเข้าสู่บทเรียน ครูผู้สอนต้องกำหนดจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรมในการเรียนรู้ เพื่อให้นักเรียนได้ทราบถึงสิ่งที่เป็นเป้าหมายในการเรียน ทบทวนความรู้เดิมที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว และเกี่ยวข้องกับบทเรียนใหม่ที่กำลังจะสอน และเตรียมมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ขั้นต้น เพื่อเป็นรากฐานที่จะช่วยให้นักเรียนนำมาประกอบความคิดเพื่อนำไปสู่มโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ขั้นต่อไป และครูผู้สอนบอกประโยชน์ของมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ที่จะสอนเป็นการกระตุ้นความสนใจแก่นักเรียน

2) ขั้นสอน ครูผู้สอนเสนอเนื้อหาใหม่ โดยใช้สื่ออุปกรณ์ที่เป็นรูปธรรม หรือสื่อการสอนใด ๆ ที่เหมาะสมมาช่วย เพื่อให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้จากรูปธรรมไปหานามธรรม โดยให้นักเรียนปฏิบัติกิจกรรม เพื่อสร้างมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ โดยครูผู้สอนเสนอตัวอย่างทางบวกและทางลบที่เป็นรูปธรรม เช่นรูปภาพ ในอัตราส่วนเท่า ๆ กัน การเสนอตัวอย่างนั้นครูเสนอทีละตัวอย่าง อาจใช้คำถามถามนักเรียนว่าเป็นตัวอย่างประเภทใด (ทางบวกหรือทางลบ) โดยครูแยกประเภทตัวอย่างไว้ให้นักเรียนได้เห็นได้ชัดเจน แล้วครูให้นักเรียนสังเกตเปรียบเทียบความเหมือนและความแตกต่างของตัวอย่างที่ครูเสนอ แล้วสรุปมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง เมื่อนักเรียนสรุปมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ที่ได้แล้วครูผู้สอนทำการทดสอบความเข้าใจของนักเรียนว่าเกิดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ และสามารถสรุปความหมายของมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้องจริงหรือไม่ โดยการที่ครูผู้สอนเสนอตัวอย่างใหม่ ด้วยอัตราส่วนคงเดิม แล้วให้นักเรียนจำแนกประเภทตามลักษณะของมโนทัศน์ ถ้านักเรียนจำแนกประเภทได้ถูกต้อง แสดงว่านักเรียนเกิดการเรียนรู้ที่มีความเข้าใจอย่างกว้างขวางลึกซึ้ง ซึ่งทำให้นักเรียนเกิดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง แต่ถ้านักเรียนยังแยกประเภทไม่ถูกต้อง ให้กลับไปดูที่ขั้นเสนอตัวอย่างและขั้นสรุปรวบยอดใหม่อีกครั้ง เมื่อนักเรียนเข้าใจแล้วครูจึงให้นักเรียนช่วยกันบอกคำจำกัดความของมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์อีกครั้ง

3) ขั้นสรุปไปสู่วิธีลัด เพื่อความสะดวกในการนำไปใช้ครั้งต่อไป

4) ขั้นฝึกทักษะ เมื่อนักเรียนเข้าใจวิธีลัดแล้ว จึงให้นักเรียนได้ฝึกทักษะด้วยการทำแบบฝึกหัด จากบทเรียนหรือบัตรงานของโจทย์ปัญหาที่มีลักษณะสอดคล้องกับมโนทัศน์

5) ขั้นนำความรู้ไปใช้ประโยชน์ในชีวิตประจำวัน และใช้ในวิชาอื่นที่เกี่ยวข้องให้นักเรียนทำโจทย์ปัญหา หรือทำกิจกรรมที่ประสบในชีวิตประจำวัน

6) ขั้นประเมินผล เป็นการตรวจสอบเพื่อวัดระดับความสามารถของนักเรียนในการที่จะผ่านเกณฑ์หรือไม่ เพื่อทำการสอนซ่อมเสริมให้กับนักเรียนที่ไม่ผ่าน และเพื่อทำการสอนเนื้อหาใหม่ต่อไป

กันเทอร์ เอสเตอร์ และ ชวาบ (Gunter, Ester and Schwab. 1995 : 98-105) ได้กล่าวถึงขั้นตอนการสอนให้เกิดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ สรุปไว้ดังนี้

1) เลือกและนิยามมโนทัศน์ โดยจะต้องสอดคล้องกับบทเรียน นิยามต้องชัดเจนและอ้างเหตุผลที่สามารถพิสูจน์ได้

2) กำหนดคุณลักษณะที่จำเป็น

3) ยกตัวอย่างทั้งทางบวกและทางลบ ตัวอย่างทางบวกจะต้องมีคุณสมบัติที่สำคัญ และตัวอย่างทางลบไม่จำเป็นต้องมีคุณสมบัติที่สำคัญครบทุกข้อ

4) อธิบายให้นักเรียนทราบกระบวนการ ว่ากำลังทำอะไร และขั้นใดบ้างที่จำเป็น

5) ยกตัวอย่างที่เป็นปัจจุบันและอ้างเหตุผลเป็นข้อ ๆ และจัดประเภทคุณสมบัติของตัวอย่างทั้งทางบวกและทางลบ เพื่อเปรียบเทียบ

6) นักเรียนสามารถให้ความหมายของมโนทัศน์ ได้ถูกต้อง

7) ให้ตัวอย่างเสริม ถ้านักเรียนเข้าใจมโนทัศน์แล้ว ครูจะให้ตัวอย่างเสริมเพิ่ม เพื่อให้นักเรียนได้เข้าใจทุกคน

8) อธิบายกระบวนการในห้อง เพื่อให้ทราบแน่นอนว่านักเรียนเข้าใจมโนทัศน์ถูกต้องหรือไม่ โดยให้นักเรียนออกมาอธิบายหน้าชั้นเรียน

9) การวัดผล ถามนักเรียนถึงพัฒนาการ ให้ตัวอย่างเสริมเพื่อหาคุณสมบัติที่จำเป็นหรือถามพัฒนาการตัวอย่างทางบวกและทางลบ เพื่อหาคุณสมบัติของมโนทัศน์ใหม่

เอเรนส์ (Arends 1988 : 324) ได้เสนอแนะการสอนให้เกิดมโนทัศน์ไว้ 4 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ครูจะต้องอธิบายเป้าหมายของบทเรียนและทำให้นักเรียนได้เรียนรู้ตามเป้าหมาย

ขั้นที่ 2 ครูจะต้องบอกชื่อมโนทัศน์และระบุคุณสมบัติที่สำคัญออกเป็นข้อ ๆ ในการบรรยายโดยตรง

ขั้นที่ 3 ครูจะต้องยกตัวอย่างทันที หลังจากได้มโนทัศน์และเริ่มลงมือบรรยายโดยตรง

ขั้นที่ 4 ครูช่วยนักเรียนวิเคราะห์ความคิดและการเรียนรู้ใหม่จนสมบูรณ์

จากขั้นตอนการสอนให้เกิดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ดังกล่าวข้างต้นสามารถสรุปได้ว่า ขั้นนำครูจะต้องกำหนดจุดประสงค์การเรียนรู้ ทบทวนความรู้เดิมที่เรียนผ่านมา เตรียมมโนทัศน์ขั้นต้น ในขั้นสอนครูจะต้องยกตัวอย่างประกอบ ทั้งทางบวกและทางลบ โดยใช้กิจกรรม อาจเป็น

รูปภาพ สื่อ สัญลักษณ์ เพื่อให้เด็กนักเรียนเกิดมโนทัศน์ ส่วนในขั้นสรุป ครูให้นักเรียนสรุปมโนทัศน์ แล้วจึงทดสอบว่านักเรียนเข้าใจมโนทัศน์หรือไม่ โดยการยกปัญหาใหม่แล้วให้นักเรียนช่วยกันสรุปมโนทัศน์

ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์

1. ความหมายโจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์

ได้มีนักการศึกษาไทยและต่างประเทศให้ความหมายของโจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

ไพบูลย์ จันทยศ (2526 : 70) ให้ความหมายของโจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ไว้ว่า หมายถึง โจทย์เลขที่มีข้อความเป็นภาษาหนังสือ ไม่มีเครื่องหมายบวก ลบ คูณ หรือหาร แต่เครื่องหมายเหล่านั้นปรากฏเป็นข้อความบรรยาย

สุพิศา แก้วสุวรรณ (2536 : 15) ให้ความหมายของโจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ไว้ว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่เกี่ยวข้องกับปริมาณ คำถามที่ต้องการจะเกี่ยวข้องกับปริมาณด้วย การหาคำตอบต้องใช้การคิดจากความรู้และประสบการณ์เดิม

สุนิเทศก์ ไชยกุล (2538 : 33) ให้ความหมายของโจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ไว้ว่า หมายถึง คำถามทางคณิตศาสตร์ ซึ่งประกอบด้วยข้อความ และตัวเลขที่นักเรียนจะต้องวิเคราะห์ข้อความนั้นเสียก่อนที่จะดำเนินการหาคำตอบ โดยจะต้องใช้ความรู้ ประสบการณ์ การวางแผน และการตัดสินใจที่ถูกต้องจึงจะสามารถแก้โจทย์ปัญหานั้นได้

อุบลรัตน์ แซ่ด่าน (2538 : 9) ให้ความหมายของโจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ไว้ว่า หมายถึงโจทย์ปัญหาหรือสถานการณ์ที่กำหนดให้ ซึ่งใช้ภาษาอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลเชิงปริมาณ ที่ผู้แก้ปัญหาจะต้องอ่านเก็บรายละเอียด เพื่อทำความเข้าใจสถานการณ์ หรือเหตุการณ์ที่กำหนดให้และพิจารณาเลือกวิธีการทางคณิตศาสตร์ ที่เคยเรียนรู้มาแล้วมาคิดคำนวณหาคำตอบ

เพลินพิศ เสือชาวนา (2541 : 11) ให้ความหมายของโจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ไว้ว่า หมายถึง ปัญหาเกี่ยวกับตัวเลขที่อธิบายด้วยภาษา ซึ่งผู้แก้ปัญหาจะต้องทำความเข้าใจปัญหาแล้วเลือกวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมคิดคำนวณหาคำตอบ

พรนภา ไพโรจน์ภักดี (2542 : 9) ให้ความหมายของโจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ไว้ว่า หมายถึง ข้อคำถามซึ่งเป็นเนื้อหาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่นักเรียนจะต้องอ่านแล้วตีความหมายและหาวิธีการให้ได้คำตอบ อาจจะอยู่ในรูปตัวเลข หรือข้อความ

พงษ์ทิพย์ นวนิล (2543 : 8) ให้ความหมายของโจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ไว้ว่า โจทย์ที่มีสภาพปัญหาประกอบด้วยเหตุการณ์ คำถาม ซึ่งมีตัวเลขและจำนวนมาเกี่ยวข้องด้วย ผู้เรียนจะต้องแสดงวิธีหาคำตอบเพื่อแก้โจทย์นั้นให้ถูกต้อง

อดัมส์ เอลลิส และ บีสัน (Adums, Ellis and Beeson. 1977 : 173) ให้ความหมายของโจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ไว้ว่า หมายถึง ปัญหาที่บรรยายสถานการณ์ด้วยข้อความที่ต้องการคำตอบในเชิงปริมาณตัวเลข วิธีการหรือการคำนวณที่ให้ได้มาซึ่งคำตอบต้องใช้วิธีการในการแก้ปัญหา

จากความหมายของโจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้นสามารถสรุปได้ว่า โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์หมายถึงปัญหาที่บรรยายสถานการณ์ด้วยข้อความที่ต้องใช้การวิเคราะห์ การเลือกใช้วิธีการทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมและการดำเนินการแก้ปัญหาเพื่อให้ได้คำตอบ

2. ขั้นตอนการสอนการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์

กระบวนการแก้ปัญหาเป็นสิ่งสำคัญและจำเป็นในการช่วยให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น การฝึกแก้โจทย์ปัญหาอย่างมีขั้นตอนจะช่วยให้นักเรียนไม่สับสน มองเห็นแนวทางแก้ปัญหาได้ถูกต้อง มีนักการศึกษาหลายท่านได้อธิบายขั้นตอนการสอนการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

กระบวนการแก้ปัญหาของโพลยา (Polya. 1957 : 16-17) ประกอบด้วยขั้นตอนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา

เป็นการสำรวจว่าในปัญหามีคำหรือประโยคย่อย ๆ อะไรบ้าง มีความหมายอย่างไร แล้วจำแนกเป็นส่วน ๆ ว่าโจทย์กำหนดอะไรมาให้ อะไรคือสิ่งที่ต้องการหา อะไรคือข้อมูลที่กำหนด มีเงื่อนไขอย่างไรบ้าง

ขั้นที่ 2 ขั้นวางแผนการแก้ปัญหา

เป็นขั้นที่ต้องพิจารณาว่าจะแก้ปัญหาด้วยวิธีการใด แก้ปัญหาอย่างไร ผู้แก้ปัญหาจะต้องเชื่อมโยงระหว่างข้อมูลกับสิ่งที่ไม่รู้ ผสมผสานกับประสบการณ์ในการแก้ปัญหาที่ผู้แก้ปัญหามีอยู่แล้ว กำหนดแนวทางในการแก้ปัญหา

ขั้นที่ 3 ขั้นดำเนินการตามแผน

เป็นขั้นที่ลงมือปฏิบัติตามแผนที่วางไว้ และมีการตรวจสอบแต่ละขั้นว่าปฏิบัติถูกต้องหรือไม่

ขั้นที่ 4 ขั้นตรวจสอบ

เป็นการมองย้อนกลับไปทีละขั้นตอน ว่าถูกต้องหรือไม่ หรืออาจตรวจสอบโดยใช้วิธีการแก้ปัญหาวิธีอื่น ๆ แล้วตรวจสอบผลที่ได้ว่าตรงกันหรือไม่ หรืออาจจะใช้วิธีการประมาณคำตอบอย่างคร่าว ๆ

ลาสเลย์ (Lasley. 1964 : 70) ได้เสนอแนะขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาไว้ดังนี้

1) อ่านปัญหาอย่างละเอียด

2) ตัดสินใจว่าอะไรคือสิ่งที่ต้องการ

3) เลือกวิธีการที่ช่วยในการหาคำตอบ

4) วางแผนในการดำเนินการ

5) กะประมาณคำตอบออกมาเป็นตัวเลข

6) ลงมือแก้ปัญหา

7) เปรียบเทียบคำตอบที่ได้กับคำตอบที่ได้จากการกะประมาณ

8) ตรวจคำตอบ

ยีโอทิส และ โฮสทิกา (สมมาต บรรจงรัตน์. 2540 : 17 อ้างถึง Yeotis and Hosticka. 1980 : 561) ได้เสนอลำดับขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ว่าประกอบด้วย 8 ขั้นตอน ดังนี้

1) เลือกข้อมูลที่ได้มาจากปัญหา

2) จัดจำแนกข้อมูลออกเป็นข้อมูลที่เกี่ยวข้องและไม่เกี่ยวข้องสำหรับการแก้ปัญหา

3) เรียงลำดับข้อมูลที่มีความจำเป็นที่จะใช้ในการหาคำตอบของปัญหา

4) พิจารณาว่าข้อมูลที่จำเป็นข้อมูลใดที่ได้แล้วและข้อมูลใดที่ยังต้องการหาเ พิ่มเติม

5) พิจารณาว่าจะเก็บรวบรวมข้อมูลที่ต้องการด้วยวิธีใด

6) เก็บรวบรวมข้อมูลที่ต้องการ

7) ใช้ข้อมูลที่เกี่ยวข้องทั้งหมดในการแก้ปัญหา

8) ตรวจสอบความเชื่อถือได้ของคำตอบ

จอห์นสัน และ ริสซิ่ง (Johnson and Rissing. 1972 : 238) ได้เสนอแนะขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาไว้ดังนี้

1) ทำความเข้าใจปัญหา

2) กะประมาณคำตอบ

3) เลือกวิธีการ สูตร ความสัมพันธ์

4) หาข้อเท็จจริงทั้งหมด และคำนวณโดยวิธีการอื่น ๆ ทดลองกับข้อมูลและเงื่อนไขที่

กำหนดมาให้ เพื่อค้นหารูปแบบ

5) วิเคราะห์หรือคำนวณ

6) บอกคำตอบหรือหลักการทั่วไป

7) ประยุกต์หลักการในสถานการณ์ใหม่

ครูลิค และ เรย์ (พรนภา ไพโรจน์ภักดี 2542 : 13 อ้างถึง Krulik and Rey. 1980 : ปกใน) ได้เสนอขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาไว้ดังนี้

1) ทำความเข้าใจปัญหา ในการแก้ปัญหานั้นจะต้องทำความเข้าใจปัญหา ซึ่งจะต้องพิจารณาว่าอะไรเป็นตัวที่ไม่ทราบค่า มีข้อความหรือเงื่อนไขอะไรบ้าง สิ่งที่โจทย์บอกนั้นมีเพียงพอในการแก้ปัญหาหรือไม่ และในการพิจารณาอาจจะสร้างภาพประกอบ ความเข้าใจ แยกแยะส่วนต่าง ๆ ของสิ่งที่โจทย์บอกแล้วเขียนลงไปว่ามีอะไรบ้าง

2) วางแผนในการแก้ปัญหา จะต้องหาความเกี่ยวข้องระหว่างข้อมูลที่โจทย์บอกกับตัวแปรที่ไม่ทราบค่า พิจารณาปัญหาย่อยทั้งหลาย เทียบเคียงโจทย์ปัญหาใหม่กับโจทย์ปัญหาเก่าที่คล้ายคลึงกัน ค้นหาทฤษฎี กฎ สูตร นิยามที่จะนำมาใช้ แล้วลงมือวางแผนแก้ปัญหา

3) ดำเนินการตามแผน เมื่อวางแผนแล้วดำเนินการตามแผนทันที ควรจะได้ตรวจสอบทีละขั้นว่าถูกต้องหรือไม่ อย่าทำข้ามขั้น

4) ขั้นตรวจสอบ เมื่อทำแล้วจะต้องตรวจสอบอีกครั้งหนึ่งว่าใช้ข้อมูลหมดหรือยัง และได้ผลตามต้องการครบหรือไม่

จรูญ จียโชค (2531 : 17) ได้เสนอแนะขั้นตอนในการแก้ปัญหาไว้ 4 ขั้นตอนใหญ่ดังนี้

1) ขั้นการอ่านเพื่อวิเคราะห์โจทย์ปัญหา

2) ขั้นของการกำหนดทางเลือกที่ดีที่สุดในการแก้โจทย์ปัญหา

3) ขั้นการคิดคำนวณ

4) ขั้นการตรวจสอบคำตอบ

น้อมศรี เคท (2536 : 19) ได้เสนอแนะขั้นตอนในการแก้ปัญหาไว้ 5 ขั้นตอน ดังนี้

1) ทำความเข้าใจสภาพและลักษณะของปัญหา

2) ศึกษาปัญหาว่ามีความแตกต่างหรือคล้ายกับปัญหาที่เคยพบมาแล้วอย่างไร

3) เลือกกระบวนการที่จะใช้ในการแก้ปัญหา

4) แสดงวิธีทำ พิจารณา และตรวจคำตอบที่ได้จากการคำนวณ

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537 : 55) ได้เสนอกระบวนการแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ว่าประกอบด้วยขั้นตอนที่สำคัญ 4 ขั้นตอน คือ

1) ขั้นทำความเข้าใจปัญหา เป็นการมองไปที่ตัวปัญหา พิจารณาว่าปัญหา ต้องการอะไร ปัญหากำหนดอะไรให้บ้าง มีสาระความรู้ใดที่เกี่ยวข้องบ้าง คำตอบของปัญหาจะอยู่ในรูปแบบใด การทำความเข้าใจปัญหาด้วยถ้อยคำของตนเอง

2) ขั้นวางแผน เป็นขั้นตอนสำคัญที่จะต้องพิจารณาว่าจะแก้ปัญหาด้วยวิธีใด จะแก้อย่างไร ปัญหาที่กำหนดให้นี้มีความสัมพันธ์กับปัญหาที่เคยมีประสบการณ์ในการแก้มาก่อนหรือไม่ ขั้นวางแผนเป็นขั้นตอนที่ผู้แก้ปัญหาพิจารณาความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ในปัญหา ผสมผสานกับประสบการณ์ในการแก้ปัญหาที่ผู้แก้ปัญหามีอยู่ กำหนดแนวทางในการแก้ปัญหา

3) ขั้นดำเนินการตามแผน เป็นขั้นตอนที่ลงมือปฏิบัติตามแผนที่วางไว้โดยเริ่มจากการตรวจสอบความเป็นไปได้ของแผน เพิ่มเติมรายละเอียดต่าง ๆ ของแผนให้ชัดเจน แล้วลงมือปฏิบัติจนกระทั่งสามารถหาคำตอบได้หรือค้นพบวิธีการแก้ปัญหาใหม่

4) ขั้นตรวจสอบ เป็นขั้นที่ผู้แก้ปัญหามองย้อนกลับไปทีละขั้นตอนต่าง ๆ ที่ผ่านมาเพื่อพิจารณาความถูกต้องของคำตอบและวิธีการแก้ปัญหา มีวิธีแก้ปัญหาอย่างอื่นหรือไม่ พิจารณาปรับปรุงแก้ไขวิธีแก้ปัญหาให้กระทัดรัด ชัดเจน เหมาะสมดีขึ้นกว่าเดิม ขั้นตอนนี้ครอบคลุมถึงการมองไปข้างหน้าโดยใช้ประโยชน์จากวิธีการแก้ปัญหาที่ผ่านมา ขยายแนวคิดในการแก้ปัญหาให้กว้างขวางขึ้นกว่าเดิม

สมศักดิ์ โสภณพินิจ (2537 : 67) ได้สรุปกระบวนการแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ ไว้ว่าประกอบด้วย 5 ขั้นตอนดังนี้

1) ทำความเข้าใจในปัญหา ซึ่งอาจจะใช้รูปแบบทางคณิตศาสตร์ช่วย เช่น กราฟ แผนภูมิตาราง

2) แสวงหาความรู้เพื่อนำไปใช้การแก้ปัญหานั้น ๆ พิจารณาถึงเหตุ และหาหนทางที่จะแก้ปัญหา

3) วางแผนในการแก้ปัญหา เป็นการวางโครงการ หายุทธวิธีที่เหมาะสมในการแก้ปัญหา

4) แก้ปัญหา โดยดำเนินการตามแผนที่ได้วางไว้ ซึ่งอาจจะมีความจำเป็นต้องใช้การคำนวณช่วย

5) ตรวจสอบ เป็นการทบทวนเหตุผล ที่ได้ดำเนินการแก้ปัญหาไปแล้วนั้น ว่ามีความเหมาะสมหรือไม่เพียงใด คำนวณถูกต้องหรือไม่ คำตอบน่าเชื่อถือเพียงใด

นวลน้อย เจริญผล (2542 : 38) ได้เสนอแนะขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาไว้ 5 ขั้นตอน ดังนี้

1) อ่านโจทย์อย่างระมัดระวังและตัดสินใจว่าโจทย์ถามอะไร

2) เลือกตัวแปร และพิจารณาความจริงที่โจทย์กำหนดให้เพื่อโยงไปสู่สิ่งที่โจทย์ถาม

3) เขียนสมการโดยอาศัยความจริงตามที่โจทย์กำหนด

4) แก้สมการ

5) ตรวจสอบคำตอบโดยแทนค่าในโจทย์ปัญหา

พรนภา ไพโรจน์ภักดี (2542 : 13) ได้สรุปลำดับขั้นในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ไว้ 4 ขั้นตอนคือ

1) อ่านโจทย์ปัญหาเพื่อการวิเคราะห์

2) เลือกวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมที่สุดในการแก้โจทย์ปัญหา

3) คิดคำนวณหาคำตอบ

4) ตรวจสอบคำตอบ

จากขั้นตอนลำดับขั้นในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ข้างต้นสามารถสรุปขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ได้ 4 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 อ่านวิเคราะห์โจทย์

ขั้นที่ 2 วางแผนในการทำโจทย์

ขั้นที่ 3 ลงมือทำตามแผนที่ได้กำหนด

ขั้นที่ 4 สรุปและตรวจคำตอบ

3. การพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์

การสอนให้นักเรียนเป็นนักแก้ปัญหาที่แก้ปัญหาได้ถูกต้องอย่างเดียวไม่เพียงพอ จำเป็นจะต้องพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ นักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537 : 66-67) ได้เสนอแนะเกี่ยวกับการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ โดยพิจารณาตามขั้นตอนการแก้ปัญหา 4 ขั้นของโพลยา มีแนวทางการนำเสนอ ดังนี้

1) การพัฒนาความสามารถในการเข้าใจปัญหา นักเรียนควรได้รับการฝึกฝนให้อ่านข้อความ อ่านปัญหา แล้วทำความเข้าใจ โดยอาจเริ่มจากการตั้งคำถามให้นักเรียนตอบ ต่อไปให้

นักเรียนฝึกทำความเข้าใจเองโดยอาจใช้กลวิธีช่วยเพิ่มพูนความเข้าใจ เช่น การเขียนภาพ สร้างแบบจำลอง การปรับเปลี่ยนขนาดของปริมาณต่าง ๆ ของตัวปัญหา การยกตัวอย่างที่สอดคล้องกับปัญหา

2) การพัฒนาความสามารถในการวางแผนแก้ปัญหา ในการทำกิจกรรมต่าง ๆ ฝึกให้นักเรียนคิดวางแผนก่อนลงมือทำเสมอ เช่น ในการทำแบบฝึกหัด ควรฝึกให้นักเรียนเขียนแบบแผนการคิดอย่างคร่าว ๆ ก่อนที่จะลงมือทำอย่างละเอียดชัดเจน ครูไม่บอกวิธีการแก้ปัญหากับนักเรียนโดยตรง แต่ควรใช้คำถามเพื่อกระตุ้นนักเรียนได้คิดด้วยตนเอง นอกจากนี้ควรจัดปัญหา ที่แปลกใหม่มาให้นักเรียนฝึกคิดอยู่เสมอ

3) การพัฒนาความสามารถในการดำเนินการตามแผน ควรวางแผนเป็นการจัดลำดับแนวความคิด หลักในการแก้ปัญหา เมื่อจะลงมือการดำเนินการตามแผน นักเรียนต้องตีความขยายความ นำแผนไปสู่การปฏิบัติอย่างละเอียดชัดเจนตามลำดับขั้นตอน ซึ่งครูสามารถฝึกฝนนักเรียนได้จากการทำแบบฝึกหัดนั่นเอง โดยฝึกให้นักเรียนวางแผนจัดลำดับความคิดก่อนแล้วจึงค่อยลงมือแสดงวิธีการหาคำตอบตามลำดับความคิดนั้น นอกจากนี้ ควรให้นักเรียนฝึกการตรวจสอบความถูกต้องความเป็นไปได้ของแผนที่วางไว้ ก่อนที่จะลงมือดำเนินการตามแผน

4) การพัฒนาความสามารถในการตรวจสอบ ขั้นตอนตรวจสอบของการแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ครอบคลุมประเด็นสำคัญ 2 ประเด็นคือ การมองย้อนกลับไปที่ขั้นตอนการแก้ปัญหาเพื่อพิจารณาความถูกต้องของกระบวนการและนำผลลัพธ์มาปรับปรุง และพัฒนาให้เหมาะสมยิ่งขึ้นอีกประเด็นหนึ่งคือ การมองไปข้างหน้าเป็นการใช้ประโยชน์จากกระบวนการแก้ปัญหาที่เพิ่งสิ้นสุดลง การพัฒนาความสามารถในการตรวจสอบกระบวนแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์มีแนวทาง ดังนี้

(1) กระตุ้นให้นักเรียนเห็นความสำคัญของการตรวจสอบคำตอบที่ได้ ให้เคยชินจนเป็นนิสัย

(2) ฝึกให้นักเรียนคาดคะเนคำตอบ

(3) ฝึกการตีความหมายของคำตอบ

(4) สนับสนุนให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดโดยใช้วิธีการหาคำตอบมากกว่า 1 วิธี

(5) ให้นักเรียนฝึกหัดสร้างโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับปัญหาที่เรียน

สมศักดิ์ โสภณพินิจ (2537 : 72) ได้กล่าวไว้ว่า ในการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหานั้น จะต้องพัฒนาทักษะด้านต่าง ๆ คือ

1) ทักษะในการทำความเข้าใจปัญหาได้อย่างตรงประเด็น

2) ทักษะในด้านการอ่าน เพื่อการสื่อความหมายที่ถูกต้อง

3) ทักษะในด้านการคิดคำนวณ

4) ทักษะในการมองโลกทัศน์ได้อย่างถูกต้อง

5) ทักษะในการคิดอย่างมีเหตุผล และยืดหยุ่นได้ตามสถานการณ์

6) ทักษะในการวิเคราะห์และสังเคราะห์

สมเดช บุญประจักษ์ (2543 : 24) ได้กล่าวถึงทักษะและความสามารถที่จำเป็นในการแก้ปัญหา ได้แก่

1) ทักษะในการอ่านคือ ความสามารถในการเข้าใจความหมายในสิ่งที่อ่าน

2) ทักษะในการคำนวณคือ ความสามารถในการคิดคำนวณพื้นฐานและความสามารถในการเลือกวิธีการคิดคำนวณที่เหมาะสม

3) ความสามารถในการสืบค้น คือ ความสามารถในการค้นหาข้อมูลต่าง ๆ ในสถานการณ์ปัญหา บอกได้ว่าโจทย์กำหนดอะไรให้บ้าง มีเงื่อนไขอย่างไร และต้องการหาอะไร

4) ความสามารถในการสร้างข้อคาดเดา คือ ความสามารถในการคาดเดาถึงผลที่คาดว่าจะเกิดขึ้นจากการดำเนินการแก้ปัญหา และความสามารถในการเลือกวิธีการที่ใช้ในการตรวจสอบข้อคาดเดานั้น

5) ความสามารถในการวิเคราะห์ คือ ความสามารถในการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์ของข้อมูลที่ปรากฏ และข้อมูลที่ไม่ปรากฏในสถานการณ์ปัญหาวิเคราะห์ได้ว่า ข้อมูลใดจำเป็นและต้องหาข้อมูลใดเพิ่มอีกจึงสามารถแก้ปัญหาได้

6) ความสามารถในการดำเนินการแก้ปัญหาและตรวจสอบผล คือ ความสามารถในการบูรณาการทักษะและความสามารถต่าง ๆ ข้างต้น มาใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ

จากการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ข้างต้นนั้น จะต้องพัฒนาความสามารถในการอ่านวิเคราะห์ ความสามารถในการวางแผนในการทำโจทย์ ความสามารถในการลงมือทำตามแผนและความสามารถในการสรุปและตรวจคำตอบ

4. ยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์

ปัญหามีหลายปัญหา แต่ละปัญหานั้นสามารถใช้ยุทธวิธีในการแก้ได้หลายยุทธวิธี ผู้แก้ปัญหาที่ดีจะมียุทธวิธีในการแก้ปัญหาที่พร้อมจะเลือกออกมาใช้ได้ในทันทีที่เผชิญกับปัญหา ยุทธวิธีที่สามารถนำมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์นั้นมีหลายวิธี ดังที่นักการศึกษาได้กล่าวต่อไปนี้

ครูลิค และ รัดนิก (Krullik and Rudnick. 1982 : 43) ได้เสนอยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1) การค้นหารูปแบบ

2) การคิดย้อนหลัง

3) การเดาและทดสอบ

4) การเลียนแบบและทดลอง

5) การแยกปัญหาใหญ่ออกเป็นปัญหาย่อย

6) การฟังอย่างละเอียด

7) การใช้อุปนัยทางคณิตศาสตร์

8) การแสดงข้อมูล

(1) ใช้กราฟ

(2) ใช้สมการ

(3) การแสดงทางพีชคณิต

(4) ใช้แผนภาพ

(5) ใช้แผนผัง

แกรีย์ วิลเลียม และ เบลก (Gary, William. and Blake. 2001 : 5-21) ได้เสนอยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1) การเดาและตรวจสอบ

2) การใช้ตัวแปร

3) การเขียนภาพประกอบ

4) การค้นหารูปแบบ

5) การแจกแจงกรณีที่เป็นไปได้

6) การทำให้เป็นปัญหาอย่างง่าย

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537 : 56 – 65) ได้เสนอยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ปัญหาไว้ดังนี้

1) ยุทธวิธีเดาและตรวจคำตอบ

การแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์โดยใช้ยุทธวิธีเดาและตรวจสอบเป็นการพิจารณาข้อมูลและเงื่อนไขต่าง ๆ ที่ปัญหากำหนดให้ ผสมผสานกับประสบการณ์เดิมที่เกี่ยวข้อง คาดเดาคำตอบของปัญหา แล้วตรวจสอบความถูกต้อง ถ้าไม่ถูกต้องก็คาดเดาใหม่ โดยอาศัยประโยชน์จากความไม่ถูกต้องในครั้งแรก ๆ การเดาต้องเดาอย่างมีเหตุผล มีทิศทางเพื่อให้สิ่งที่เดานั้นเข้าใกล้กับคำตอบให้มากที่สุด

ปัญหาบางปัญหาที่มีความยุ่งยากซับซ้อน การคิดหาคำตอบโดยตรงทำได้ยากหรือใช้เวลามาก ก็สามารถใช้ยุทธวิธีเดาและตรวจสอบมาช่วยแก้ปัญหาได้

2) ยุทธวิธีการเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง

การเขียนภาพ แผนภูมิ และสร้างแบบจำลอง ซึ่งสอดคล้องกับสถานการณ์ของปัญหา ช่วยให้ปัญหามีความแจ่มชัดขึ้น ช่วยให้ผู้แก้ปัญหาทำความเข้าใจกับปัญหา ได้รวดเร็วถูกต้อง ทำให้เกิดแนวความคิดในการวางแผนแก้ปัญหา

ปัญหาบางปัญหา เช่นปัญหาเกี่ยวกับรูปเรขาคณิต นอกจากจะใช้การเขียนภาพเพื่อสร้างความเข้าใจแล้ว ในขั้นวางแผนและดำเนินการตามแผน สามารถใช้ยุทธวิธีการเขียนภาพช่วยในการแก้ปัญหา

ปัญหาบางปัญหาสามารถแก้ไขได้โดยใช้ยุทธวิธีเขียนแผนภูมิ ซึ่งกระทำได้สองแนวทาง คือใช้เพื่อแจกแจงกรณีที่เป็นไปได้ และใช้เพื่อแสดงสาระสำคัญของปัญหา

ปัญหาบางปัญหาสามารถสร้างแบบจำลองเพื่อแสดงสถานการณ์ของปัญหาซึ่งมีความเป็นรูปธรรมมากกว่าการเขียนภาพและเขียนแผนภูมิ จากนั้นกำหนดแนวทางในการแก้ปัญหา และดำเนินการแก้ปัญหาจากแบบจำลองที่สร้างขึ้นนั้น

3) ยุทธวิธีสร้างตาราง

การจัดกระทำกับข้อมูลอย่างเป็นระบบมีระเบียบโดยนำมาเขียนลงในตาราง ช่วยให้มองเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูล ซึ่งจะนำไปสู่การหาคำตอบที่ต้องการ การใช้ยุทธวิธีการสร้างตารางในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีประเด็นที่ควรพิจารณาดังนี้

(1) สร้างตารางเพื่อแสดงกรณีต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

(2) สร้างตารางเพื่อแสดงกรณีที่เป็นไปได้บางกรณี

(3) สร้างตารางเพื่อค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล 2 ชุด

(4) สร้างตารางเพื่อค้นหารูปแบบทั่วไปของความสัมพันธ์

4) ยุทธวิธีการใช้ตัวแปร

การแก้ปัญหาด้วยยุทธวิธีการใช้ตัวแปร กระทำโดยสมมติตัวแปรแทนจำนวนที่ไม่ทราบค่า สร้างความสัมพันธ์ของข้อมูลต่าง ๆ ตามเงื่อนไขที่ปัญหากำหนดกับตัวแปรที่สมมติขึ้น แล้วพิจารณาหาคำตอบของปัญหาจากความสัมพันธ์ที่สร้างขึ้นนี้ ปัญหาบางปัญหาสามารถสร้างความสัมพันธ์ในรูปสมการที่สอดคล้องกับปัญหาได้ การแก้ปัญหาลักษณะนี้ทำโดยแก้สมการ แล้วพิจารณาความเป็นไปได้จากคำตอบของสมการนั้น

5) ยุทธวิธีค้นหารูปแบบ

การค้นหารูปแบบเป็นยุทธวิธีที่สำคัญมากในการแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ ผู้แก้ปัญหาจะต้องศึกษาข้อมูลที่มีอยู่ วิเคราะห์ ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลเหล่านี้ แล้วคาดเดาคำตอบ โดยใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย คำตอบที่ได้อาจจะถูกต้องหรือไม่ก็ได้ ดังนั้นจะต้องมีการตรวจสอบยืนยันคำตอบที่ได้โดยใช้การให้เหตุผลแบบนิรนัย ยุทธวิธีค้นหารูปแบบเหมาะที่จะนำมาใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับรูปแบบของตัวเลข

6) ยุทธวิธีแบ่งเป็นกรณี

ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์หลายปัญหาสามารถแก้ปัญหาได้มากขึ้น เมื่อแบ่งปัญหาเป็นกรณีมากกว่า 1 กรณี ซึ่งในแต่ละกรณีจะมีความชัดเจนมากขึ้นกว่าปัญหาเดิม เมื่อตอบของทุกกรณีได้แล้วพิจารณาคำตอบของทุกกรณีร่วมกันจะได้เป็นภาพรวม ซึ่งเป็นคำตอบของปัญหาเดิม

7) ยุทธวิธีใช้การให้เหตุผลทางตรง

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่สามารถแก้ได้โดยใช้การให้เหตุผลทางตรงโดยทั่ว ๆ ไปมักอยู่ในรูป " ถ้า A แล้ว B " โดยที่ข้อความ A เป็นเหตุบังคับให้เกิดข้อความ B การแก้ปัญหาเป็นการใช้ข้อมูลที่ปัญหากำหนดผสมผสานกับความรู้และประสบการณ์ต่าง ๆ ที่ผู้แก้ปัญหาที่มีอยู่นำไปสู่คำตอบที่ต้องการ ยุทธวิธีแก้ปัญหาโดยใช้การให้เหตุผลทางตรงมักใช้ร่วมกับยุทธวิธีอื่น ๆ

8) ยุทธวิธีใช้การให้เหตุผลทางอ้อม

ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์บางปัญหา แก้ได้ยากถ้าใช้การให้เหตุผลทางตรงในกรณีเช่นนี้การใช้การให้เหตุผลทางอ้อมเป็นยุทธิวิธีหนึ่งที่สามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาได้

ในการใช้การให้เหตุผลทางอ้อม เพื่อแสดงว่าข้อความ “A” เป็นจริงทำได้โดยสมมติว่าข้อความ “not A” เป็นจริง หลังจากนั้นหาเหตุผลมาแสดงว่าเป็นไปไม่ได้ที่ข้อความ “not A” เป็นจริง ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ข้อความ “A” เป็นจริง

9) ยุทธวิธีนำย้อนกลับ

การแก้ปัญหาโดยใช้ยุทธวิธีการนำย้อนกลับ เป็นการพิจารณาจากผลลัพธ์ครั้งสุดท้ายแล้วมองย้อนกลับมาที่ตัวปัญหา การใช้กระบวนการการคิดวิเคราะห์โดยพิจารณาจากผลย้อนกลับไปหาเหตุ ซึ่งจะต้องหาเงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการกับสิ่งที่ปัญหากำหนดให้

10) ยุทธวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่

ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์บางปัญหา ถ้าแก้ปัญหานั้นโดยตรงจะทำได้ยาก การสร้างปัญหาขึ้นใหม่ที่สัมพันธ์กับปัญหาเดิมแล้วศึกษาวิธีการแก้ปัญหาจากปัญหาใหม่ที่สร้างขึ้น เป็นวิธีหนึ่งที่จะช่วยให้เกิดแนวการคิดในการแก้ปัญหาเดิม ปัญหาที่สร้างขึ้นใหม่อาจสร้างให้ครอบคลุมปัญหาเดิมทั้งหมด หรือสร้างขึ้นใหม่เพียงบางส่วนของปัญหาเดิมก็ได้

ยุทธวิธีสร้างปัญหาขึ้นใหม่สามารถแยกกล่าวได้ใน 3 ลักษณะคือ

(1) ยุทธวิธีนึกถึงปัญหาที่เกี่ยวข้องกัน ผู้แก้ปัญหาจะต้องศึกษาปัญหาให้เข้าใจโครงสร้างของปัญหาแล้วนำไปเปรียบเทียบกับปัญหาที่ตนเองเคยมีประสบการณ์ในการแก้มาก่อน

(2) ยุทธวิธีแก้ปัญหาที่ง่ายกว่า กระทำโดยการสร้างปัญหาขึ้นมาใหม่ ซึ่งมีโครงสร้างคล้ายกับปัญหาเดิม แต่มีความซับซ้อนน้อยกว่าแก้ได้ง่ายกว่า แล้วนำวิธีการที่ใช้ในการแก้ปัญหาใหม่ไปใช้แก้ปัญหาเดิม

(3) ยุทธวิธีกำหนดเป้าหมายรอง เป็นยุทธวิธีที่แก้ปัญหาโดยพยายามแยกแยะปัญหาเดิมเป็นปัญหาย่อย ๆ อันจะนำไปสู่การแก้ปัญหาใหม่

สมศักดิ์ โสภณพินิจ (2537 : 68-70) ได้เสนอยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1) มองภาพรวม ๆ เพื่อวิเคราะห์ปัญหาในลักษณะปัญหาทั้งหมด การมองภาพรวม ๆ เป็นการทบทวนเรื่องราวทั้งหมด ทำความเข้าใจเนื้อหา การทบทวนอาจกระทำโดยการอ่านหลาย ๆ รอบ เพื่อจะได้ไม่หลงทาง มองภาพในมุมกว้างจนกว่าจะเห็นหนทางแก้ไข ในกรณีที่คิดไม่ออกอาจจะเปลี่ยนมุมมองเสียใหม่ ทั้งนี้จำเป็นจะต้องใคร่ครวญเสียก่อนที่จะกระโจนเข้าใส่ ดุจคำกล่าวที่ว่า “ คนเดินป่าจะต้องมองภูมิทัศน์ของป่าให้เห็นชัดเจนเสียก่อนที่จะหลงเข้าไปอยู่ในแมกไม้ ”

2) กำหนดทางไว้เลือกหลาย ๆ ทาง การหาทางที่เป็นไปได้ทั้งหมดไว้หลาย ๆ ทาง เพื่อมาพิจารณาในรายละเอียดว่า ทางเลือกใดที่ดีและเป็นไปได้มากที่สุด การกำหนดทางเลือกตามแบบของการวิจัยดำเนินการ เช่น PERT : Project Evaluation and Review Techniques และ CPM : Critical Part Methods เป็นวิธีการหนึ่งที่สามารถนำเอามาใช้ได้ แต่การพิจารณาเพื่อตัดสินใจเลือกนั้นต้องกระทำอย่างรอบคอบ

3) กำจัดข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องกับปัญหาทิ้งไป เหลือไว้แต่ข้อมูลที่จะเป็นประโยชน์ต่อการแก้ปัญหานั้น ๆ โดยเฉพาะ ขีดเส้นใต้เนื้อหาหรือเรื่องราวที่สำคัญจากข้อมูลที่มีอยู่ พิจารณาทางเลือกที่เป็นไปได้ โดยตัดทางเลือกที่เป็นไปไม่ได้หรือประเด็นที่ไม่เกี่ยวข้องทิ้งไปเสียก่อนโดยใช้หลักตรรกศาสตร์ แล้วจึงค่อยพิจารณาตัดสินจากข้อมูลทั้งหมดที่มีอยู่ประกอบกัน

4) เลือกวิธีการในการคำนวณให้เหมาะ โดยวิเคราะห์จากข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหาว่าจะใช้ข้อมูลข่าวสารใด กลวิธีที่สมควรนำมาใช้คือวิธีใดจึงจะได้ผล และควรจะใช้การคำนวณ บวก ลบ คูณ หาร หาค่าราก ยกกำลัง หรือใช้ความรู้ทางสถิติ แคลคูลัส พีชคณิตหรือ กราฟ อย่างใดมาช่วยในการคำนวณ

5) ใช้การเดาแล้วทดสอบ โดยใช้เหตุผลในการพิจารณาว่าคำตอบควรจะเป็นเช่นใด การเดาจะต้องเดาอย่างมีหลักเกณฑ์ สมเหตุสมผล ไม่ลำเอียง เมื่อเดาแล้วต้องมีการตรวจสอบ

ความถูกต้องเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้คำตอบ การเดาจะมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น ถ้ามีเทคนิคบางอย่างช่วย เช่น การประมาณค่า การวิเคราะห์ข้อมูล การจำลองสถานการณ์หรือการพิจารณากรณีแวดล้อมมาประกอบการพิจารณา

6) สร้างตัวแบบ (model) ที่เป็นรูปธรรม ซึ่งจะช่วยให้มองเห็นปัญหาในลักษณะหลายมิติ รูปแบบที่จำลองขึ้นอาจจะเป็นคน วัตถุ สิ่งก่อสร้าง โครงสร้าง เครือข่าย เพื่อให้เกิด ต้นแบบ และสามารถนำไปหาความสัมพันธ์กับข้อมูลที่มีอยู่ หรือนำไปสู่คำตอบที่ต้องการ

7) หาแบบรูป (pattern) ที่จะนำไปสู่การแก้ปัญหาได้อย่างมีระบบ ปัญหาบางปัญหาหรือเรื่องราวบางเรื่อง อาจจะมีลักษณะเป็นวงจร เป็นการเรียงลำดับ เป็นอนุกรมของตัวเลข เป็นรูปทรงทางเรขาคณิต เป็นค่าของสัดส่วน เป็นลักษณะของการแปลงค่า เป็นคู่ลำดับ หรือเป็นฤดูกาลเป็นต้น การหาแผนแบบได้กระทำให้สามารถไขปัญหาได้

8) จัดระบบข้อมูลใหม่ หมายถึงการจัดระบบข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับปัญหานั้นให้มีรูปที่ง่ายแก่การเข้าใจ เช่น ทำเป็นรายการ ทำเป็นตาราง ทำเป็นข้อสังเกต รวมข้อมูลเรื่องราวเดียวกันไว้ด้วยกัน ตัดข้อมูลที่ฟุ่มเฟือยออกไป รวมทั้งให้บันทึกข้อมูลที่ศูนย์หายไปซึ่งอาจจะเป็นเบาะแสให้แก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น

9) สร้างภาพประกอบ เพื่อให้สามารถมองเห็นลักษณะของตัวปัญหาได้อย่างชัดเจนจากข้อมูลที่มีอยู่ที่มีลักษณะเป็นการบรรยายความ เป็นตารางตัวเลข สามารถจะทำให้ชัดเจนขึ้นได้โดยการสร้างภาพประกอบ โดยการเขียนกราฟประกอบคำอธิบาย เขียนรูปทรงทางเรขาคณิต สเกตซ์ภาพ ลายเส้น เขียนเป็นไดอะแกรม จะทำให้มองเห็นปัญหาในลักษณะที่เป็นรูปธรรมมากขึ้น

10) แยกปัญหาใหญ่ออกเป็นปัญหาย่อย ๆ ให้มีลักษณะเช่นเดียวกับปัญหาเดิม แต่อยู่ในรูปลักษณะที่ง่ายขึ้น เป็นการแก้ปัญหาที่ง่ายกว่า มีตัวเลขยุ่งยากซับซ้อนน้อยกว่า แต่เป็นโจทย์ปัญหาลักษณะเดียวกัน เมื่อสามารถแก้ปัญหาที่เล็กกว่าได้ จะมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหาที่ยุ่งยากซับซ้อนมากขึ้นได้

11) ใช้ตรรกศาสตร์ในการแก้ปัญหา เป็นการแก้ปัญหาโดยใช้สามัญสำนึก ใช้หลักเหตุและผล บ่อยครั้งที่พบว่า การแก้ปัญหาในบางครั้งผู้ที่พยายามแก้ปัญหา อาจจะมองลึกซึ้งจนเกินไปและลืมนึกถึงความเป็นจริงตามธรรมชาติ ขาดการใช้สามัญสำนึก ทำให้หาหนทางแก้ไขที่เหมาะสมไม่ได้ การถามว่า "ถ้าเป็นอย่างนี้แล้วจะเกิดอะไรขึ้นต่อไป" เป็นการโยงจากเหตุไปสู่ผล การใช้วิธีอนุมานและอุปมานเป็นอีกวิธีการหนึ่งที่เป็นประโยชน์

12) คิดย้อนหลัง การแก้ปัญหาโดยเริ่มพิจารณาจากเหตุในบางครั้ง ไม่สามารถกระทำได้ง่ายนัก การสืบสาวจากผลย้อนหลังไปหาเหตุในบางครั้งสามารถจะแก้ปัญหาได้ดีกว่า ตัวอย่างการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ตรีโกณมิติ รวมทั้งการสืบสวนเรื่องราวต่าง ๆ การแก้ปัญหาค่ายกล

เป็นต้น ในบางครั้งจะพบว่าสามารถเริ่มต้นจากผลลัพธ์ (ปลายทาง) เพื่อนำไปสู่เหตุ (ต้นทาง) ได้ง่ายและรวดเร็วมากกว่า

13) ใช้สูตร ปัญหาหลายปัญหามีสูตรในการแก้ปัญหา บางสูตรสามารถใช้ได้กับหลายปัญหาในการแก้ปัญหาคงจะต้องพิจารณาก่อนว่า สูตรใดบ้างที่มีความเกี่ยวข้องและสามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้ให้วิเคราะห์ปัญหาแล้วนำสูตรไปใช้ หลังจากนั้นจำเป็นจะต้องตรวจสอบ ทั้งความถูกต้องของสูตร และการนำสูตรไปใช้ได้อย่างถูกต้องกับเรื่องราวนั้น ๆ

14) ตั้งคำถาม คำถามที่ตั้งโดยตนเองหรือโดยคนอื่น สามารถให้แง่คิดที่สามารถนำไปสู่การแก้ปัญหาได้ คำถามที่เป็นประโยชน์ เช่น ทำไม เป็นไปได้อย่างไร ทำไมจึงเป็นเช่นนั้น จะช่วยให้เกิดความกระจ่างในปัญหามากขึ้น ช่วยให้สามารถจับใจความสำคัญของปัญหาได้ การตั้งคำถามและหาคำตอบจะสามารถนำไปสู่การแก้ปัญหาได้

15) การพูดคุย อภิปราย หรือระดมความคิด เป็นยุทธวิธีอันหนึ่งที่จะทำให้ได้ความคิดหรือเห็นแนวทางในการแก้ปัญหา เนื่องจากการพูดคุย หรือการอภิปราย ทำให้เกิดการมองปัญหาจากหลายมุมมองที่ต่างกันออกไป เกิดแนวทางในการแก้ปัญหาได้จากหลายจุด มีการเติมหรือแก้ไขในจุดบกพร่องที่มองจากบางมุมไม่เห็น นอกจากนั้นยังจะพบว่า คำพูดบางคำทำให้สะกิดใจหรือเป็นกุญแจให้สามารถหาหนทางแก้ปัญหาได้

สมเดช บุญประจักษ์ (2543 : 9-21) ได้เสนอยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1) การหารูปแบบ

การหารูปแบบเป็นยุทธวิธีในการแก้ปัญหาที่ดีแบบหนึ่ง ที่ผู้แก้ปัญหาจะต้องวิเคราะห์และค้นหาความสัมพันธ์ของข้อมูลในสถานการณ์ปัญหานั้น ๆ แล้วคาดเดาคำตอบโดยใช้การให้เหตุผลแบบอุปนัย คำตอบที่ได้จะยอมรับว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้อง จะต้องผ่านการตรวจสอบยืนยันโดยใช้เหตุผลแบบนิรนัย การแก้ปัญหาที่ใช้ยุทธวิธีการหารูปแบบนิยมเขียนคำตอบของปัญหาในรูปแบบทั่วไป ซึ่งอาจเป็นรูปแบบของจำนวนหรือรูปแบบเรขาคณิต

2) เขียนแผนผังหรือภาพประกอบ

เป็นการเขียนผังหรือภาพประกอบต่าง ๆ ของสถานการณ์ปัญหา เพื่อช่วยให้เห็นความสัมพันธ์และแนวทางในการหาคำตอบ

3) สร้างรูปแบบหรือแบบจำลอง

เป็นยุทธวิธีการแก้ปัญหาที่คล้ายกับการเขียนแผนภาพ แต่มีประโยชน์ที่ดีกว่าตรงที่นักเรียนสามารถเคลื่อนสิ่งที่นำมาจัดรูปแบบได้

4) การสร้างตาราง

การจัดกระทำกับข้อมูลเพื่อให้ดูง่าย สะดวกต่อการวิเคราะห์หาความสัมพันธ์อันจะนำไปสู่การพบรูปแบบหรือข้อชี้แนะอื่น ๆ หรือตารางอาจช่วยแสดง กรณีที่เป็นไปได้ของการแก้ปัญหานั้น ๆ

5) การเดาและการตรวจคำตอบ

เป็นการหาคำตอบของปัญหาจากสามัญสำนึก ผู้แก้ปัญหาคาดเดาแล้วตรวจสอบถ้าไม่ได้คำตอบก็เดาใหม่ และตรวจสอบอีกครั้งจนกระทั่งได้

6) แจงกรณีที่เป็นไปได้

เป็นการแจงกรณีที่เป็นได้ทั้งหมดของปัญหา ใช้ได้ดีในกรณีที่มีจำนวนกรณีที่เป็นไปได้ที่แน่นอน มักจะใช้ตารางช่วยในการแจงกรณี

7) เขียนเป็นประโยคทางคณิตศาสตร์

การเขียนประโยคทางคณิตศาสตร์เพื่อแสดงสถานการณ์ปัญหา มีเป้าหมาย 2 ประการ คือ เป็นการแสดงความเข้าใจสถานการณ์ปัญหาและเป็นการแสดงให้รู้ว่าต้องคิดคำนวณอย่างไรในการแก้ปัญหา นักเรียนที่เขียนประโยคทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้อง แสดงว่าเขาเข้าใจปัญหานั้น และนำไปสู่การดำเนินการหาคำตอบได้ถูกต้อง

8) การดำเนินการแบบย้อนกลับ

ยุทธวิธีนี้เริ่มจากข้อมูลที่ได้จากขั้นตอนสุดท้าย แล้วทำย้อนขั้นตอนกลับมาสู่ข้อความที่กำหนดเริ่มต้น เป็นการใช้กระบวนการของการวิเคราะห์ที่พิจารณาจากผลย้อนกลับไปสู่เหตุ โดยพิจารณาจากเงื่อนไขเชื่อมโยงระหว่างสิ่งที่ต้องการหากับข้อมูลที่กำหนด การดำเนินการย้อนกลับใช้ได้ดีกับการแก้ปัญหาที่ต้องการอธิบายถึงขั้นตอนการได้มาซึ่งคำตอบ

9) การแบ่งเป็นปัญหาย่อย ๆ หรือเปลี่ยนมุมมองของปัญหา

บางปัญหามีความซับซ้อนหรือมีหลายขั้นตอน เพื่อความสะดวกอาจแบ่งปัญหาให้เป็นปัญหาย่อย ๆ เพื่อง่ายต่อการหาคำตอบแล้วนำผลการแก้ปัญหาย่อย ๆ นี้ไปตอบปัญหาที่กำหนด หรือบางปัญหาอาจต้องใช้การคิดและเปลี่ยนมุมมองที่ต่างไปจากที่คุ้นเคยที่ต้องทำตามขั้นตอนทีละขั้น

จากยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ข้างต้น ยุทธวิธีในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เป็นแนวทางหรือกระบวนการที่จะนำมาใช้ในการหาคำตอบ ไม่ใช่แนวทางเฉพาะสำหรับปัญหาหนึ่งปัญหาใด สิ่งที่ยากที่สุดในการแก้ปัญหาคือ จะเลือกยุทธวิธีที่เหมาะสมในการแก้ปัญหานั้นได้อย่างไร เพื่อที่สามารถจะแก้ปัญหานั้นได้อย่างรวดเร็วและมีประสิทธิภาพ

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. งานวิจัยในประเทศ

งานวิจัยในประเทศที่ผู้วิจัยได้ศึกษาเกี่ยวกับการใช้เครื่องคำนวณหรือเครื่องคิดเลข ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีดังนี้

บัญญัติ ทองคำ (2526 : บทคัดย่อ) ได้ศึกษาเรื่อง " อิทธิพลของเครื่องคิดเลขที่มีต่อผลสัมฤทธิ์และทัศนคติทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 (ม.ศ.5) โรงเรียนรัตนบุรี จังหวัดสุรินทร์" โดยกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 (ม.ศ.5) โรงเรียนรัตนบุรี จังหวัดสุรินทร์ ปีการศึกษา 2525-2526 จำนวน 80 คน โดยแบ่งเป็น 2 กลุ่ม ๆ ละ 40 กลุ่มแรกใช้เครื่องคิดเลขในการเรียน กลุ่มหลังไม่ให้ใช้เครื่องคิดเลขในการเรียน ผลการวิจัยปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์และทัศนคติทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้และไม่ใช้เครื่องคิดเลขในการเรียนไม่แตกต่างกัน

วิชัย สนทอง (2526 : บทคัดย่อ) ได้ศึกษาเรื่อง "ผลของการใช้เครื่องคิดเลขในการเรียนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน และในการทำการบ้าน ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 " โดยกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนรัตนบุรี จังหวัดสุรินทร์ ปีการศึกษา 2526 จำนวน 80 คน โดยแบ่งเป็นกลุ่มทดลอง 4 กลุ่ม ๆ ละ 20 คน คือ กลุ่มที่ 1 ใช้เครื่องคิดเลขในการเรียนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนและใช้ในการทำการบ้าน กลุ่มที่ 2 ใช้เครื่องคิดเลขในการเรียนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนแต่ไม่ใช้ในการทำการบ้าน กลุ่มที่ 3 ไม่ใช้เครื่องคิดเลขในการเรียนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนแต่ใช้ในการทำการบ้าน กลุ่มที่ 4ไม่ใช้เครื่องคิดเลขในการเรียนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนและไม่ใช้ในการทำการบ้าน ผลการวิจัยปรากฏว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ใช้เครื่องคิดเลขในการเรียนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน และนักเรียนที่ไม่ใช้เครื่องคิดเลขในการเรียนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนแตกต่างกันโดยนักเรียนที่ใช้เครื่องคิดเลขในการเรียนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนมีคะแนนเฉลี่ยสูงกว่านักเรียนที่ไม่ใช้เครื่องคิดเลขในการเรียนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน

ศรีสุรางค์ ทีนะกุล (2526 : บทคัดย่อ) ได้ศึกษาเรื่อง "อิทธิพลของเครื่องคิดเลขที่มีต่อผลสัมฤทธิ์และทัศนคติทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนสตรีราชินูทิศ อุดรธานี" โดยกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายโรงเรียนสตรีราชีนูทิศ จังหวัดอุดรธานี ที่เรียนวิชา ค.014 ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2525 จำนวน 2 ห้องเรียน ห้องละ 44 คน ซึ่งห้องแรกเป็นกลุ่มที่ใช้เครื่องคิดเลขในการเรียนการสอน และอีกห้องเป็นกลุ่มที่ไม่ใช้

เครื่องคิดเลขในการเรียนการสอน ผลปรากฏว่านักเรียนที่ไม่ใช้เครื่องคิดเลขในการเรียนทั้งที่ใช้เครื่องคิดเลขในการทดสอบและไม่ใช้ในการทดสอบได้คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักเรียนที่ใช้เครื่องคิดเลขในการเรียนทั้งที่ใช้เครื่องคิดเลขในการทดสอบและไม่ใช้ในการทดสอบ และทัศนคติทางการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนที่ใช้และไม่ใช้เครื่องคิดเลขในการเรียนไม่แตกต่างกัน

อารยา กุลานุช (2526 : บทคัดย่อ) ได้ศึกษาเรื่อง “ ผลของการใช้เครื่องคิดเลขในการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องการวิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ” กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 (ม.ศ. 5) โรงเรียนวัดราชบพิธ กรุงเทพมหานคร ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2525 จำนวน 2 กลุ่ม คือกลุ่มทดลองซึ่งให้ใช้เครื่องคิดเลขในการเรียนจำนวน 50 คน และกลุ่มควบคุมซึ่งไม่ให้ใช้เครื่องคิดเลขในการเรียนจำนวน 42 คน ผลปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนที่เรียนโดยใช้เครื่องคิดเลขสูงกว่านักเรียนที่ไม่ใช้เครื่องคิดเลข

ส่วนงานวิจัยในประเทศที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีดังนี้

ณัชชา กมล (2542 : 46-73) ได้ศึกษาเรื่อง “ผลของการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟที่มีต่อมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์และความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตสังกัดทบวงมหาวิทยาลัย” กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยเชียงใหม่ จำนวน 79 คน โดยแบ่งเป็นกลุ่มทดลองที่เรียนโดยการใช้เครื่องคำนวณกราฟประกอบการเรียนคณิตศาสตร์ กับกลุ่มควบคุมที่เรียนโดยการไม่ใช้เครื่องคำนวณกราฟประกอบการเรียนคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนโดยการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนมีมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์และความสามารถด้านมิติสัมพันธ์สูงกว่านักเรียนที่เรียนโดยการไม่ใช้เครื่องคำนวณกราฟประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

2. งานวิจัยต่างประเทศ

จากการศึกษาค้นคว้างานวิจัยในต่างประเทศที่เกี่ยวกับการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีดังนี้

นอร์ริส (Norris. 1995 : 1862-A) ได้ศึกษา “ อิทธิพลของการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟสำหรับการเรียนการสอนแคลคูลัสเบื้องต้นในระดับมหาวิทยาลัย” กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาจากมหาวิทยาลัยมิชิแกน เป็นกลุ่มทดลองจำนวน 125 คนใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียน

แคลคูลัสเบื้องต้น และกลุ่มควบคุมจำนวน 179 คน จาก 4 ห้องเรียน เรียนตามปกติโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ผลปรากฏว่า นักศึกษาที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟมีความรู้เชิงมโนทัศน์เกี่ยวกับฟังก์ชันสูงกว่านักศึกษาที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

บาร์ทัน (Barton. 1995 : 3868-A) ได้ศึกษา " เครื่องคำนวณเชิงกราฟในการเรียนแคลคูลัส : การทดสอบมโนทัศน์ของครู และการสอนปฏิบัติ " ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบการสอนของครู 5 คน โดยใช้วิธีการสัมภาษณ์ก่อนสอนและหลังการสอนในสุดสัปดาห์ และสังเกตการสอนในห้องเรียนในสุดสัปดาห์ ผลการวิจัยพบว่า มโนทัศน์ของครูกับการสอนแคลคูลัสสอดคล้องกับการสอนปฏิบัติ หลักสูตรที่ใช้เครื่องคำนวณและเทคโนโลยีในการสอนปฏิบัตินักศึกษาจะได้รับความรู้มากกว่าการสอนปฏิบัติโดยทั่วไป

ซีเวอร์ทซัน (Seavertson. 1995 : 4309-A) ได้ศึกษา " การเปรียบเทียบการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟและเครื่องคำนวณทางวิทยาศาสตร์ ในวิชาพีชคณิตระดับวิทยาลัย" กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาที่เรียนวิชาพีชคณิตระดับวิทยาลัยจำนวน 247 คน โดยแบ่งเป็นกลุ่มที่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟจำนวน 184 คน และกลุ่มที่ใช้เครื่องคำนวณทางวิทยาศาสตร์ จำนวน 63 คน ผลปรากฏว่านักศึกษาในกลุ่มที่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่านักศึกษาในกลุ่มที่ใช้เครื่องคำนวณทางวิทยาศาสตร์ และนักศึกษาในกลุ่มที่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟมีทัศนคติต่อการใช้เครื่องคำนวณในการเรียน สูงกว่านักศึกษาในกลุ่มที่ใช้เครื่องคำนวณทางวิทยาศาสตร์

คาร์เทอร์ (Carter. 1995 : 3869-A) ได้ศึกษา "ความสามารถในการมองเห็นภาพนำไปสู่ความเข้าใจในมโนทัศน์ของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ " กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาที่เรียนพีชคณิตระดับมหาวิทยาลัยจำนวน 53 คนโดยแบ่งเป็นกลุ่มทดลองที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟและกลุ่มควบคุมที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ผลการศึกษาปรากฏว่า คะแนนจากการทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียนของกลุ่มทดลองมีพัฒนาการสูงกว่ากลุ่มควบคุม

ดิมิซีริ (Dimiceli.1999 : 61-01A) ได้ศึกษา " การเรียนแคลคูลัสเชิงธุรกิจโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ "โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อศึกษาค้นคว้าว่า นักศึกษาใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟอย่างไรในการศึกษามโนทัศน์เกี่ยวกับ 1) ลิมิตของฟังก์ชัน 2) ความต่อเนื่อง 3) นิยามของอนุพันธ์ การศึกษาครั้งนี้แสดงให้เห็นว่า 1) นักศึกษาซึ่งเคยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟน้อยกว่า 5 เดือนก่อนจะมาปฏิบัติในชั้นเรียน ได้คะแนนจากการทดสอบต่ำกว่า นักศึกษาที่เคยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟมากกว่า 5 เดือน ในเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน ความต่อเนื่องและอนุพันธ์ 2) นักศึกษาที่ปฏิบัติน้อยส่งผลให้มีทักษะในการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟต่ำ 3) นักศึกษาที่เรียนอ่อนวิชาคณิตศาสตร์ ไม่เต็มใจที่จะใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ เพื่อช่วยในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ 4) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนเรียนสัมพันธ์กับการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

เซอแรน (Serhan. 2000 : 61-10A) ได้ศึกษา “ ผลของการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟที่มีต่อภาพมโนทัศน์ของอนุพันธ์ที่จุด” กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาระดับปริญญาตรีจำนวน 71 คน โดยแบ่งเป็น กลุ่มทดลอง 24 คน ที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ และกลุ่มควบคุม 47 คน ผลการศึกษาปรากฏว่า นักศึกษาทั้งสองกลุ่มมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ โดยนักศึกษากลุ่มทดลองมีความเข้าใจในอนุพันธ์ที่จุด มากกว่านักศึกษาในกลุ่มควบคุม กลุ่มทดลองสามารถคำนวณหาอนุพันธ์จากจุดที่ให้มาโดยดูจากความแตกต่างของเส้นกราฟ เนื่องจากเครื่องคำนวณเชิงกราฟสามารถช่วยให้ผู้เรียนเห็นภาพอนุพันธ์

แครโคว์สกี (Krakowski. 2000 : 61-03A) ได้ศึกษา “ อิทธิพลของเครื่องคำนวณเชิงกราฟที่มีต่อความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับแคลคูลัสเบื้องต้น ในเรื่อง พหุนาม เศษส่วนของพหุนาม จำนวนตรรกยะ และฟังก์ชันเอ็กโปแนนเชียล ” กลุ่มตัวอย่างประกอบด้วยกลุ่มควบคุม และกลุ่มทดลอง 2 กลุ่ม โดยกลุ่มควบคุมจำนวน 32 คนได้รับการสอนแบบบรรยาย และเขียนกราฟโดยใช้มือเขียนบนกระดานดำ กลุ่มทดลองกลุ่มที่ 1 จำนวน 39 คน ได้รับการสอนแรกเริ่มโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ แต่เป็นการสอนเช่นเดียวกับกลุ่มควบคุม กลุ่มทดลองกลุ่มที่ 2 จำนวน 42 คน ได้รับการสอนแรกเริ่มโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟต่อเนื่องไปจนหมดภาคการศึกษา การวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุม การเรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟมีอิทธิพลทางบวกในความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับพหุนาม เศษส่วนของพหุนาม และฟังก์ชันชี้กำลัง

จากการศึกษางานวิจัยเกี่ยวกับเครื่องคำนวณเชิงกราฟในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า การนำเครื่องคำนวณมาใช้ประกอบการเรียน ทำให้นักเรียนได้พัฒนามโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ ความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์มากขึ้น เครื่องคำนวณเชิงกราฟจึงถือเป็นสื่อการเรียนการสอนอย่างหนึ่งที่มีประสิทธิภาพ

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษา ผลของการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่มีต่อมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ของนักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 โรงเรียนนครอาชีวศึกษา ซึ่งเป็นการวิจัยเชิงทดลอง แบ่งเป็นกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมแล้ววัดผลหลังการทดลอง

ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ปีการศึกษา 2545 โรงเรียนนครอาชีวศึกษา อำเภอเมือง จังหวัดนครศรีธรรมราช สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาเอกชน ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ 6

กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 (ปวส.1) โรงเรียนนครอาชีวศึกษา อำเภอเมือง จังหวัดนครศรีธรรมราช สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาเอกชนที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ 6 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 ซึ่งได้จากการสุ่มอย่างง่ายจำนวน 40 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองที่สอนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ 20 คน และกลุ่มควบคุมที่สอนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ 20 คน

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

เครื่องมือที่ใช้ในการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูลในการวิจัยครั้งนี้เป็นเครื่องมือที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นประกอบด้วย

1. แผนการสอนสำหรับกลุ่มทดลองที่สอนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

แผนการสอนที่สอนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ เป็นแผนการสอนสำหรับกลุ่มทดลองโดยจัดกิจกรรมให้นักศึกษาใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนการสอน ซึ่งเครื่องคำนวณเชิงกราฟที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นเครื่องคำนวณเชิงกราฟของ บริษัทเท็กซัส อินสทรูเมนท์ (Taxas Instrument) รุ่น TI – 92 แผนการสอนสำหรับกลุ่มทดลองที่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

วิชาคณิตศาสตร์ 6 เรื่องปริพันธ์และการประยุกต์ปริพันธ์ของนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ผู้วิจัยได้ดำเนินการสร้างดังนี้

1) ศึกษาหลักสูตรกรมอาชีวศึกษา ประเภทสายวิชาชีพช่างอุตสาหกรรม

2) ศึกษาเนื้อหา จุดประสงค์ และกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่อง ปริพันธ์และการประยุกต์ปริพันธ์ จากหนังสือเรียน คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ 6ในระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ตามหลักสูตรกรมอาชีวศึกษา ประเภทสายวิชาชีพช่างอุตสาหกรรม

3) ศึกษาคู่มือการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ จากเอกสารประกอบการอบรม คู่มือการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ รุ่น TI – 92

4) เขียนแผนการสอนเรื่องปริพันธ์และการประยุกต์ปริพันธ์อย่างละเอียดเป็นรายคาบ มีทั้งหมด 18 คาบ คาบละ 50 นาที

5) นำแผนการสอนให้คณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ตรวจดูและแก้ไขข้อบกพร่อง เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง

6) นำแผนการสอน (รายละเอียดดังภาคผนวก ก หน้า 68) ไปทดลองใช้กับนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ที่สุ่มไว้เป็นกลุ่มทดลอง

2. แผนการสอนสำหรับกลุ่มควบคุมที่สอนปกติ

แผนการสอนสำหรับกลุ่มควบคุมที่สอนปกติวิชาคณิตศาสตร์ 6 เรื่องปริพันธ์และการประยุกต์ปริพันธ์ ของนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ผู้วิจัยได้ดำเนินการสร้างตามขั้นตอนดังนี้

1) ศึกษาหลักสูตรกรมอาชีวศึกษา ประเภทสายวิชาชีพช่างอุตสาหกรรม

2) ศึกษาเนื้อหา จุดประสงค์ และกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่อง ปริพันธ์และการประยุกต์ปริพันธ์ จากหนังสือเรียน คู่มือครูวิชาคณิตศาสตร์ 6 ในระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่1 ตามหลักสูตรกรมอาชีวศึกษา ประเภทสายวิชาชีพช่างอุตสาหกรรม

3) เขียนแผนการสอนเรื่องปริพันธ์และการประยุกต์ปริพันธ์อย่างละเอียดเป็นรายคาบ มีทั้งหมด 18 คาบ คาบละ 50 นาที

4) นำแผนการสอนให้คณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ตรวจดูและแก้ไขข้อบกพร่อง

5) นำแผนการสอน (รายละเอียดดังภาคผนวก ก หน้า 68) ไปทดลองใช้กับนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ที่สุ่มไว้เป็นกลุ่มควบคุม

3. แบบทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์

แบบทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์ ของนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ผู้วิจัยได้ดำเนินการสร้างตามขั้นตอน ดังนี้

1) ศึกษาวิธีการสร้างแบบทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ เกี่ยวกับปริพันธ์ ของนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ปีที่ 1 จากตำราและเอกสารที่เกี่ยวข้อง

2) ศึกษาหลักสูตร เนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์ 6 เรื่องปริพันธ์ ของนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 แล้วสร้างแบบทดสอบแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก โดยสร้างให้ครอบคลุมเนื้อหาและตรงตามจุดประสงค์การเรียนรู้จำนวน 30 ข้อ โดยมีเกณฑ์การให้คะแนนคือ

ตอบถูกให้ข้อละ 1 คะแนน

ตอบผิด หรือไม่ตอบ ให้ข้อละ 0 คะแนน

3) นำแบบทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์ จำนวน 30 ข้อที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เสนอต่อคณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง และทำการปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องตามคำแนะนำ แล้วนำเสนอให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน (รายละเอียดดังภาคผนวก ค หน้า 172) เพื่อตรวจสอบความตรงตามเนื้อหา ความเหมาะสมของเนื้อหา ความครอบคลุมของข้อคำถาม ภาษาและสำนวนตามหลักการเขียนข้อสอบที่ดี และพิจารณาข้อคำถามและตัวเลือกในแต่ละข้อว่าเป็นแบบทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์หรือไม่

4) นำแบบทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์ ที่ผ่านการพิจารณาจากผู้เชี่ยวชาญแล้วมาปรับปรุงและแก้ไขข้อบกพร่องตามข้อแนะนำ แล้วไปทดลองใช้กับนักศึกษาวิทยาลัยเทคนิคนครศรีธรรมราช จังหวัดนครศรีธรรมราช ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 จำนวน 38 คน ที่ผ่านการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 6 มาแล้ว และไม่ใช่นักศึกษาในกลุ่มตัวอย่าง

5) นำกระดาษคำตอบมาตรวจให้คะแนน ข้อที่ถูกได้ 1 คะแนน ข้อที่ผิดหรือไม่ตอบได้ 0 คะแนน แล้วนำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์คุณภาพของแบบทดสอบเป็นรายข้อ เพื่อหาความยากง่าย (p) และอำนาจจำแนก (r) โดยใช้ 50 % ของกลุ่มสูงและกลุ่มต่ำ แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีความยากง่ายตั้งแต่ 0.20 - 0.80 และอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป โดยคัดเลือกไว้เพียง 20 ข้อ ซึ่งได้ข้อสอบมีค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.24 - 0.61 และ ค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.21 - 0.68 (รายละเอียดดังภาคผนวก ง หน้า174)

6) นำแบบทดสอบที่คัดเลือกไว้มาหาค่าความเชื่อมั่นทั้งฉบับ โดยวิธีของคูเดอร์ ริชาร์ดสัน (KR 20) ได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.77 (รายละเอียดดังภาคผนวก ง หน้า 174)

7) นำแบบทดสอบที่ได้จากข้อ 6) มาพิมพ์เป็นแบบทดสอบฉบับสมบูรณ์ จำนวน 20 ข้อ

4. แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์

แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์ ของนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ผู้วิจัยได้ดำเนินการสร้างตามขั้นตอนดังนี้

1) ศึกษาวิธีการสร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์ ของนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 จากตำราและเอกสารที่เกี่ยวข้อง

2) ศึกษาหลักสูตร เนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์ 6 เรื่องการประยุกต์ปริพันธ์ ของนักศึกษาระดับชั้นประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 แล้วสร้างแบบทดสอบแบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือกโดยสร้างให้ครอบคลุมเนื้อหาและตรงตามจุดประสงค์การเรียนรู้จำนวน 20 ข้อโดยมีเกณฑ์การให้คะแนนคือ

ตอบถูกให้ข้อละ 1 คะแนน

ตอบผิด หรือไม่ตอบ ให้ข้อละ 0 คะแนน

3) นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์ จำนวน 20 ข้อที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น เสนอต่อคณะกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง และทำการปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องตามคำแนะนำ แล้วนำเสนอให้ผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน (รายละเอียดดังภาคผนวก ค หน้า 172) เพื่อตรวจสอบความตรงตามเนื้อหา ความเหมาะสมของเนื้อหา ความครอบคลุมของข้อคำถาม ภาษาและสำนวนตามหลักการเขียนข้อสอบที่ดีและพิจารณาข้อคำถามและตัวเลือกในแต่ละข้อว่าเป็นแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์หรือไม่

4) นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์ ที่ผ่านการพิจารณาจากผู้เชี่ยวชาญแล้วมาปรับปรุงและแก้ไขข้อบกพร่องตามคำแนะนำแล้วนำไปทดลองใช้กับนักศึกษาวิทยาลัยเทคนิคนครศรีธรรมราช จังหวัดนครศรีธรรมราช ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 จำนวน 38 คน ที่ผ่านการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 6 มาแล้วและไม่ใช่นักศึกษาในกลุ่มตัวอย่าง

5) นำกระดาษคำตอบมาตรวจให้คะแนน ข้อที่ถูกได้ 1 คะแนน ข้อที่ผิดหรือไม่ตอบได้ 0 คะแนน แล้วนำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์คุณภาพของแบบทดสอบเป็นรายข้อ เพื่อหาความ

ยากง่าย (p) และอำนาจจำแนก (r) โดยใช้ 50 % ของกลุ่มสูงและกลุ่มต่ำ แล้วคัดเลือกข้อสอบที่มีความยากง่ายตั้งแต่ 0.20 - 0.80 และอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป โดยคัดเลือกไว้เพียง 15 ข้อ ซึ่งได้ข้อสอบมีค่าความยากง่ายตั้งแต่ 0.29 - 0.55 และค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.21 - 0.58 (รายละเอียดดังภาคผนวก ง หน้า 174)

6) นำแบบทดสอบที่คัดเลือกไว้มาหาค่าความเชื่อมั่นทั้งฉบับ โดยวิธีของคูเดอร์ ริชาร์ดสัน (KR 20) ได้ค่าความเชื่อมั่นเท่ากับ 0.84 (รายละเอียดดังภาคผนวก ง หน้า 174)

7) นำแบบทดสอบที่ได้จากข้อ 6) มาพิมพ์เป็นแบบทดสอบฉบับสมบูรณ์ จำนวน 15 ข้อ

การดำเนินการวิจัยและการเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยดำเนินการวิจัยและการเก็บรวบรวมข้อมูล โดยดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. ผู้วิจัยเตรียมความพร้อมในการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟกับนักศึกษากลุ่มทดลอง ซึ่งเป็นกลุ่มที่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนก่อนทำการสอนตามแผนการสอน เพื่อให้นักเรียนรู้จักการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟอย่างคล่องแคล่ว เป็นเวลา 2 คาบ คาบละ 50 นาที

2. ดำเนินการทดลองโดยผู้วิจัยดำเนินการสอนเอง โดยกลุ่มทดลองจะใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียน ใช้เวลาสอนกลุ่มละ 18 คาบ คาบละ 50 นาที โดยให้นักศึกษาใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในห้องเรียนและนอกห้องเรียนสำหรับทำการบ้านและตรวจคำตอบ

3. หลังจากการสอนสิ้นสุด ให้นักศึกษาทั้งสองกลุ่มทำแบบทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์และแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยไม่ให้ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

4. นำคะแนนจากการทำแบบทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์และความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์หลังทำการทดลองของนักศึกษาทั้งสองกลุ่มมาวิเคราะห์ความแตกต่างโดยใช้การทดสอบแบบที (t-test)

การวิเคราะห์ข้อมูล

ในการวิเคราะห์ข้อมูลที่ได้จากการทดลองผู้วิจัยทำการวิเคราะห์ข้อมูลด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (Statistical Package for the Social Sciences : SPSS/PC^{+}) เพื่อ

1. เปรียบเทียบมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์ระหว่างกลุ่มที่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟกับกลุ่มที่ไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนคณิตศาสตร์ โดยใช้การทดสอบแบบที (t-test)

2. เปรียบเทียบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์ระหว่างกลุ่มที่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟกับกลุ่มที่ไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนคณิตศาสตร์ โดยใช้การทดสอบแบบที (t-test)

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติพื้นฐาน

   1.1 คะแนนเฉลี่ย $(\overline{X})$

   1.2 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.)

2. สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

การทดสอบแบบที (t-test) ใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อการวิจัยทางสังคมศาสตร์ (Statistical Package for the Social Sciences: SPSS/PC^{+})

3. สถิติที่ใช้ในการหาคุณภาพของแบบทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ และแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ ใช้สูตรดังนี้

1) หาค่าความเชื่อมั่น (reliability) ของแบบทดสอบ โดยใช้สูตรของคูเดอร์ ริชาร์ดสัน สูตร 20 (Kuder Richardson – 20 : KR – 20)

สูตร KR – 20 , $r_{tt} = \frac{n}{n-1}\left\{1 - \frac{\sum pq}{s^2}\right\}$

เมื่อ r_{tt} คือ ค่าความเที่ยงของแบบทดสอบ

n คือ จำนวนข้อของแบบทดสอบ

p คือ สัดส่วนของผู้ทำถูกในข้อหนึ่ง ๆ

q คือ สัดส่วนของผู้ทำผิดในข้อหนึ่ง ๆ

s^2 คือ ความแปรปรวนของคะแนนทั้งหมด

2) หาค่าความยากง่าย (level of difficulty) และค่าอำนาจจำแนก (power of discrimination) โดยใช้สูตร

$$P = \frac{P_H + P_L}{2n}$$

$$r = \frac{P_H - P_L}{n}$$

เมื่อให้ P คือ ค่าความยากง่าย

r คือ ค่าอำนาจจำแนก

P_H คือ จำนวนนักเรียนที่ตอบถูกในกลุ่มสูง

P_L คือ จำนวนนักเรียนที่ตอบถูกในกลุ่มต่ำ

n คือ จำนวนนักเรียนในกลุ่มสูง

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลได้เสนอขั้นตอนตามลำดับ คือ สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล ลำดับขั้นในการวิเคราะห์ข้อมูล และผลการวิเคราะห์ข้อมูล

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

สัญลักษณ์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูลมีดังนี้

N แทน จำนวนนักศึกษาในกลุ่ม

$\overline{X}$ แทน คะแนนเฉลี่ย

S.D. แทน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

t แทน ค่าสถิติในการทดสอบแบบที (t-test)

ลำดับขั้นในการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลได้ดำเนินการตามลำดับดังนี้

1. หาค่าสถิติพื้นฐานโดยหาคะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟและกลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

2. เปรียบเทียบผลการทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟและกลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

3. หาค่าสถิติพื้นฐานโดยหาคะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิง-กราฟและกลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

4. เปรียบเทียบผลการทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟและกลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

1. สถิติพื้นฐาน คะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟและกลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟหลังการทดลอง ปรากฏดังตาราง 1 และผลการทดสอบแบบทีปรากฏดังตาราง 2

ตาราง 1 คะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟและกลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนหลังการทดลอง

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\overline{X}$	S.D.
กลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ	20	9.00	2.03
กลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ	20	7.10	1.59

จากตาราง 1 แสดงให้เห็นว่าคะแนนเฉลี่ยของการทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ระหว่างนักศึกษาที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟกับนักศึกษาที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนเท่ากับ 9.00 และ 7.10 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 2.03 และ 1.59 ตามลำดับ กลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟมีคะแนนเฉลี่ยสูงกว่า ขณะเดียวกันก็มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานสูงกว่าด้วย

ตาราง 2 ผลการทดสอบแบบทีเพื่อเปรียบเทียบมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟกับกลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนหลังการทดลอง

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\overline{X}$	S.D.	t
กลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ	20	9.00	2.03	
				3.302**
กลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ	20	7.10	1.59	

**$p < 0.01$

จากตาราง 2 แสดงให้เห็นว่านักศึกษาที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟมีมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์สูงกว่านักศึกษาที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

2. สถิติพื้นฐาน คะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟและกลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟหลังการทดลอง ปรากฏดังตาราง 3 และผลการทดสอบแบบทีปรากฏดังตาราง 4

ตาราง 3 คะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟกับกลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนหลังการทดลอง

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\overline{X}$	S.D.
กลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ	20	9.55	1.50
กลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ	20	7.55	3.35

จากตาราง 3 แสดงให้เห็นว่าคะแนนเฉลี่ยของการทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ระหว่างนักศึกษาที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟกับนักศึกษาที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนเท่ากับ 9.55 และ 7.55 และส่วนเบี่ยงเบน-มาตรฐานเท่ากับ 1.50 และ 3.35 ตามลำดับ กลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟมีคะแนนเฉลี่ยสูงกว่ากลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ และกลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานน้อยกว่ากลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

ตาราง 4 ผลการทดสอบแบบทีเพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟกับกลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิง-กราฟประกอบการเรียนหลังการทดลอง

กลุ่มตัวอย่าง	N	$\overline{X}$	S.D.	t
กลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ	20	9.55	1.50	
				2.437**
กลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ	20	7.55	3.35	

**$p < 0.05$

จากตาราง 4 แสดงให้เห็นว่านักศึกษาที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์สูงกว่านักศึกษาที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

บทที่ 5

บทย่อ สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้ เป็นการศึกษา ผลของการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่มีต่อมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์และความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ของนักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 โรงเรียนนครอาชีวศึกษา

บทย่อ

ความมุ่งหมายของการวิจัย

1. เพื่อเปรียบเทียบมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์ของนักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ระหว่างกลุ่มที่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟกับกลุ่มที่ไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียน

2. เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์ของนักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ระหว่างกลุ่มที่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟกับกลุ่มที่ไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียน

การดำเนินการวิจัย

การศึกษาค้นคว้าการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ดำเนินการเป็นขั้นตอนดังนี้

1. ประชากร เป็นนักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 โรงเรียนนครอาชีวศึกษา อำเภอเมือง จังหวัดนครศรีธรรมราช สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาเอกชน ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ 6

2. กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 (ปวส.1) โรงเรียนนครอาชีวศึกษา อำเภอเมือง จังหวัดนครศรีธรรมราช สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาเอกชนที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ 6 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2545 ซึ่งได้จากการสุ่มอย่างง่าย จำนวน 40 คน แบ่งเป็นกลุ่มทดลองที่สอนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ 20 คน และกลุ่มควบคุมที่สอนโดยปกติไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ 20 คน

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยเป็นผู้ดำเนินการสอนด้วยตนเอง ทั้งกลุ่มที่เรียนโดยการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนและกลุ่มที่เรียนปกติโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียน ใช้เวลาในการสอนทั้งหมด 9 สัปดาห์ ๆ ละ 2 คาบ รวม 18 คาบ คาบละ 50 นาที โดยในแต่ละกลุ่มมีแผนการสอนเป็นแนวทางในการดำเนินการทดลอง เมื่อดำเนินการสอนครบตามแผนการสอนทั้ง 18 คาบ แล้วผู้วิจัยให้นักศึกษาทั้งสองกลุ่มทำแบบทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์และแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์

3. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นแบบทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์ จำนวน 20 ข้อ ซึ่งมีค่าความเชื่อมั่นทั้งฉบับ โดยใช้สูตรของคูเดอร์ ริชาร์ดสัน (KR 20) เท่ากับ 0.77 ความยากง่ายมีค่าตั้งแต่ 0.24 - 0.61 และอำนาจจำแนกมีค่าตั้งแต่ 0.21 - 0.68 และแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์ จำนวน 15 ข้อ ซึ่งมีค่าความเชื่อมั่นทั้งฉบับ โดยใช้สูตรของคูเดอร์ ริชาร์ดสัน (KR 20) เท่ากับ 0.84 ความยากง่ายมีค่าตั้งแต่ 0.29 - 0.55 และอำนาจจำแนกมีค่าตั้งแต่ 0.21- 0.58

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. หาค่าสถิติพื้นฐานโดยหาคะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟและกลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

2. เปรียบเทียบผลการทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟและกลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

3. หาค่าสถิติพื้นฐานโดยหาคะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของการทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟและกลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

4. เปรียบเทียบผลการทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ระหว่างกลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟและกลุ่มที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

สรุปผลการวิจัย

1. นักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนมีมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์สูงกว่านักศึกษาที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01

2. นักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์สูงกว่านักศึกษาที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

อภิปรายผล

1. จากการวิจัยพบว่านักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนมีมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์สูงกว่านักศึกษาที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานที่ตั้งไว้ ทั้งนี้อาจเป็นผลมาจากวิธีการสอนที่แผนการสอนสำหรับกลุ่มทดลอง ซึ่งผู้วิจัยนำเครื่องคำนวณเชิงกราฟเข้ามาเป็นสื่อในการเรียนการสอน ซึ่งเป็นวิธีการใหม่ทำให้นักศึกษามีความสนใจ ตั้งใจและเอาใจใส่ต่อการเรียน โดยในขั้นกิจกรรมการสอนผู้วิจัยได้อธิบายเนื้อหาและยกตัวอย่างประกอบโดยการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ทำให้เห็นเป็นรูปธรรมมากกว่าการสอนแบบปกติที่สอนโดยวิธีการบรรยาย เพราะสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันได้หลายฟังก์ชันบนแกนพิกัดคู่เดียวกันทางหน้าจอเครื่องคำนวณเชิงกราฟ และยังสามารถใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟตรวจสอบคำตอบจากการคำนวณได้ ในบางคาบผู้วิจัยได้ให้นักศึกษา ศึกษาจากใบงานที่ผู้วิจัยเตรียมไว้ แล้วสรุปมโนทัศน์ในเรื่องนั้นด้วยตัวเองโดยผู้วิจัยเป็นผู้ที่คอยแนะนำช่วยเหลือ ต่อจากนั้นให้นักศึกษาออกมาแสดงความคิดเห็นหน้าชั้นเรียน ทำให้นักศึกษามีความกระตือรือร้นและสนุกสนาน ซึ่งช่วยลดความเบื่อหน่ายในการเรียน ในขณะที่กลุ่มทดลองตื่นเต้นสนใจกับวิธีการเรียนแบบใหม่จากการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ แต่นักศึกษาในกลุ่มควบคุมต้องเรียนด้วยวิธีการเรียนปกติ ทั้ง ๆ ที่บางคนสนใจและต้องการศึกษาจากการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ซึ่งอาจเป็นสาเหตุหนึ่งที่ทำให้นักศึกษาในกลุ่มควบคุมรู้สึกว่าถูกลดความสำคัญลงไป จึงเป็นผลทำให้คะแนนจากการทดสอบน้อยกว่ากลุ่มทดลอง สำหรับการวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ทำการเจาะจงเลือกโรงเรียนนครอาชีวศึกษา ซึ่งมีนักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 จำนวน 57 คน แล้วสุ่มกลุ่มตัวอย่าง ออกเป็นกลุ่มละ 20 คน จะเห็นได้ว่ากลุ่มตัวอย่างมีน้อย ทำให้สุ่มตัวอย่างออกมาแล้วนักศึกษาที่เรียนเก่งและเรียนอ่อนอาจมาอยู่กลุ่มเดียวกัน เป็นผลให้ การกระจายของคะแนนในกลุ่มทดลองมากกว่ากลุ่มควบคุมและอีกประการหนึ่งอาจเป็นผลมาจากแบบทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์ที่มีอำนาจจำแนกค่อนข้างต่ำ ผลการวิจัยครั้งนี้สอดคล้องกับงานวิจัยของ นอร์ริส (Norris. 1995 : 1862-A) ซึ่งวิจัยเกี่ยวกับ อิทธิพลของการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟสำหรับการเรียนการสอนแคลคูลัสเบื้องต้นในระดับมหาวิทยาลัย พบว่านักศึกษาที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟมีความรู้เชิงมโนทัศน์เกี่ยวกับฟังก์ชันสูงกว่านักศึกษา

ที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ และสอดคล้องกับงานวิจัยของ คาร์เทอร์ (Carter. 1995 : 3869-A) ซึ่งทำวิจัยเกี่ยวกับความสามารถในการมองเห็นภาพนำไปสู่ความเข้าใจในมโนทัศน์ของฟังก์ชัน โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ พบว่านักศึกษาที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟมีพัฒนาการในเรื่องฟังก์ชันสูงกว่านักศึกษาที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ และสอดคล้องกับงานวิจัยของ ณัชชา กมล (2542 : 46-73) ซึ่งวิจัยเกี่ยวกับ ผลของการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟที่มีต่อมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์และความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตสังกัดทบวงมหาวิทยาลัย พบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่เรียนโดยการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนมีมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์และความสามารถด้านมิติสัมพันธ์สูงกว่านักเรียนที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

2. จากการวิจัยพบว่า นักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์สูงกว่านักศึกษาที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 ซึ่งเป็นไปตามสมมติฐานที่ตั้งไว้ ทั้งนี้อาจเป็นผลมาจากการที่นักศึกษาในกลุ่มที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟเสียเวลาในการคิดคำนวณน้อยลง ทำให้มีเวลาในการเรียนเนื้อหาเกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์มากขึ้น ได้มีโอกาสฝึกฝนและปฏิบัติ ในการแก้โจทย์ปัญหาการประยุกต์ได้มากกว่า และยังสามารถตรวจสอบคำตอบได้ด้วยตนเอง การสอนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟยังทำให้ผู้สอนมีเวลามากพอที่จะช่วยเหลือนักศึกษาที่เรียนอ่อนได้ตัวต่อตัว ซึ่งต่างจากกลุ่มควบคุมที่ต้องเสียเวลาในการคิดคำนวณโดยใช้กระดาษและปากกาทำให้เสียเวลาในการเรียนเนื้อหาเกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์ ซึ่งบางครั้งคำนวณมาแล้วอาจผิดพลาดได้และไม่ได้ตรวจสอบคำตอบ ประการที่สองเนื่องจากการเรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ทำให้นักศึกษาสามารถเขียนกราฟได้ถูกต้องและรวดเร็วขึ้นทำให้มีเวลาเพียงพอสำหรับการเรียนรู้โจทย์ปัญหาการประยุกต์ใหม่ ๆ ซึ่งสอดคล้องกับ สมพล เล็กสกุล (2525 : 66-67) ที่กล่าวไว้ว่า เครื่องคำนวณเป็นเครื่องมือในการคิดคำนวณแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ที่ยุ่งยากและสลับซับซ้อนได้อย่างถูกต้องและรวดเร็ว และสอดคล้องกับ เวทส์ และ ดิมานา (Waits and Demana. 2000 : 54-55) ที่กล่าวไว้ว่า เครื่องคำนวณเชิงกราฟสามารถหาค่าปริพันธ์และแก้ปัญหาที่สลับซับซ้อนที่ไม่สามารถแก้ด้วยกระดาษและปากกาได้

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะทั่วไป

1. จากผลการทดลองพบว่าการสอนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟทำให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้ดีกว่าการสอนโดยวิธีการสอนปกติ ดังนั้นจึงควรที่จะส่งเสริมให้มีการสร้างและใช้แผนการสอนที่สอนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟให้แพร่หลายยิ่งขึ้น

2. ควรที่จะมีหน่วยงานเฉพาะเพื่อทำหน้าที่เผยแพร่ความรู้ทางวิชาการเกี่ยวกับเครื่องคำนวณเชิงกราฟและวิจัยเกี่ยวกับการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในการเรียนการสอน ตลอดจนทำหน้าที่สนับสนุนส่งเสริมให้มีการนำเอาเครื่องคำนวณเชิงกราฟไปใช้ประกอบในการเรียนการสอน

3. การสร้างบทเรียนที่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในการเรียนการสอน เป็นงานที่มี ขบวนการซับซ้อน ผู้สร้างจะต้องเป็นผู้ที่มีความรู้ ความชำนาญและเชี่ยวชาญในแขนงวิชาที่จะสร้าง รู้หลักการเขียนและจะต้องเป็นผู้ที่เข้าใจจิตวิทยาการศึกษา ดังนั้นสถานศึกษาจึงควรจะมีหน่วยงานเพื่อสร้างแผนการเรียนที่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียน

4. ควรจัดให้มีการฝึกอบรมการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟให้แก่ครูผู้สอนเพื่อเป็นการกระตุ้นให้ครูผู้สอนได้พัฒนากระบวนการเรียนการสอนหลาย ๆ รูปแบบ

5. ครูผู้สอนคณิตศาสตร์ควรเลือกเนื้อหาและกิจกรรมการเรียนการสอนให้เหมาะสมกับเครื่องคำนวณเชิงกราฟเพื่อที่นักเรียนจะได้รับประโยชน์สูงสุดจากการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

ข้อเสนอแนะเพื่อการวิจัยต่อไป

1. ควรศึกษาถึงองค์ประกอบต่าง ๆ ที่จะช่วยให้การเรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟเป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ เช่นเทคนิคในการเสนอความรู้ ลักษณะวิชา ระยะเวลาที่ใช้ในการเรียนแต่ละครั้ง และบทบาทของครูในขณะใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ

2. ควรศึกษาเปรียบเทียบทัศนคติของผู้เรียนที่มีต่อการเรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟกับการเรียนด้วยวิธีการสอนแบบอื่น ๆ

3. ควรมีการวิจัย เกี่ยวกับการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ในลักษณะเดียวกันนี้กับเนื้อหาอื่นและระดับชั้นอื่น ให้กว้างขวางขึ้น เพื่อดูว่าเนื้อหาในเรื่องใดบ้างที่ใช้การสอนด้วยเครื่องคำนวณเชิงกราฟแล้วได้ผลดีกว่าการเรียนการสอนแบบปกติ

4. ควรปรับปรุงแผนการสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นแล้วนำไปทดลองกับกลุ่มตัวอย่างในสถาบันการศึกษาของรัฐบาล เช่นในวิทยาลัยเทคนิคเพื่อให้ได้แผนการสอนที่มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

กมล เอกไทยเจริญ. <u>แคลคูลัส 2 และเทคนิคการใช้ Graphing Calculator.</u> กรุงเทพมหานคร : ธีรพลการพิมพ์, 2537

จริยา เหนียนเฉลย. <u>เทคโนโลยีการศึกษา.</u> กรุงเทพมหานคร : ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ, ม.ป.ป.

จรูญ จียโชค. "โจทย์ปัญหา : สัมฤทธิ์ผลและขั้นตอนการสอน," <u>สารพัฒนาหลักสูตร.</u> (17) : 9-19 ; กุมภาพันธ์ 2531

เฉลิมศรี ชำนิ และสารภี ไชยรัตน์. <u>เอกสารประกอบการเรียน วิชา คณ 111 แคลคูลัส 1.</u> ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ, ม.ป.ป. อัดสำเนา

ณัชชา กมล. <u>ผลของการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟฟิกที่มีต่อมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์และความสามารถด้านมิติสัมพันธ์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสาธิตสังกัดทบวงมหาวิทยาลัย.</u> ปริญญาครุศาสตร์มหาบัณฑิต. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.

นวลจิตต์ เชาวกีรติพงศ์. "ความคิดรวบยอดกับการเรียนการสอน," <u>สารพัฒนาหลักสูตร.</u> 14(119) : 55-60 ; ตุลาคม-ธันวาคม 2538.

นวลน้อย เจริญผล. "ยุทธศาสตร์สำหรับการแก้โจทย์ปัญหา," <u>วารสารคณิตศาสตร์.</u> 42(482) : 37-47 ; ธันวาคม 2541.

น้อมศรี เคท. <u>เรื่องน่ารู้สำหรับครูคณิตศาสตร์.</u> พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัทโรงพิมพ์ไทยวัฒนาพาณิช จำกัด, 2536.

นิพนธ์ จิตต์ภักดี. "การสอนโจทย์ปัญหา," <u>ประชากรศึกษา.</u> 26(2) : 7-10 ; กันยายน 2517.

บัญญัติ ทองคำ. <u>อิทธิพลของเครื่องคิดเลขที่มีต่อผลสัมฤทธิ์และทัศนคติทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องการจัดลำดับและการจัดหมู่ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 (ม.ศ.5) โรงเรียนรัตนบุรี จังหวัดสุรินทร์.</u> ปริญญาศิลปศาสตร์มหาบัณฑิต. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2526.

ปรีชา เนาว์เย็นผล. <u>การพัฒนาทักษะการคิดคำนวณของนักเรียนระดับประถมศึกษา.</u> กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์วิทยาลัย, 2537.

พงษ์ทิพย์ นวนิล. <u>การศึกษาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาการบวก การลบ และความสนใจในการเรียนรู้ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการสอนโดยใช้แบบเรียนเล่มเล็กเชิงวรรณกรรม.</u> ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรี-นครินทรวิโรฒประสานมิตร, 2543.

พนัส หันนาคินทร์ และพิทักษ์ รักษพลเดช. <u>วิธีสอนคณิตศาสตร์.</u> กรุงเทพฯ : องค์การค้าคุรุสภา, ม.ป.ป.

พรนภา ไพโรจน์ภักดี. <u>ความสัมพันธ์ระหว่างทักษะทางคณิตศาสตร์กับผลสำเร็จในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับประกาศนียบัตร.</u> ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต. สงขลา : มหาวิทยาลัยทักษิณ, 2542.

พรรณทิพย์ ม้ามณี. <u>การสอนคณิตศาสตร์แนวใหม่ระดับมัธยมศึกษา.</u> กรุงเทพฯ : สารศึกษาการพิมพ์, 2520.

พินิจ ศรีจันทร์ดี. <u>การสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา.</u> กรุงเทพมหานคร : บริษัท รุ่งศิลป์การพิมพ์ (1977) จำกัด, 2530.

เพลินพิศ เสือชาวนา. <u>ความสัมพันธ์ระหว่างทักษะการวิเคราะห์ปัญหา การแปลภาษาโจทย์ การคิดคำนวณกับความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6.</u> วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตร์มหาบัณฑิต. ปัตตานี : มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์, 2541.

ไพบูลย์ จันทยศ. “ปัญหาของโจทย์ปัญหา,” <u>สารพัฒนาหลักสูตร.</u> 16 : 70 – 75 ; มกราคม 2526.

มาลินี จุฑะรพ. <u>จิตวิทยาการเรียนการสอน.</u> กรุงเทพฯ : บริษัท อักษรพิพัฒน์ จำกัด, 2541.

เมธี ลิมอักษร. <u>แนวคิดในการสอนคณิตศาสตร์.</u> สงขลา : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ สงขลา, 2520.

ยุพิน พิพิธกุล. <u>การเรียนการสอนคณิตศาสตร์.</u> กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์บพิธการพิมพ์, 2539.

ราชบัณฑิตยสถาน. <u>ศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน.</u> พิมพ์ครั้งที่ 7. กรุงเทพฯ : มหาจุฬาลงกรณราชวิทยาลัย, 2540.

วัฒนพร ระงับทุกข์. <u>แผนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง.</u> พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : บริษัทแอล ที เพรส จำกัด, 2542.

วิจิตรา ครุวรรณพัฒน์. <u>เอกสารประกอบการเรียน วิชา คณ 111 แคลคูลัส 1.</u> ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ, ม.ป.ป. อัดสำเนา

วิชัย ทิพณีย์ และรัชเมธี รัชนิพันธ์. <u>แบบฝึกหัดและเทคนิคการแก้ปัญหาโจทย์แคลคูลัส.</u> กรุงเทพฯ : บริษัททีพี พริ้นท์จำกัด, 2538.

วิชัย วงษ์ใหญ่. “การเรียนการสอนความคิดรวบยอดและหลักการ,” <u>การวิจัยทางการศึกษา.</u> 19(3) : 18-32 ; กรกฎาคม-กันยายน 2532.

วิชัย สนทอง. <u>ผลของการใช้เครื่องคิดเลขในการเรียนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน และในการทำการ</u>

บ้าน ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6. ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2526.

วิไลวรรณ ตรีศรี ชะนะมา. "แนวคิดบางประการเกี่ยวกับความคิดรวบยอด," สารพัฒนาหลักสูตร. 13(117) : 49-51 ; เมษายน-มิถุนายน 2537.

วิโรจน์ คำนึงคุณากร. คณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หมวดวิชาพื้นฐาน ปวส. กรมอาชีวศึกษา. กรุงเทพฯ : ประสานมิตร, 2542

ศรีสุรางค์ ทีนะกุล. อิทธิพลของเครื่องคิดเลขที่มีต่อผลสัมฤทธิ์และทัศนคติทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนสตรีราชินูทิศ อุดรธานี. ปริญญาศิลปศาสตร์มหาบัณฑิต. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, 2526.

ศูนย์ปฏิบัติการปฏิรูปการศึกษา, กระทรวงศึกษาธิการ. รายงานความเจริญก้าวหน้าการปฏิรูปการศึกษา ในรอบ 16 เดือน. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์การศาสนา, 2544.

สมเดช บุญประจักษ์. การแก้ปัญหา. กรุงเทพฯ : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีสถาบันราชภัฏพระนคร, 2543.

สมนึก ภัททิยธนี. การวัดผลการศึกษา. กาฬสินธุ์ : ประสานการพิมพ์, 2541

________"การสอนให้เกิด concept และการเขียนข้อสอบวัด concept," การวัดผลการศึกษา. 6(7) : 38-46 ; กรกฎาคม 2543.

สมพล เล็กสกุล. "บทบาทของเครื่องคำนวณขนาดเล็กในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียน," วารสารมศว.ปทุมวัน 7(2) : 88-89 ; กุมภาพันธ์ 2525.

สมมาต บรรจงรัตน์. การพัฒนาการเรียนการสอนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ช่างอุตสาหกรรมในระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพ โดยใช้การวิจัยเชิงปฏิบัติการ. ปริญญาการศึกษาดุษฎีบัณฑิต. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2540.

สมศักดิ์ โสภณพินิจ. "ยุทธวิธีการแก้ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์กับการสอน," วิทยาศาสตร์บูรพา. 2(2) : 61 – 72 ; กรกฎาคม – ธันวาคม 2537.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. คณิตศาสตร์ที่ใช้เครื่องคิดเลข. กรุงเทพฯ : บริษัท คอมม่า ดีไซน์แอนพริ้น จำกัด, 2544

สิริพร ทิพย์คง. " การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ให้สอดคล้องกับพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542, " ศึกษาศาสตร์ปริทัศน์. 16(3) : 7 กันยายน-ธันวาคม 2544.

สุนิเทศน์ ไชยกุล. การสร้างชุดการสอนที่มีประสิทธิภาพ วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องโจทย์ปัญหาการคูณและการหารเศษส่วน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ตามหลักสูตรประถมศึกษา พุทธศักราช

2521 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2533). ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต. มหาสารคาม : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ มหาสารคาม, 2538.

สุพิศา แก้วสุวรรณ. การเปรียบเทียบกระบวนการคิดแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์ของนักเรียนช่างอุตสาหกรรม ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพ ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์แตกต่างกัน. ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2527.

สุรศักดิ์ ปาเฮ. "ผู้บริหารกับการสร้างคุณภาพโรงเรียนสู่ความเป็นเลิศ," วิชาการ. 3(10) : 6 ; ตุลาคม 2543.

สุรางค์ โค้วตระกูล. จิตวิทยาการศึกษา. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2537.

โสภาพรรณ ศิริรัตน์. การเปรียบเทียบความเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ห้า ที่มีแบบการคิดต่างกัน. ปริญญาครุศาสตร์มหาบัณฑิต. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2527.

อารยา กุลานุช. ผลของการใช้เครื่องคิดเลขในการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องการวิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5. ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต. กรุงเทพฯ : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร, 2526.

อำนวย เดชชัยศรี. ศูนย์สื่อการศึกษา. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์, 2542.

อุบลรัตน์ แซ่ด่าน ผลของทักษะทางคณิตศาสตร์ที่มีอิทธิพลต่อความสำเร็จในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ของสำนักงานการประถมศึกษาจังหวัดปัตตานี. วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตร์มหาบัณฑิต. ปัตตานี : มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์, 2538.

Adams, Sam. Ellis, Leslie. and Beeson, B. F. Teaching Mathematics. New York : Harper & Row, Publishers., 1977.

Arends, Richard. Learning to Teach. New York : Random House, Inc., 1988.

Barton, Susan Dale. "Graphing Calculators in College Calculus : An Examination of Teacher′conceptions and Instructional Practice," Dissertation Abstracts International 56(10) : 3868-A ; April, 1996.

Bitter, Gary G. and Hatfield Mary M. "Implementing Calculators in Middle School Mathematics : Impact on Teaching and Learning," Calculators in Middle School Education. Virginia : The National Council of Teachers of Mathemetics, Inc., 1993.

Carter, Harry Hoke. "A Visual Approach to Understanding the Function Concept Using Graphing Calculators," Dissertation Abstracts International. 56(10) : 3869-A ;

Aprill, 1996.

Dimiceli, Vincent E. "Business Calculus Students ′use of the Graphing Calculator," Dissertation Abstracts International. 61-01A ; 1999.

Fuys, David J. and Tischler, Rosamond Welchman. Teaching Mathematics in the Elementary School. United States of America : 1979.

Gary L. Musser, William F. Burger and Blake E. Peterson. Mathematics For Elementary Teachers. Fifth Edition. New York : R.R. Donnelley & Sons, Inc., 2001.

Gunter, Mary Alice. Estes, Thomas H. and Schwab, Jan. Instruction A Models Approach. United States of America : A Simon & Schuster company, 1995.

Johnson, Donovan A. Guidelines for Teaching Mathematics. California : Wadsworth Publishing Company, Inc., 1972.

Krakowki, Rebecca Jo. "The Effect of Graphics Calculator Use on Precalculus Students′ understanding of Polynomial, Rational, and Exponential Functions," Dissertation Abstracts International. 61-03A ; 2000.

Krulik, Stephen and Rudnick, Jesse A. "Teaching Problem Solving to Preservice Teachers," Arithmatic Teacher. 29(6) : February, 1982.

Kutzler, Bernhard. "The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics," The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 2000. 7(1) : 2000.

Lasley, Sidney J. The New Applied Mathematics. 6th ed. United States of America : Prentice – hall, Inc., 1964.

Lemlech, Johanna Kasin. Curriculum and Instructional Methods for the Elementary School. New York : Macmillan Publishing Company, 1984.

Morris, Janet Parker. "Problem Solving with Calculators" Activities for Junior High School and Middle School Mathematics. Virginia : The National Council of Teachers of Mathemetics, Inc., 1999.

Norris, Carl Wallace. "The Impact of using Graphic Calculators as Aid for the Teaching and Learning of Precalculus in a University Setting," Dissertation Abstracts International 55(7) : 1826-A ; January, 1995.

Pomerantz, Heidi. The Role of Calculators in Math Education. Rice University, 1997.

Polya, G. How To Solve It. New York : Doubleday & Company, Inc., 1957.

Seavertson, Penelope. "Comparing the use of the Graphics Calculator and Scientific Calculator in College Algebra," Dissertation Abstracts International. 56(11) : 4309-A ; May, 1996.

Serhan, Derar. "The Effect of using Graphing Calculations on Students′concept Images of the Derivative at a point," Dissertation Abstracts International. 61-10A ; 2000.

The National Council of Teachers of Mathemetics. "Straight Talk about Issues in Mathematics Education," www.nctm.org/news/speaksout/spksoutcal.pdf : 2001.

Trouche, Luc. "New Technological Environments : New Constraints, New Opportunities for the Teacher," The International Journal of Algebra in Mathematics Education, 2000. 7(3) : 2000.

Waits, Bert K. and Demana, Franklin. "Calculators in Mathematics Teaching and Learning Past, Present, and Future," Learning Mathematics For a New Century. Virginia : The National Council of Teachers of Mathemetics, Inc., 2000.

Wheeler, Ruric. et.al. College Mathematics : A Graphing Calculator Approach. New York : John Wiley & Sons, Inc. ,United States of America, 1996.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

แผนการสอน

คณิตศาสตร์ 6 รหัส 3000-1506

คำอธิบายรายวิชา

ศึกษาเกี่ยวกับ ลำดับและอนุกรม ชนิดของลำดับ ลิมิตของลำดับ อนุกรมและอนุกรมอนันต์ สูตรการหาค่าอนุพันธ์ฟังก์ชันพีชคณิต ฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันชี้กำลังและลอการิทึม การหาค่าอนุพันธ์อันดับสูง สมการเชิงอนุพันธ์ และการประยุกต์อนุพันธ์ สูตรและการหาค่าอินทิกรัลฟังก์ชันพีชคณิต ฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันชี้กำลังและลอการิทึม เทคนิคการอินทิกรัล อินทิกรัลจำกัดเขต และการประยุกต์การหาพื้นที่ อินทิกรัล 2 ชั้น การหาปริมาตรของทรงตัน

จุดประสงค์รายวิชา

เพื่อให้มีความรู้และสามารถนำลำดับและอนุกรม อนุพันธ์ อินทิกรัล การประยุกต์แบบต่าง ๆ ของอนุพันธ์ และอินทิกรัล ไปใช้ในสาขาวิชาช่างไฟฟ้า ช่างอิเล็กทรอนิกส์ และสาขาวิชาอื่นที่เกี่ยวข้อง

หมายเหตุ ในการทำวิจัยครั้งนี้จะใช้คำว่า "ปริพันธ์" แทนคำว่า "อินทิกรัล" ตามศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พุทธศักราช 2540

การแบ่งคาบการเรียนการสอน

สัปดาห์ที่	คาบที่	ชื่อเรื่อง	จำนวนคาบรวม
1	1-2	ปริพันธ์	2
2	3-4	ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน	2
3	5-6	ปริพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลังและลอการิทึม	2
4	7-8	เทคนิคการหาปริพันธ์	2
5	9-10	เทคนิคการหาปริพันธ์ (ต่อ)	2
6	11-12	เทคนิคการหาปริพันธ์ (ต่อ)	2
7	13-14	ปริพันธ์จำกัดเขตและการประยุกต์	2
8	15-16	ปริพันธ์สองชั้น	2
9	17-18	การหาปริมาตรของรูปทรงตัน	2

แผนการสอนคาบ 1-2
ปริพันธ์

สาระสำคัญ

1. ปริพันธ์ คือการกระทำผกผันกับการหาค่าอนุพันธ์ ถ้าอนุพันธ์ของ F(x) คือ f(x) ปริพันธ์คือ

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$$

2. เครื่องหมายที่ใช้ในการหาปริพันธ์ เรียกว่าเครื่องหมาย อินทิกรัล สัญลักษณ์ที่ใช้ คือ $\int$ และ c คือค่าคงตัวในการหาปริพันธ์ของ f(x) จะเขียนแทนด้วย

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c$$

3. การหาปริพันธ์เป็นความรู้พื้นฐานที่สามารถนำไปประยุกต์หาพื้นที่ใต้เส้นโค้งได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ

1. อธิบายความหมายของปริพันธ์ได้
2. เขียนสูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตได้
3. แสดงวิธีการหาปริพันธ์ตามที่โจทย์กำหนดได้
4. บอกความสัมพันธ์ระหว่างการหาอนุพันธ์และปริพันธ์ได้

เนื้อหา

ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

ปฏิยานุพันธ์เป็นการกระบวนการกลับกันของอนุพันธ์ กล่าวคือการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ เราต้องทราบฟังก์ชันที่ต้องการหาอนุพันธ์ ตัวอย่างเช่น กำหนด $y = x^4$ ต้องการหาอนุพันธ์ของ $y = f(x)$ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^4)}{dx} = 4x^3 \text{ เป็นต้น}$$

ในทางกลับกัน เรากำหนด $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ให้ แล้วเราต้องการหาฟังก์ชัน $y = F(x)$ ที่สอดคล้องกับสมการข้างต้น นั่นคือ $\frac{d}{dx}\left[F(x)\right] = f(x)$ เช่น กำหนดให้ $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ ต้องการหาฟังก์ชัน

$y = F(x)$ ที่ $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ กระบวนการหาคำตอบนี้เรียกว่า การหาปริพันธ์ (Integration) และคำตอบนี้เรียกว่า ปริพันธ์ ของ $3x^2$ เทียบกับ x เขียนแทนด้วย $\int 3x^2\,dx$ ซึ่ง $\int 3x^2\,dx = x^3$ หรือถ้า $\frac{d}{dx}(x^3+3) = 3x^2$ แล้ว $\int 3x^2\,dx = x^3 + 3$ เป็นต้น

บทนิยาม ถ้า F(x) คือฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ (Derivative) $F'(x) = f(x)$ แล้ว เราเรียก F(x) ว่าเป็น **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต** ของฟังก์ชัน f(x) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int f(x)\,dx$

จากความรู้เรื่องอนุพันธ์ เราทราบว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชันคงที่ใด ๆ มีค่าเท่ากับ ศูนย์เสมอ ดังนั้นถ้า F(x) เป็นปริพันธ์ไม่จำกัดเขตของฟังก์ชัน f(x) แล้ว สำหรับค่าคงที่ c ใด ๆ $f(x) = x^3 + c$ จะเป็นปริพันธ์ไม่จำกัดเขต ของฟังก์ชัน $f(x) = 3x^2$ ด้วย

นั่นคือ $\int f(x)\,dx = F(x) + c$

จะเห็นได้ว่าการหาปริพันธ์และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันมีความสัมพันธ์กันอย่างมาก เราสามารถตรวจสอบค่า ปริพันธ์ โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันผลลัพธ์แล้วจะได้ค่าปริพันธ์

นั่นคือ $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ ก็ต่อเมื่อ $F'(x) = f(x)$

สูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

ให้ f, g และ u เป็นฟังก์ชันของ x ที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ และให้ c และ k เป็นค่าคงตัว จะได้

1. $\int dx = x + c$
2. $\int k\,dx = kx + c$
3. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$
4. $\int k f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
5. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
6. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\int (5x^4 + 4x^3 - 8x)\,dx$

วิธีทำ

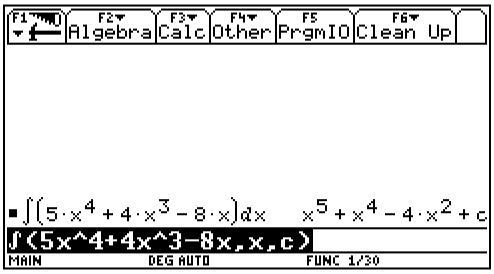
$$\begin{aligned}\int (5x^4 + 4x^3 - 8x)\,dx &= 5\int x^4\,dx + 4\int x^3\,dx - 8\int x\,dx \\ &= 5\frac{x^5}{5} + 4\frac{x^4}{4} - 8\frac{x^2}{2} + c \\ &= x^5 + x^4 - 4x^2 + c\end{aligned}$$

#

เราสามารถใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92 คำนวณหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตได้ โดยมีลำดับขั้นตอนดังนี้

เรียกคำสั่ง ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต โดยการกด ♥หรือ 2< แล้วพิมพ์ฟังก์ชัน f(x) คั่นด้วยจุลภาค พิมพ์ตัวแปร (x) คั่นด้วยจุลภาค พิมพ์ c ปิดวงเล็บ แล้วกด ÷ จะได้ผลปริพันธ์ไม่จำกัดเขตที่ต้องการ

รูปแบบ : $\int(f(x), x, c)$



ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\int(5x+4)^2\,dx$

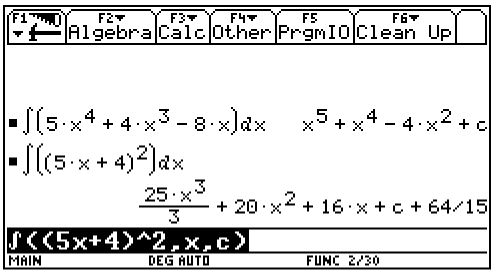
วิธีทำ ให้ $u = (5x+4)$

$$\frac{du}{dx} = 5\ ,\ du = 5\,dx$$

$$dx = \frac{du}{5}$$

$$\begin{aligned}\int(5x+4)^2\,dx &= \int u^2\frac{du}{5}\\ &= \frac{1}{5}\int u^2\,du\\ &= \frac{1}{5}\cdot\frac{u^3}{3}+c\\ &= \frac{u^3}{15}+c = \frac{(5x+4)^3}{15}+c\end{aligned}$$ #

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\int \frac{4x}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sqrt{x^2+2} = (x^2+2)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(x^2+2)^{-\frac{1}{2}}\,d(x^2+2)$$

$$du = \frac{1}{2}(2x)(x^2+2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+2)^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$\therefore\ x\,dx = (x^2+2)^{\frac{1}{2}}\,du$$

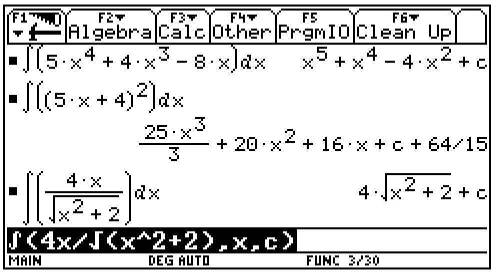
$$= u\,du$$

$$\int \frac{4x}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \int \frac{4u}{u}\,du$$

$$= 4\int du = 4u + c$$

$$= 4\sqrt{x^2+2} + c \qquad \#$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



สื่อการเรียนการสอน

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. ใบงาน T1 2. เครื่องคำนวณเชิงกราฟ 3. แผ่นใส	1. ใบงาน C1 2. แผ่นใส

กิจกรรมการเรียนการสอน

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
ขั้นนำ ครูบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ แล้วทบทวนเนื้อหาเรื่องอนุพันธ์ **ขั้นสอน** 1. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน T1 ข้อ1 แล้วช่วยกันสรุป 2. ครูอธิบายนิยามของปริพันธ์ 3. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน T1 ข้อ2 แล้วช่วยกันสรุป 4. ครูเขียนสูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต พร้อมทั้ง ยกตัวอย่างประกอบการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต 3-4 ตัวอย่าง โดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส และแสดงการคำนวณโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ทั้ง 2 วิธี 5. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน T1 ข้อ3 และ 4 โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟตรวจคำตอบ แล้วสุ่มนักเรียน 3 คน มาเสนอผลงานที่หน้าชั้นเรียน 6. ครูให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด จากแบบเรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 112-113 โดยแสดงวิธีทำลงสมุด แล้วใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟตรวจสอบคำตอบ **ขั้นสรุป** ครูและนักศึกษาช่วยกันสรุปความสัมพันธ์ระหว่างการหาอนุพันธ์และปริพันธ์ และสูตรปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตอีกครั้ง	**ขั้นนำ** ครูบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ แล้วทบทวนเนื้อหาเรื่องอนุพันธ์ **ขั้นสอน** 1. ครูอธิบายนิยามของปริพันธ์ 2. ครูเขียนสูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต พร้อมทั้ง ยกตัวอย่างประกอบการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต 3-4 ตัวอย่าง โดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส 3. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน C1 แล้วสุ่มนักเรียน 3 คน เสนอผลงานที่หน้าชั้นเรียน 4. ครูให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด จากแบบเรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 112-113 ลงสมุด **ขั้นสรุป** ครูและนักศึกษาช่วยกันสรุปความสัมพันธ์ระหว่างการหาอนุพันธ์และปริพันธ์ และสูตรปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตอีกครั้ง

การวัดและประเมินผล

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักศึกษา 2. สังเกตจากการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในการทำใบงานและตอบคำถามในใบงาน 3. การทำงานที่ได้รับมอบหมาย 4. สังเกตจากการนำเสนอผลงานหน้าชั้น 5. การทำแบบฝึกหัด จากแบบเรียน คณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 112-113	1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักศึกษา 2. สังเกตจากการการทำใบงานและตอบคำถามในใบงาน 3. การทำงานที่ได้รับมอบหมาย 4. สังเกตจากการนำเสนอผลงานหน้าชั้น 5. การทำแบบฝึกหัด จากแบบเรียน คณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 112-113

ใบงาน T1

1. ให้นักศึกษาใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟหาค่าต่อไปนี้

f(x)	$\frac{d}{dx}f(x)$	F(x)	$\int F(x)\,dx$
x^2		$2x$	
$5x^4$		$20x^3$	
$\sqrt[3]{x}$		$\frac{1}{3x^{2/3}}$	
$\frac{3}{2}x^4+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{x}$		$6x^3+4\sqrt{x}-\frac{3}{x^2}$	
$\frac{2}{3}(x^2+3)^{\frac{3}{2}}$		$2x\sqrt{x^2+3}$	
$\cos x$		$-\sin x$	
$\frac{1}{x}$		$-\frac{1}{x^2}$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$		$-\frac{x}{(x^2-1)^{3/2}}$	
$-\frac{\cos^4 x}{4}$		$\sin x\cos^3 x$	

หมายเหตุ

- $\frac{d}{dx}f(x)$ รูปแบบของการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ $d(f(x),x)$
- $\int F(x)\,dx$ รูปแบบของการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ $\int(F(x),x)$

จากตารางข้างบนนักศึกษาสามารถสรุปความสัมพันธ์ได้อย่างไร

....

....

....

....

....

2. ให้นักศึกษาใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟหาค่าต่อไปนี้

f(x)	$\int f(x)dx$
1	…………………………………………………
2	…………………………………………………
20	…………………………………………………
-30	…………………………………………………
x	…………………………………………………
x^2	…………………………………………………
x^6	…………………………………………………
x^{-20}	…………………………………………………
$x + x^2 + x^3$	…………………………………………………
$2x + 3x^2 - 5x^4$	…………………………………………………
$x^3 - 4x^5$	…………………………………………………
$(2x+3)$	…………………………………………………
$(2x+3)^2$	…………………………………………………
$(2x+3)^4$	…………………………………………………
$(2x+3)^{10}$	…………………………………………………
$(2x+3)^{-5}$	…………………………………………………
$(6x-4)^5$	…………………………………………………

3. ให้นักศึกษาหาค่าต่อไปนี้ โดยการคำนวณแล้วใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในการตรวจสอบคำตอบ

f(x)	$\int f(x)dx$
10	…………………………………………………
-30	…………………………………………………
x^4	…………………………………………………
x^7	…………………………………………………

x^{-10}	…………………………………………………
(3x+6)	…………………………………………………
$(4x+6)^2$	…………………………………………………
$(20x-3)^5$	…………………………………………………
$x^3 + 5x^2 + 6x + 5$	…………………………………………………
$4x^3 – 5x - 4$	…………………………………………………

4. ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาปริพันธ์ต่อไปนี้

4.1 $\int (3x^4 - 5x + 6)\,dx$

วิธีทำ $\int (3x^4 - 5x + 6)\,dx$ = ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= …………………………………… #

4.2 $\int (6x-3)^5\,dx$

วิธีทำ $\int (6x-3)^5\,dx$ = ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= …………………………………… #

4.3 $\int \sqrt{(8x-4)}\,dx$

วิธีทำ $\int \sqrt{(8x-4)}\,dx$ = ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= …………………………………… #

ใบงาน C1

1. ให้นักศึกษาหาค่าต่อไปนี้

f(x)	$\int f(x)dx$
10	………………………………………………
-30	………………………………………………
x^4	………………………………………………
x^7	………………………………………………
x^{-10}	………………………………………………
(3x+6)	………………………………………………
$(4x+6)^2$	………………………………………………
$(20x-3)^5$	………………………………………………
$x^3 + 5x^2 + 6x + 5$	………………………………………………
$4x^3 - 5x - 4$	………………………………………………

2. ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาปริพันธ์ต่อไปนี้

2.1 $\int (3x^4 - 5x + 6)\,dx$

วิธีทำ $\int (3x^4 - 5x + 6)\,dx$ = ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= …………………………………… #

2.2 $\int (6x-3)^5\,dx$

วิธีทำ $\int (6x-3)^5\,dx$ = ……………………………………

= ……………………………………

= …………………………………… #

2.3 $\int \sqrt{(8x-4)}\,dx$

วิธีทำ $\int \sqrt{(8x-4)}\,dx$ = ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= …………………………………… #

แผนการสอนคาบ 3-4
การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

สาระสำคัญ

1. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิตินั้น ต้องมีความรู้พื้นฐานทางด้านตรีโกณมิติมาช่วยในการแก้ปัญหา เพราะต้องอาศัยคุณสมบัติ เอกลักษณ์ ทางตรีโกณมิติ
2. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติทำได้โดยการแทนค่าลงในสูตร และต้องกำหนดให้ u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ c เป็นค่าคงตัวใดๆ
3. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันใช้วิธีการแทนค่าลงในสูตร ซึ่งสูตรที่ใช้จะแตกต่างจากการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ

1. เขียนสูตรพื้นฐานของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้
2. เขียนสูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้
3. แสดงวิธีการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้สูตรได้
4. เขียนสูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันได้
5. แสดงวิธีการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันโดยใช้สูตรได้
6. นำความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้กับเนื้อหาที่เกี่ยวข้องได้

เนื้อหา

ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติทำได้โดยใช้สูตรต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

สูตรปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ให้ u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

1. $\int \sin u\, du = -\cos u + c$
2. $\int \cos u\, du = \sin u + c$
3. $\int \sec^2 u\, du = \tan u + c$
4. $\int \operatorname{cosec}^2 u\, du = -\cot u + c$

5. $\int \sec u\, du \quad = \quad \ln|\sec u + \tan u| + c$

6. $\int \operatorname{cosec} u\, du \quad = \quad \ln|\cos u - \cot u| + c$

7. $\int \sec u \tan u\, du \quad = \quad \sec u + c$

8. $\int \operatorname{cosec} u \cot u\, du \quad = \quad -\operatorname{cosec} u + c$

9. $\int \tan u\, du \quad = \quad \ln|\sec u| + c$

10. $\int \cot u\, du \quad = \quad \ln|\sin u| + c$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\int \sin 3x\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x$

$$du = 3dx$$

$$dx = \frac{du}{3}$$

$$\int \sin 3x\, dx = \int \sin u \frac{du}{3}$$

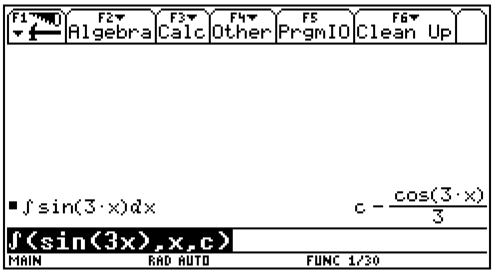
$$= \frac{1}{3}\int \sin u\, du$$

$$= \frac{1}{3}(-\cos u) + c$$

$$= -\frac{\cos 3x}{3} + c$$

#

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\int 2x\cos(x^2+5)\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2+5$

$$du = 2x\, dx$$

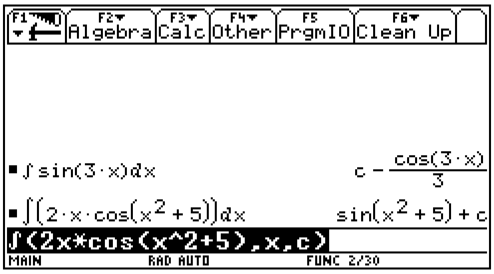
$$\int 2x\cos(x^2+5)\, dx = \int \cos(x^2+5)(2x)\, dx$$

$$= \int \cos u\, du$$

$$= \sin u + c = \sin(x^2+5) + c$$

#

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\int (3\sin x - 5\cos x)\,dx$

วิธีทำ $\int (3\sin x - 5\cos x)\,dx$

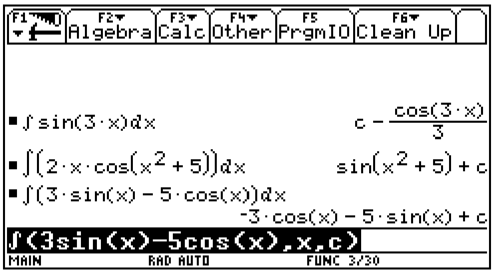
$$= \int 3\sin x\,dx - \int 5\cos dx$$

$$= 3\int \sin x\,dx - 5\int \cos dx$$

$$= 3(-\cos x) - 5(\sin x) + c$$

$$= 3\cos x - 5\sin x + c \qquad \#$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sqrt{x}$

$$du = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$$

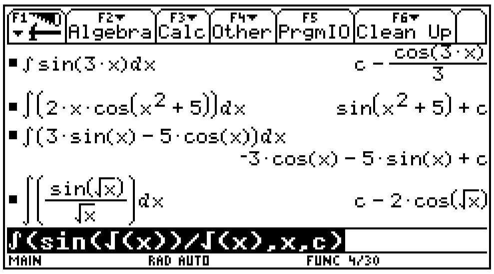
$$dx = 2\,u\,du$$

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{\sin u}{u}2u\,du$$

$$= 2\int \sin u\,du$$

$$= -2\cos u + c \quad = -2\cos\sqrt{x} + c \qquad \#$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



ปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันทำได้โดยใช้สูตรต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

สูตรปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

ให้ u เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ c, a เป็นค่าคงตัวใด ๆ

1. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} \quad = \quad \sin^{-1}\frac{u}{a}+c, a\neq 0$
2. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} \quad = \quad \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a}+c,\ a\neq 0$
3. $\int \frac{du}{a^2+u^2} \quad = \quad \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}+c,\ a\neq 0$
4. $\int \frac{du}{u^2-a^2} \quad = \quad \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right)+c$
5. $\int \frac{du}{a^2-u^2} \quad = \quad \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right)+c$
6. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}} \quad = \quad \ln(u+\sqrt{u^2\pm a^2})+c$

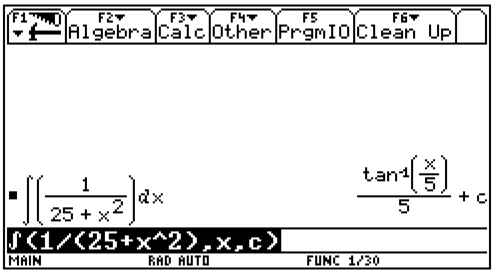
ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $\int \frac{dx}{25+x^2}$

วิธีทำ

$$\int \frac{dx}{25+x^2} = \int \frac{dx}{5^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{5}\tan^{-1}\frac{x}{5}+c \quad \#$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

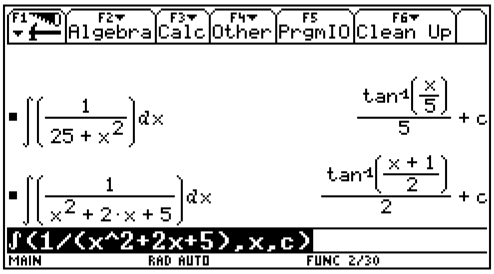
วิธีทำ

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)+4}$$

$$= \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+2^2}$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c \qquad \#$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าของ $\int -\frac{\sin x}{25-\cos^2 x}\,dx$

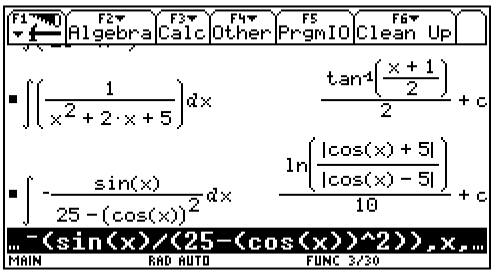
วิธีทำ

$$\int -\frac{\sin x}{25-\cos^2 x}\,dx = \int \frac{d(\cos x)}{5^2-\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{2(5)}\ln\left(\frac{5+\cos x}{5-\cos x}\right)+c$$

$$= \frac{1}{10}\ln\left(\frac{5+\cos x}{5-\cos x}\right)+c \qquad \#$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



สื่อการเรียนการสอน

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. ใบงาน T2 2. เครื่องคำนวณเชิงกราฟ 3. แผ่นใส	1. ใบงาน C2 2. แผ่นใส

กิจกรรมการเรียนการสอน

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
ขั้นนำ ครูบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ แล้วทบทวนเนื้อหาเรื่องอนุพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน และปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต **ขั้นสอน** 1. ครูเขียนสูตรฟังก์ชันตรีโกณมิติทั่ว ๆ ไปที่ใช้ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน บนแผ่นใส 2. ครูเขียนสูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 3-4 ตัวอย่าง โดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส และแสดง การคำนวณโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ทั้ง 2 วิธี 3. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน T2 ข้อ1 แล้วช่วยกันสรุป 4. ครูเขียนสูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน พร้อมทั้ง ยกตัวอย่างประกอบการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณ	**ขั้นนำ** ครูบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ แล้วทบทวนเนื้อหาเรื่องอนุพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน และปริพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต **ขั้นสอน** 1. ครูเขียนสูตรฟังก์ชันตรีโกณมิติทั่ว ๆ ไปที่ใช้ในการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน บนแผ่นใส 2. ครูเขียนสูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 3-4 ตัวอย่าง โดยแสดงวิธีการคำนวณลงแผ่นใส 3. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน C2 ข้อ1 แล้วช่วยกันสรุป 4. ครูเขียนสูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน พร้อมทั้ง ยกตัวอย่างประกอบการหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน

มิติผกผัน3- 4 ตัวอย่าง โดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใสและแสดงการคำนวณโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟทั้ง 2 วิธี 5. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน T2 ข้อ2 แล้วช่วยกันสรุป 6. ครูให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด จากแบบ-เรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 121 และ 124 โดยแสดงวิธีทำลงสมุด แล้วใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟตรวจสอบคำตอบ **ขั้นสรุป** ครูและนักศึกษาช่วยกันสรุปสูตรและการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันอีกครั้ง	การคำนวณบนแผ่นใส 5. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน C2 ข้อ2 แล้วช่วยกันสรุป 6. ครูให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด จากแบบ-เรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 121 และ 124 โดยแสดงวิธีทำลงสมุด **ขั้นสรุป** ครูและนักศึกษาช่วยกันสรุปสูตรและการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติและฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันอีกครั้ง

การวัดและประเมินผล

กลุ่มทดลอง	**กลุ่มควบคุม**
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักศึกษา 2. สังเกตจากการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในการทำใบงานและตอบคำถามในใบงาน 3. การทำงานที่ได้รับมอบหมาย 4. สังเกตจากการนำเสนอผลงานหน้าชั้น 5. การทำแบบฝึกหัด จากแบบเรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 121-124	1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักศึกษา 2. สังเกตจากการการทำใบงานและตอบคำถามในใบงาน 3. การทำงานที่ได้รับมอบหมาย 4. สังเกตจากการนำเสนอผลงานหน้าชั้น 5. การทำแบบฝึกหัด จากแบบเรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 121-124

ใบงาน T2

1. ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้แล้วใช้เครื่องคำนวณ-เชิงกราฟตรวจสอบคำตอบ

1.1 $\int \cos 4x\,dx$

วิธีทำ ให้ u = ……

du = …….

$\therefore \int \cos 4x\,dx$ = ………………….

= ………………….

= ………………….

= …………………. #

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟจะได้ $\int \cos 4x\,dx$ = ………………….

1.2 $\int 2x\sin(x^2-10)\,dx$

วิธีทำ ให้ u = ……

du = …….

$\therefore \int 2x\sin(x^2-10)\,dx$ = ……………………..

= ……………………..

= …………………….. #

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟจะได้ $\int 2x\sin(x^2-10)\,dx$ = ………………..

1.3 $\int (3\cos x + 6\tan 2x)\,dx$

วิธีทำ $\int (3\cos x + 6\tan 2x)\,dx$ = ……………………………….

= ………………………………...

. = ………………………………...

= ………………………………... #

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟจะได้ $\int (3\cos x + 6\tan 2x)\,dx$ = ……………

2. ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันต่อไปนี้ แล้วใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟตรวจสอบคำตอบ

2.1 $\int \frac{dx}{16+x^2}$

วิธีทำ $\int \frac{dx}{16+x^2}$ = ……………………………

= …………………………… #

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟจะได้ $\int \frac{dx}{16+x^2}$ = ……………………………

2.2 $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}$

วิธีทำ $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}$ = ……………………………

= ……………………………

= …………………………… #

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟจะได้ $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}$ = ……………………………

2.3 $\int \frac{dx}{9+16x^2}$

วิธีทำ $\int \frac{dx}{9+16x^2}$ = ……………………………

= ……………………………

= …………………………… #

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟจะได้ $\int \frac{dx}{9+16x^2}$ = ……………………………

ใบงาน C2

ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1.1 $\int \cos 4x\, dx$

วิธีทำ ให้ u = ……

du = …….

dx = ……

$\therefore \int \cos 4x\, dx$ = ………………….

= ………………….

= ………………….

= …………………. #

1.2 $\int 2x \sin(x^2 - 10)\, dx$

วิธีทำ ให้ u = ……

du = …….

$\therefore \int 2x \sin(x^2 - 10)\, dx$ = ……………………..

= ……………………..

= …………………….. #

1.3 $\int (3\cos x + 6\tan 2x)\, dx$

วิธีทำ $\int (3\cos x + 6\tan 2x)\, dx$ = ………………………………..

= ………………………………...

= ………………………………...

= ………………………………... #

2 ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันต่อไปนี้

2.1 $\int \frac{dx}{16+x^2}$

วิธีทำ $\int \frac{dx}{16+x^2}$ = ……………………………

= …………………………… #

2.2 $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}$

วิธีทำ $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}}$ = ……………………………

= ……………………………

= …………………………… #

2.3 $\int \frac{dx}{9+16x^2}$

วิธีทำ $\int \frac{dx}{9+16x^2}$ = ……………………………

= ……………………………

= …………………………… #

แผนการสอนคาบ 5-6
การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

สาระสำคัญ

1. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม มีสูตรคือ $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c,\ u \neq 0$
2. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังมีสูตรคือ

   2.1 $\int e^u du \ = \ e^u + c$

   2.2 $\int a^u du \ = \ \frac{a^u}{\ln a} + c,\ a > 0, a \neq 1$

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ

1. เขียนสูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลังได้
2. แสดงวิธีการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลังได้
3. นำวิธีการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลังไปใช้แก้ปัญหาการหาปริพันธ์ในโจทย์ประยุกต์ได้

เนื้อหา

ปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม

โดยใช้สูตร $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c,\ u \neq 0$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\int \frac{dx}{3+2x}$

วิธีทำ ให้ $u = 3 + 2x$

$$du = 2\,dx$$

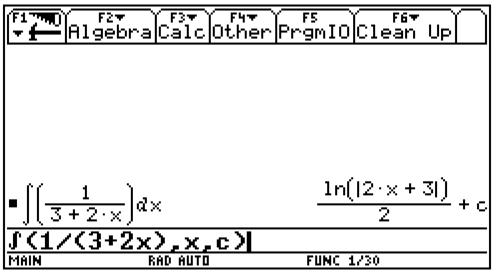
$$dx = \frac{du}{2}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{3+2x} = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|3+2x| \qquad \#$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\int \frac{(2x+6)}{x^2+6x}dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2+6x$

$$du = (2x+6)dx$$

$$\therefore \int \frac{(2x+6)}{x^2+6x}dx = \int \frac{1}{x^2+6x}\cdot(2x+6)\,dx$$

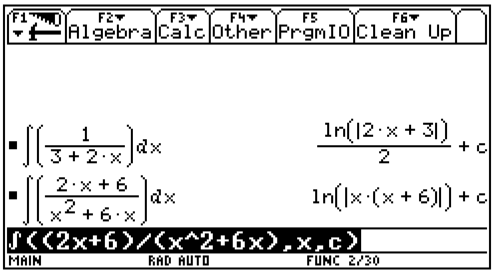
$$= \int \frac{du}{u}$$

$$= \ln|u|+c$$

$$= \ln|x^2+6x|+c$$

$$= \ln|x(x+6)|+c \qquad \#$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\int \frac{dx}{x\ln x}$

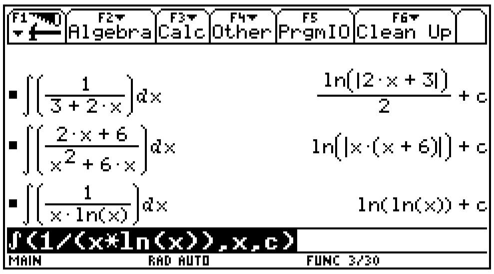
วิธีทำ ให้ $u = \ln x, x > 0$

$$du = \frac{dx}{x}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u|+c$$

$$= \ln|\ln x|+c \qquad \#$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



ปริพันธ์ของฟังก์ชันฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

โดยใช้สูตร $\int e^u du = e^u + c$

และ $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + c,\ a > 0,\ a \neq 1$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $\int e^{6x+4}dx$

วิธีทำ ให้ $u = 6x+4$

$$du = 6dx$$

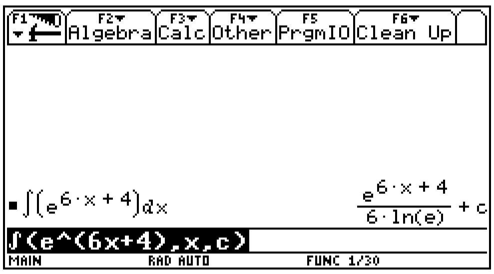
$$dx = \frac{du}{6}$$

$$\therefore \int e^{6x+4}dx = \frac{1}{6}\int e^u\,du$$

$$= \frac{1}{6}e^u + c$$

$$= \frac{1}{6}e^{6x+4} + c$$ #

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $\int 6^{3x+5}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x+5$

$$du = 3dx$$

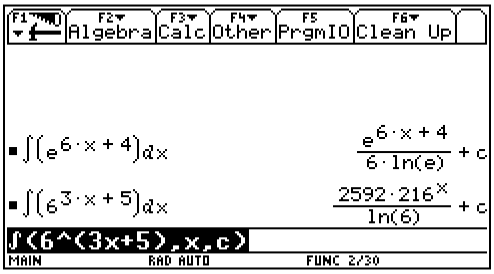
$$dx = \frac{du}{3}$$

$$\therefore \int 6^{3x+5}\,dx = \frac{1}{3}\int 6^{u}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\frac{6^{3x+5}}{\ln 6}+c$$

$$= \frac{6^{3x+5}}{3\ln 6}+c \qquad \#$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



สื่อการเรียนการสอน

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. ใบงาน T3 2. เครื่องคำนวณเชิงกราฟ 3. แผ่นใส	1. ใบงาน C3 2. แผ่นใส

กิจกรรมการเรียนการสอน

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
ขั้นนำ ครูบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักศึกษาทราบ แล้วทบทวนเนื้อหาเรื่องอนุพันธ์ฟังก์ชันฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง **ขั้นสอน** 1. ครูเขียนสูตรการหาปริพันฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลังให้	**ขั้นนำ** ครูบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักศึกษาทราบ แล้วทบทวนเนื้อหาเรื่องอนุพันธ์ฟังก์ชันฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง **ขั้นสอน** 1. ครูเขียนสูตรการหาปริพันฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลังให้

นักศึกษาทราบลงบนแผ่นใส 2. ครูยกตัวอย่างประกอบการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง 5-6ตัวอย่าง โดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส และแสดงการคำนวณโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ทั้ง 2 วิธี 3 ครูให้นักศึกษาทำใบงาน T3 โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟตรวจสอบคำตอบ แล้วสุ่มนักเรียน 3 คน มาเสนอผลงานที่หน้าชั้นเรียน 4 ครูให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด จากแบบ-เรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 129 และ 133 โดยแสดงวิธีทำลงสมุด แล้วใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟตรวจสอบคำตอบ	นักศึกษาทราบลงบนแผ่นใส 2. ครูยกตัวอย่างประกอบการหาปริพันธ์ฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง 5-6 ตัวอย่าง โดยแสดงวิธีการคำนวณลงแผ่นใส 3. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน C3 แล้วสุ่มนักเรียน 3 คน มาเสนอผลงานที่หน้าชั้นเรียน 4. ครูให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด จากแบบ-เรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 129 และ 133 โดยแสดงวิธีทำลงสมุด 5. ครูให้นักศึกษาไปรวบรวมโจทย์การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ที่นอกเหนือจากบทเรียนมาอย่างละ5 ข้อ พร้อมทั้งแสดงวิธีคิดหาคำตอบเขียนลงสมุดแบบฝึกหัด
ขั้นสรุป ครูและนักศึกษาช่วยกันสรุปสูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลังอีกครั้ง	**ขั้นสรุป** ครูและนักศึกษาช่วยกันสรุปสูตรการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลังอีกครั้ง

การวัดและประเมินผล

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักศึกษา 2. สังเกตจากการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในการทำใบงานและตอบคำถามในใบงาน 3. การทำงานที่ได้รับมอบหมาย 4. สังเกตจากการนำเสนอผลงานหน้าชั้น 5. การทำแบบฝึกหัด จากแบบเรียน	1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักศึกษา 2. สังเกตจากการการทำใบงานและตอบคำถามในใบงาน 3. การทำงานที่ได้รับมอบหมาย 4. สังเกตจากการนำเสนอผลงานหน้าชั้น 5. การทำแบบฝึกหัด จากแบบเรียน

คณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 129 และ 133	คณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 129 และ 133

ใบงาน T3

1. ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลังต่อไปนี้แล้วใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟตรวจสอบคำตอบ

1.1 $\int \frac{dx}{5-3x}$

วิธีทำ ให้ u = ………..

du = ……….

$\therefore \int \frac{dx}{5-3x}$ = ………………

= ………………

= ……………….... #

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟจะได้ $\int \frac{dx}{5-3x}$ = ………………………

1.2 $\int \frac{(3x^2+5)}{x^3+5x}dx$

วิธีทำ ให้ u = ……….

du = ……….

$\therefore \int \frac{(3x^2+5)}{x^3+5x}dx$ = ………………………..

= ………………………..

= ………………………..

= ………………………..

= ……………………….. #

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟจะได้ $\int \frac{(3x^2+5)}{x^3+5x}dx$ = …………………

1.3 $\int e^{8x+3}dx$

วิธีทำ ให้ u = ……………….

du = ……………….

$\therefore \int e^{8x+3}dx$ = ……………….

= ………………

= ……………… #

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟจะได้ $\int e^{8x+3}dx$ = ……………………

1.4 $\int 2^{3x-5}\,dx$

วิธีทำ ให้ u = …………..

du = ………….

dx = ………….

$\therefore \int 2^{3x-5}\,dx$ = ………………….

= ………………….

= …………………. #

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟจะได้ $\int 2^{3x-5}\,dx$ = ………………….

1.5 $\int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}\,dx$

วิธีทำ ให้ u = …………….

du = ……………

$\therefore \int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}\,dx$ = …………………..

= …………………..

= ………………….. #

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟจะได้ $\int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}\,dx$ = ………………

ใบงาน C3

1. ให้นักศึกษาแสดงวิธีการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลังต่อไปนี้

1.1 $\int \frac{dx}{5-3x}$

วิธีทำ ให้ u = ………..

du = ……….

$\therefore \int \frac{dx}{5-3x}$ = ………………

= ………………

= ……………….... #

1.2 $\int \frac{(3x^2+5)}{x^3+5x} dx$

วิธีทำ ให้ u = ……….

du = ……….

$\therefore \int \frac{(3x^2+5)}{x^3+5x} dx$ = ………………………..

= ………………………..

= ………………………...

= ………………………..

= ……………………….. #

1.3 $\int e^{8x+3} dx$

วิธีทำ ให้ u = ……………….

du = ……………….

$\therefore \int e^{8x+3} dx$ = ……………….

= ………………

= ……………… #

1.4 $\int 2^{3x-5}\,dx$

วิธีทำ ให้ u = …………..

du = ………….

dx = ………….

$\therefore \int 2^{3x-5}\,dx$ = ………………….

= ………………….

= …………………. #

1.5 $\int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}\,dx$

วิธีทำ ให้ u = …………….

du = ……………

$\therefore \int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}\,dx$ = …………………..

= …………………..

= ………………….. #

แผนการสอนคาบ 7-8
เทคนิคการหาปริพันธ์

สาระสำคัญ

1. เทคนิคการหาปริพันธ์เป็นแนวทางที่ใช้เพื่อแก้ปัญหาโจทย์การหาปริพันธ์ที่ไม่สามารถใช้สูตรพื้นฐานในการหาค่าโดยตรงได้
2. การหาปริพันธ์โดยแยกส่วน เป็นเทคนิคที่ใช้หาปริพันธ์ที่ตัวถูกหาปริพันธ์เป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูปผลคูณของสองฟังก์ชัน
3. การหาปริพันธ์โดยเศษส่วนย่อย เป็นเทคนิคที่ใช้หาปริพันธ์ที่ตัวถูกหาปริพันธ์เป็นฟังก์ชันตรรกยะและต้องแยกตัวถูกหาปริพันธ์ออกเป็นส่วนย่อยหลาย ๆ ส่วน

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ

1. ใช้เทคนิคปริพันธ์แบบต่าง ๆ ในการหาปริพันธ์ตามที่โจทย์กำหนดให้ได้
2. แสดงวิธีการหาปริพันธ์โดยใช้เทคนิคการหาปริพันธ์โดยแยกส่วนได้
3. แสดงวิธีการหาปริพันธ์โดยใช้เทคนิคการหาปริพันธ์โดยทำเป็นเศษส่วนย่อยได้

เนื้อหา

การหาปริพันธ์โดยแยกส่วน (Integration by Parts)

บางครั้งปริพันธ์ที่กำหนดให้จะซับซ้อนจนไม่สามารถทำเสร็จได้โดยการหาปริพันธ์เพียงครั้งเดียว วิธีการหนึ่งที่จะลดทอนปริพันธ์ที่ซับซ้อนให้ง่ายขึ้น คือการหาปริพันธ์แบบที่เรียกว่า การหาปริพันธ์โดยแยกส่วน

แนวคิด หลักการหาปริพันธ์ได้จากเชิงอนุพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชันดังนี้

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

$$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$$

ดังนั้น $$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

สูตร $$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

การใช้ การหาปริพันธ์โดยแยกส่วน มักใช้กับปริพันธ์ต่อไปนี้

1. เกี่ยวกับผลคูณทั่วไป เช่น $\int x\cos x\,dx$, $\int xe^{x}\,dx$, $\int \sin(\ln x)\,dx$
2. เกี่ยวกับลอการิทึม เช่น $\int x^{n}\ln x\,dx$, $\int \ln x\,dx$
3. เกี่ยวกับฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เช่น $\int x\arctan x\,dx$, $\int \operatorname{arcsec} x^{2}dx$
4. เกี่ยวกับผลคูณของ $\tan x$ กับ $\sec x$ หรือ $\cot x$ กับ $\operatorname{cosec} x$ ที่กำลังของ $\sec x$ กับ $\operatorname{cosec} x$ เป็นเลขคี่ แต่กำลังของ $\tan x$ กับ $\cot x$ เป็นเลขคู่ เช่น $\int (\sec x)^{3}(\tan x)^{2}\,dx$, $\int (\sec x)^{3}\,dx$

หลักการเลือก u และ v

1. การเลือก ควรเลือกพจน์ที่ดูไม่ซับซ้อนและเมื่อหาอนุพันธ์แล้วจะได้พจน์ที่ดูง่ายขึ้น เช่น

   กรณี $\int x^{n}e^{x}dx$ เลือก $u = x^{n}$

   กรณี $\int x^{n}\cos x\,dx$ เลือก $u = x^{n}$

   กรณี $\int e^{x}\sin x\,dx$ เลือก $u = e^{x}$

   กรณี $\int x^{n}\operatorname{arcsec} x\,dx$ เลือก $u = \operatorname{arcsec} x$

   กรณี $\int x^{n}\ln x\,dx$ เลือก $u = \ln x$

2. การเลือก dv ต้องอย่าลืมว่า dx เป็นส่วนหนึ่งของ dv และ dv ควรเป็นพจน์ที่ซับซ้อน แต่สามารถหาปริพันธ์ได้ง่าย ๆ

หลักการใช้สูตร

1. หลังจากเลือก u และ dv แล้วให้หา du โดยการหาอนุพันธ์และหา v โดยการหาปริพันธ์ (ไม่ต้องใส่ค่าคงตัว c)
2. จากนั้นนำไปแทนค่าในสูตร $\int u\,dv = uv - \int v\,du$
3. ถ้า $\int v\,du$ ไม่สามารถหาปริพันธ์โดยวิธีธรรมดา ให้ทำการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วนอีกครั้ง หรือหลายครั้งจนกว่าจะได้ผลลัพธ์
4. ระหว่างการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน ถ้ามีพจน์ $\int u\,dv$ เกิดขึ้นอีก ให้ย้าย $\int u\,dv$ มาอยู่ข้างซ้ายรวมกับ $\int u\,dv$ ที่มีอยู่เดิมทุกครั้งไป
5. ค่าคงตัว c ที่เกิดระหว่างการหาปริพันธ์โดยแยกส่วนไม่ต้องใส่ ให้เขียน c ที่บรรทัดสุดท้ายของคำตอบ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของปริพันธ์ $\int x\cos x\,dx$

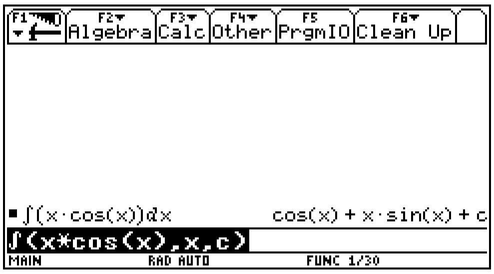
วิธีทำ ให้ $u = x$, $dv = \cos x\,dx$

ดังนั้น $du = dx$, $v = \int \cos x\,dx = \sin x$

$$\therefore \int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$= x\sin x + \cos x + c \qquad \#$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของปริพันธ์ $\int \ln x\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ln x$, $dv = dx$

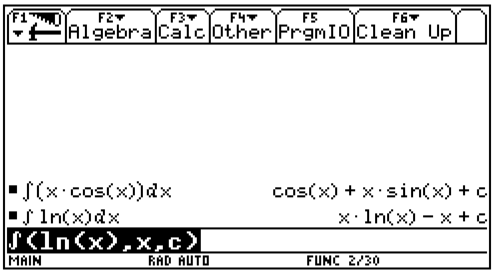
ดังนั้น $du = \frac{1}{x}dx$ และ $v = \int dx = x$

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx$$

$$= x\ln x - \int dx$$

$$= x\ln x - x + c \qquad \#$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของปริพันธ์ $\int e^x \sin x\, dx$

วิธีทำ ให้ $u = \sin x$, $dv = e^x\, dx$

ดังนั้น $du = \cos dx$ และ $v = \int e^x dx = e^x$

$$\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx \;\ldots\ldots\ldots(1)$$

หาค่า $\int e^x \cos x\, dx$ โดยการหาปริพันธ์แยกส่วนอีกครั้ง

ให้ $\bar{u} = \cos x$ และ $d\bar{v} = e^x\, dx$

ดังนั้น $d\bar{u} = -\sin x\, dx$ และ $\bar{v} = \int e^x\, dx = e^x$

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx \;\ldots\ldots\ldots(2)$$

แทนค่า(2) ใน (1) จะได้

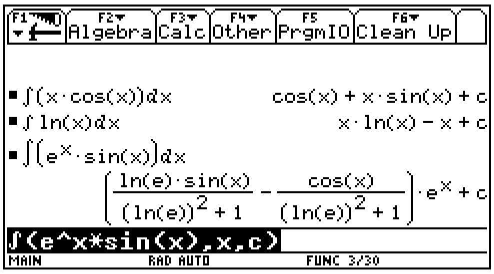
$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - (e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx)$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx$$

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + c \qquad \#$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



การหาปริพันธ์โดยเศษส่วนย่อย (Integration by Partial Fraction)

การหาปริพันธ์โดยใช้เศษส่วนย่อย ใช้กับฟังก์ชันตรรกยะ (ฟังก์ชันผลหารของฟังก์ชันพหุนาม) ซึ่งการหาปริพันธ์จะใช้สูตรพื้นฐานโดยตรงไม่ได้ ต้องใช้เทคนิคว่า ด้วยการเปลี่ยนเศษส่วนเดิมให้เป็นเศษส่วนย่อย และเศษส่วนย่อยนี้มักจะหาปริพันธ์ได้ทันที

วิธีการ

1. เศษส่วนที่จะนำมาแยกเป็นเศษส่วนนั้นต้องเป็นเศษส่วนธรรมดา คือ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ โดยที่ $p(x)$ และ $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม และdegree ของ $p(x)$ ต้องน้อยกว่า degree ของ $Q(x)$ ถ้า degree ของ $p(x)$ มากกว่า หรือเท่ากับ degree ของ $Q(x)$ ต้องทำเป็นเศษส่วนคละโดยการตั้งหารก่อน

2. ถ้าส่วนของเศษส่วนที่นำมาแยกสามารถแยกตัวประกอบได้ ต้องแยกตัวประกอบก่อน และถ้ายกกำลังได้ต้องยกกำลังก่อน

3. จำนวนเศษส่วนย่อยที่ได้ จะเท่ากับจำนวนตัวประกอบจริง ๆ ของส่วน

4. การทำเศษส่วนย่อยแบ่งเป็นประเภท ดังนี้

ประเภทที่ 1 ตัวส่วนเป็นผลคูณของตัวประกอบเชิงเส้น $(ax+b)$ เมื่อแยกแล้วจะได้เศษส่วนย่อยเป็น

$\frac{A}{a_1x+b_1} + \frac{B}{a_2x+b_2} + \frac{C}{a_3x+b_3} + \ldots + \frac{I}{a_nx+b_n}$ โดยที่เศษส่วนย่อยที่สมมติจะเท่ากับจำนวนวงเล็บของ $(ax+b)$

ประเภทที่ 2 ตัวส่วนเป็นตัวประกอบเชิงของ $(ax+b)$ ที่ยกกำลัง n คือ $(ax+b)^n$ เศษส่วนย่อยที่ได้จะมีกำลังตั้งแต่ 1ถึง n ดังนี้

$$\frac{A}{ax+b}+\frac{b}{(ax+b)^2}+\frac{c}{(ax+b)^3}+...+\frac{T}{(ax+b)^n}$$

ประเภทที่ 3 ตัวส่วนมีตัวประกอบของ ax^2+bx+c ที่แยกตัวประกอบไม่ได้ เศษของเศษส่วนย่อยพจน์นี้จะต้องมีรูปเป็น Mx+N และจำนวนเศษส่วนย่อยที่สมมติจะเท่ากับวงเล็บจริง ๆ

ประเภทที่ 4 ตัวส่วนเป็นกำลังของ ax^2+bx+c ที่แยกตัวประกอบไม่ได้ เศษส่วนย่อยเขียนให้อยู่ในรูปข้างล่าง ซึ่งมีวิธีการเหมือนประเภทที่2

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}+...+\frac{Tx+U}{(ax^2+bx+c)^n}$$

5. ค่า A , B , C , D,…. ในการแยกเป็นเศษส่วนย่อยหาโดยวิธีการของ Undetermined Coefficient ซึ่งทำได้ 2วิธี คือ

- เทียบสัมประสิทธิ์ของ x ที่มี degree เท่ากัน
- แทนค่าx ที่สะดวกต่อการคำนวณ เช่น 0 , ±1 , ±2 ค่าของ x ที่แทน ต้องไม่ทำให้ส่วนของพจน์ใดพจน์หนึ่งเป็นศูนย์

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของปริพันธ์ $\int\frac{5}{(2x+1)(x-2)}dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{5}{(2x+1)(x-2)}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x-2}$

$$5=A(x-2)+B(2x+1)$$

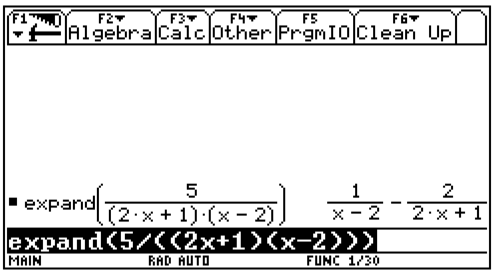
$$=(A+2B)x+(-2A+B)$$

โดยการเทียบส.ป.ส. จะได้ A + 2B = 0 , -2A + B = 5

A = -2 , B = 1

$$\therefore\ \frac{5}{(2x+1)(x-2)}=\frac{-2}{2x+1}+\frac{1}{x-2}$$

เราสามารถใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในการแยกเศษย่อยโดยใช้คำสั่ง **expand**

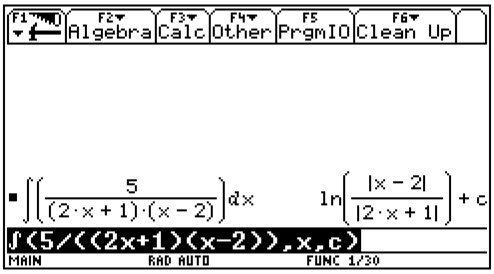


นั่นคือ $$\int\frac{5}{(2x+1)(x-2)}dx=\int\left(\frac{-2}{2x+1}+\frac{1}{x-2}\right)dx$$

$$=-\ln|2x+1|+\ln|x-2|+c$$

$$= \ln\left|\frac{x-2}{2x+1}\right| + c \qquad \#$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของปริพันธ์ $\int \frac{(x^2+3x+3)}{x(x+2)^2}dx$

วิธีทำ จาก $\dfrac{x^2+3x+3}{x(x+2)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{(x+2)^2}$

จะได้ $x^2 + 3x + 3 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$

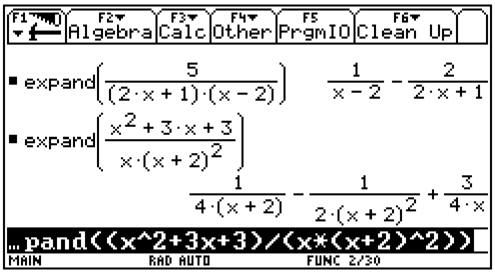
ถ้า $x = 0$; $3 = A(4) + B(0) + C(0)$ ดังนั้น $A = 3/4$

ถ้า $x = -2$; $1 = (3/4)(0) + B(0) + C(-2)$ ดังนั้น $C = -1/2$

ถ้า $x = 1$; $7 = 3(3)^2/4 + B(3)(1) - (1/2)(1)$ ดังนั้น $B = 1/4$

นั่นคือ $\dfrac{x^2+3x+3}{x(x+2)^2} = \dfrac{3}{4x} + \dfrac{1}{4(x+2)} - \dfrac{1}{2(x+2)^2}$

ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในการแยกเศษย่อย

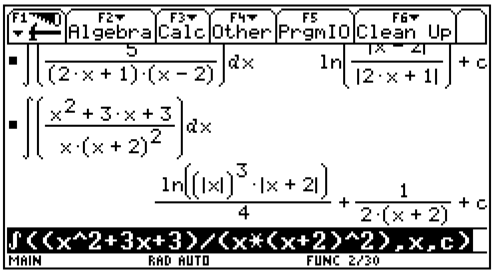


และ $$\int \frac{(x^2+3x+3)}{x(x+2)^2}dx = \frac{3}{4}\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{3}{4}\ln|x| + \frac{1}{4}\ln|x+2| + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}\right) + c$$

$$= \ln\left|\left(x^{3/4}\right)(x+2)^{1/4}\right| + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}\right) + c \qquad \#$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



สื่อการเรียนการสอน

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. เครื่องคำนวณเชิงกราฟ 2. แผ่นใส	1. แผ่นใส

กิจกรรมการเรียนการสอน

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
ขั้นนำ ครูบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักศึกษาทราบ แล้วทบทวนเนื้อหาเรื่องปริพันธ์ของฟังก์ชันที่เรียนมาทั้งหมด **ขั้นสอน** 1. ครูยกตัวอย่างการหาปริพันธ์ที่ไม่สามารถใช้สูตรพื้นฐานในการหาค่าโดยตรงได้ 2. ครูแสดงวิธีการหาปริพันธ์ที่ซับซ้อนให้ง่ายขึ้น โดยใช้เทคนิคการหาปริพันธ์แบบที่เรียกว่า “การหาปริพันธ์โดยแยกส่วน” 3. ครูยกตัวอย่างประกอบการหาปริพันธ์โดยแยกส่วนโดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส และแสดงการคำนวณโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ทั้ง 2 วิธี	**ขั้นนำ** ครูบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักศึกษาทราบ แล้วทบทวนเนื้อหาเรื่องปริพันธ์ของฟังก์ชันที่เรียนมาทั้งหมด **ขั้นสอน** 1. ครูยกตัวอย่างการหาปริพันธ์ที่ไม่สามารถใช้สูตรพื้นฐานในการหาค่าโดยตรงได้ 2. ครูแสดงวิธีการหาปริพันธ์ที่ซับซ้อนให้ง่ายขึ้น โดยใช้เทคนิคการหาปริพันธ์แบบที่เรียกว่า “ การหาปริพันธ์โดยแยกส่วน” 3. ครูยกตัวอย่างประกอบการหาปริพันธ์โดยแยกส่วนโดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส 4. ครูแสดงวิธีการหาปริพันธ์ที่ซับซ้อนให้ง่าย

4. ครูแสดงวิธีการหาปริพันธ์ที่ซับซ้อนให้ง่ายขึ้น โดยใช้เทคนิคการหาปริพันธ์แบบที่เรียกว่า การหาปริพันธ์โดยเศษส่วนย่อย (Integration by Partial Fraction) 5. ครูยกตัวอย่างประกอบการหาปริพันธ์โดยเศษส่วนย่อย โดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส และแสดงการคำนวณโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ทั้ง 2 วิธี 6. ครูให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด จากแบบเรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 129 และ 133 โดยแสดงวิธีทำลงสมุด แล้วใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟตรวจสอบคำตอบ **ขั้นสรุป** ครูและนักศึกษาช่วยกันสรุป หลักการ แนวคิด วิธีการหาปริพันธ์โดยแยกส่วน และการหาปริพันธ์โดยเศษส่วนย่อย	ขึ้น โดยใช้เทคนิคการหาปริพันธ์แบบที่เรียกว่า การหาปริพันธ์โดยเศษส่วนย่อย (Integration by Partial Fraction) 5. ครูยกตัวอย่างประกอบการหาปริพันธ์โดยเศษส่วนย่อย โดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส 6. ครูให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด จากแบบเรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 129 และ 133 โดยแสดงวิธีทำลงสมุด แล้วสุ่มนักเรียน 3 คน เสนอผลงานที่หน้าชั้นเรียน **ขั้นสรุป** ครูและนักศึกษาช่วยกันสรุป หลักการ แนวคิด วิธีการหาปริพันธ์โดยแยกส่วน และการหาปริพันธ์โดยเศษส่วนย่อย

การวัดและประเมินผล

กลุ่มทดลอง	**กลุ่มควบคุม**
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักศึกษา 2. สังเกตจากการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ การทำงานที่ได้รับมอบหมาย 3. สังเกตจากการนำเสนอผลงานหน้าชั้น 4. การทำแบบฝึกหัด จากแบบเรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 129 และ 133	1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักศึกษา 2. การทำงานที่ได้รับมอบหมาย 3. สังเกตจากการนำเสนอผลงานหน้าชั้น 4. การทำแบบฝึกหัด จากแบบเรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 129 และ 133

แผนการสอนคาบ 9-10
เทคนิคการหาปริพันธ์(ต่อ)

สาระสำคัญ

1. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง แบ่งได้ดังนี้
   1.1 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน sine และ cosine ที่ยกกำลัง
   1.2 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน sine และ cosine ที่อยู่ในรูป $\int \sin mx \cos nx\, dx$, หรือ $\int \sin mx \sin nx\, dx$ หรือ $\int \cos mx \cos nx\, dx$ เมื่อ m, n เป็นจำนวนนับ และ $m \neq n$
   1.3 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน secant และ tangent ที่มีกำลังเป็นจำนวนนับคู่บวกหรือจำนวนนับคี่บวก
2. การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ มี 3 รูปแบบดังนี้
   2.1 ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\sqrt{a^2 - u^2}$ โดยการสมมติให้ $u = a \sin\theta$ หรือ $u = a \cos\theta$
   2.2 ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\sqrt{a^2 + u^2}$ โดยการสมมติให้ $u = a \tan\theta$ หรือ $u = a \cot\theta$
   2.3 ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\sqrt{u^2 - a^2}$ โดยการสมมติให้ $u = a \sec\theta$ หรือ $u = a \operatorname{cosec}\theta$
3. การหาปริพันธ์โดยการแทนค่าชนิดพิเศษ ใช้ในกรณีฟังก์ชันที่จะหาปริพันธ์มีกำลังของตัวแปร x เป็นเศษส่วน จะแทนค่า $x = u^n$ เมื่อ n คือ ค.ร.น. ของเลขยกกำลังเพื่อทำให้หาค่าปริพันธ์ได้ง่ายขึ้น
4. การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะของ sin x และ cos x จะแทนค่าด้วย $u = \tan \frac{x}{2}$ $-\pi < x < \pi$ โดยอาศัยสูตรในการคำนวณ ดังนี้

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ

1. ใช้เทคนิคปริพันธ์แบบต่าง ๆ ในการหาปริพันธ์ตามที่โจทย์กำหนดให้ได้
2. แสดงวิธีการหาปริพันธ์โดยใช้เทคนิคการหาปริพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้
3. แสดงวิธีการหาปริพันธ์โดยใช้เทคนิคการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การหาปริพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Integrals of Product of Trigonometric Function)

การหาปริพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ แบ่งออกเป็น 3 ชนิด ดังนี้

ชนิดที่ 1 ปริพันธ์ในรูปแบบ $\int \cos x \cos y\,dx$, $\int \sin x \sin y\,dx$, $\int \sin x \cos y\,dx$

ให้ทำโดยการเปลี่ยนตัวหาปริพันธ์ให้อยู่ในรูปผลบวกหรือผลต่าง โดยใช้สูตร

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$$

ชนิดที่ 2 ปริพันธ์ในรูปแบบ $\int \sin^m x \cos^n x dx$ โดยที่ m ,n เป็นจำนวนนับ

<u>กรณีที่ 1</u> n เป็นจำนวนนับคี่ ให้เขียน

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \int \sin^m x \cos^{n-1} x d(\sin x)$$

แล้วเปลี่ยน $\cos^{n-1} x$ ให้อยู่ในรูปของ $\sin x$ โดยใช้เอกลักษณ์ $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$

จากนั้นจึงหาปริพันธ์โดยให้ $u = \sin x$

<u>กรณีที่ 2</u> m เป็นจำนวนนับคี่ ให้เขียน

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = -\int \sin^{m-1} x \cos^n x\,d(\cos x)$$

แล้วเปลี่ยน $\sin^{m-1} x$ ให้อยู่ในรูปของ $\cos x$ โดยใช้เอกลักษณ์ $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$

จากนั้นจึงหาปริพันธ์โดยให้ $u = \cos x$

<u>กรณีที่ 3</u> m และ n เป็นจำนวนนับคู่ ให้ใช้เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \quad , \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

ชนิดที่ 3 ปริพันธ์ในรูปแบบ $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ โดยที่ m ,n เป็นจำนวนนับ

<u>กรณีที่ 1</u> n เป็นจำนวนนับคู่ ให้เขียน

$$\int \tan^m x \sec^n x\,dx = \int \tan^m x \sec^{n-2} x\,d(\tan x)$$

แล้วเปลี่ยน $\sec^{n-2} x$ ให้อยู่ในรูปของ $\tan x$ โดยเอกลักษณ์ $\sec^2 x = 1+\tan^2 x$

จากนั้นจึงหาปริพันธ์โดยให้ $u = \tan x$

<u>กรณีที่ 2</u> m เป็นจำนวนนับคี่ ให้เขียน

$$\int \tan^m x \sec^n x\,dx = \int \tan^{m-1} x \sec^{n-1} x\,d(\sec x)$$

แล้วเปลี่ยน $\tan^{m-1} x$ ให้อยู่ในรูปของ $\sec x$ โดยใช้เอกลักษณ์ $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

จากนั้นจึงหาปริพันธ์โดยให้ $u = \sec x$

<u>กรณีที่ 3</u> m เป็นจำนวนนับคู่ และ n เป็นจำนวนนับคี่ ให้เขียน

$$\int \tan^m x \sec^n x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)^{m-2} \sec^n x\,dx$$

จากนั้นจึงหาปริพันธ์โดยใช้สูตรลดทอน

หมายเหตุ ในกรณี $\int \cot^m x \cos^n x\,dx$ ให้ทำทำนองเดียวกับ $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ โดยแทน $\tan x$ ด้วย $\cot x$ และ $\sec x$ ด้วย $\operatorname{cosec} x$ ทั้ง สามกรณี และใช้ เอกลักษณ์

$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x$

การแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Substitution)

หลักการ ปริพันธ์บางตัวไม่สามารถหาปริพันธ์ด้วยสูตรพื้นฐานได้ ถ้าตัวถูกหาปริพันธ์มีเครื่องหมายรากที่สองอยู่ด้วย เราต้องทำโดยวิธีแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อทำให้เครื่องหมายรากหายไป

ชนิดตัวถูกหาปริพันธ์	แทนค่า u ด้วย	ผลที่ได้
$\sqrt{a^2 - u^2}$	$u = a\sin\theta\ ,\ -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$	$\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos\theta\ ,\ a > 0$
$\sqrt{a^2 + u^2}$	$u = a\tan\theta\ ,\ -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$	$\sqrt{a^2 + u^2} = a\sec\theta\ ,\ a > 0$
$\sqrt{u^2 - a^2}$	$u = a\sec\theta\ ,\ 0 \le \theta < \pi/2\ ,\ \pi \le \theta < 3\pi/2$	$\sqrt{u^2 - a^2} = a\tan\theta\ ,\ a > 0$

ข้อสังเกต

1. ขอให้ยึดไว้ในใจว่าการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อ

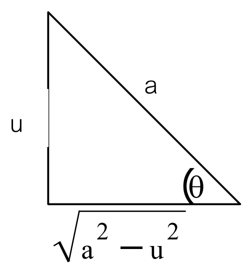
   ยุบ 2 พจน์ให้เป็น1พจน์

   ทำให้เครื่องหมายรากหายไป (ถ้ามี)

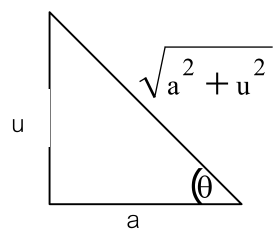
2. สำหรับปริพันธ์ของฟังก์ชันที่มีพจน์ $ax^2 + bx + c$ หรือ $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ สามารถแทนค่า ด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ แต่ก่อนอื่นต้องแปลงให้อยู่ในรูป $u^2 \pm a^2$ หรือ $a^2 - u^2$ ก่อน โดยทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

3. หลังจากการหาปริพันธ์สิ้นสุดลงแล้วต้องแทนค่ากลับจากฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันพีชคณิตตามเดิม ทั่วไปแล้วจะอาศัยรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

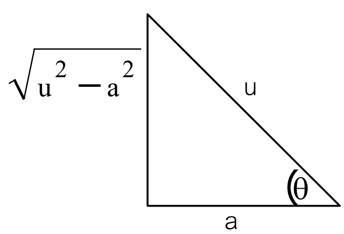
$u = a\sin\theta$



$u = a\tan\theta$



$u = a\sec\theta$



4. บางครั้งแม้ว่าตัวถูกหาปริพันธ์ไม่มีเครื่องหมายรากติดอยู่ เราสามารถใช้การแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของปริพันธ์ $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

วิธีทำ ให้ $x = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $dx = \cos\theta\, dx$

จะได้
$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\sin^3\theta\cos\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}d\theta$$
$$= \int \sin^3\theta\, d\theta$$
$$= \int \sin\theta(1-\cos^2\theta)d\theta$$
$$= \frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta + C$$

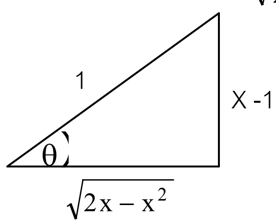
เนื่องจาก $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-x^2}$

นั่นคือ
$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} - \sqrt{1-x^2} + C \qquad \#$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของปริพันธ์ $\int \frac{(x+1)}{\sqrt{2x-x^2}}dx$

วิธีทำ
$$\int \frac{(x+1)}{\sqrt{2x-x^2}}dx = \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

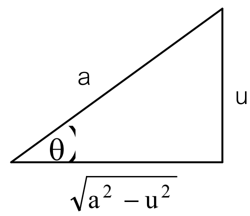
ให้ $x-1 = \sin\theta \;\therefore\; dx = \cos\theta\, d\theta$ และ
$$\int \frac{(x+1)}{\sqrt{2x-x^2}}dx = \int \frac{(\sin\theta+2)(\cos\theta\, d\theta)}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$
$$= \int (\sin\theta+2)d\theta$$
$$= -\cos\theta + 2\theta + C$$
$$= -\sqrt{2x-x^2} + 2\sin^{-1}(x-1) + C$$
$$= 2\sin^{-1}(x-1) - \sqrt{2x-x^2} + C \qquad \#$$



ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของปริพันธ์ $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du$

วิธีทำ ให้ $u = a\sin\theta$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $du = a\cos\theta$

ดังนั้น
$$\int \sqrt{a^2-u^2}\,dx = \int \sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}(a\cos\theta)d\theta$$
$$= \int a^2\cos^2\theta\, d\theta$$
$$= \int \frac{1}{2}a^2(1+\cos 2\theta)d\theta$$



$$=\frac{1}{2}a^2(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta)+C$$
$$=\frac{1}{2}a^2(\theta+\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta)+C$$

จากรูป เราได้ว่า $\sin\theta=\frac{u}{a}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a}$

นั่นคือ $\int\sqrt{a^2-u^2}\,du=\frac{1}{2}a^2(\sin^{-1}\frac{u}{a}+\frac{u}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a})+C$

$$=\frac{u}{a}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a}+C \qquad \#$$

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรรกยะของ sin x และ cos x

ใช้เมื่อปริพันธ์ที่กำหนดอยู่ในแบบ $\int\frac{1}{a\cos x+b}dx$, $\int\frac{1}{a+b\sin x}dx$ หรือ $\int\frac{1}{a+b\sin x+c\cos x}dx$

วิธีการ เราแทนค่าโดยให้ $u=\tan(x/2)$ เมื่อ $-\pi<x<\pi$

ดังนั้น $2\,du=\sec^2(x/2)\,dx$

หรือ $dx=\frac{2\,du}{\sec^2(x/2)}=\frac{2\,du}{1+u^2}$

จาก $\sin x=\frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$ และ $\cos x=\frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$

จะได้ $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$ และ $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าปริพันธ์ $\int\frac{dx}{1+\cos x}$

วิธีทำ ให้ $u=\tan(x/2)$ เมื่อ $-\pi<x<\pi$

$$\therefore\ \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}\ ,\ dx=\frac{2\,du}{1+u^2}$$

$$\therefore\ \int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{\frac{2\,du}{(1+u^2)}}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}}$$

$$=\int du=u+C=\tan\frac{x}{2}+C \qquad \#$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าปริพันธ์ $\int \frac{1}{1+\sin x-\cos x}dx$

วิธีทำ ให้ $u=\tan(x/2)$ เมื่อ $-\pi<x<\pi$

$$\therefore\ \sin x=\frac{2u}{1+u^2},\ \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$dx=2\,du(1+u^2)$$

$$\therefore\ \int\frac{1}{1+\sin x-\cos x}dx \quad =\int\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}-\frac{1-u^2}{1+u^2}}$$

$$=\int\frac{du}{u(1+u)}=\ln|u|-\ln|1+u|+C$$

$$=\ln\left|\frac{u}{1+u}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right|+C \qquad \#$$

สื่อการเรียนการสอน

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. เครื่องคำนวณเชิงกราฟ 2. แผ่นใส	1. แผ่นใส

กิจกรรมการเรียนการสอน

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
ขั้นนำ ครูบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักศึกษาทราบ แล้วทบทวนเนื้อหาเรื่องเทคนิคการหาปริพันธ์ เรียนมาจากคาบที่แล้ว **ขั้นสอน** 1. ครูยกตัวอย่างปริพันธ์ที่ไม่สามารถใช้สูตรพื้นฐานในการหาค่าโดยตรงได้ 2. ครูแสดงวิธีการหาปริพันธ์ที่ซับซ้อนให้ง่ายขึ้น โดยใช้เทคนิคการหาปริพันธ์แบบที่	**ขั้นนำ** ครูบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักศึกษาทราบ แล้วทบทวนเนื้อหาเรื่องเทคนิคการหาปริพันธ์ เรียนมาจากคาบที่แล้ว **ขั้นสอน** 1. ครูยกตัวอย่างปริพันธ์ที่ไม่สามารถใช้สูตรพื้นฐานในการหาค่าโดยตรงได้ 2. ครูแสดงวิธีการหาปริพันธ์ที่ซับซ้อนให้ง่ายขึ้น โดยใช้เทคนิคการหาปริพันธ์แบบที่

เรียกว่า การหาปริพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 3. ยกตัวอย่างประกอบการหาปริพันธ์ผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส และแสดงการคำนวณโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ทั้ง 2 วิธี 4. ครูแสดงวิธีการหาปริพันธ์ที่ซับซ้อนให้ง่ายขึ้น โดยใช้เทคนิคการหาปริพันธ์แบบที่เรียกว่า การแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ 5. ครูยกตัวอย่างประกอบการหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส และแสดงการคำนวณ โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ทั้ง 2 วิธี 6. ครูให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด จากแบบ-เรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 159 และ 172 โดยแสดงวิธีทำลงในสมุด แล้วใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟตรวจสอบคำตอบ **ขั้นสรุป** ครูและนักศึกษาช่วยกันสรุป หลักการ แนวคิด วิธีการหาปริพันธ์โดยแยกส่วน และการหาปริพันธ์โดยเศษส่วนย่อย	เรียกว่า การหาปริพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 3. ครูยกตัวอย่างประกอบการหาปริพันธ์ผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส 4. ครูแสดงวิธีการหาปริพันธ์ที่ซับซ้อนให้ง่ายขึ้น โดยใช้เทคนิคการหาปริพันธ์แบบที่เรียกว่า การแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ 5. ครูยกตัวอย่างประกอบการหาปริพันธ์โดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส 6. ครูให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด จากแบบ-เรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 159 และ 172 โดยแสดงวิธีทำลงในสมุด แล้วสุ่มนักเรียน 3 คน มาเสนอผลงานที่หน้าชั้นเรียน 7. ครูให้นักศึกษาไปรวบรวมโจทย์การหาปริพันธ์โดยใช้ เทคนิคการหาปริพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่นอกเหนือจากบทเรียนมาอย่างละ 5 ข้อ พร้อมทั้งแสดงวิธีคิดหาคำตอบ เขียนลงในสมุดแบบฝึกหัด **ขั้นสรุป** ครูและนักศึกษาช่วยกันสรุป หลักการ แนวคิด วิธีการหาปริพันธ์โดยแยกส่วน และการหาปริพันธ์โดยเศษส่วนย่อย

การวัดและประเมินผล

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักศึกษา 2. การทำงานที่ได้รับมอบหมาย 3. สังเกตจากการนำเสนอผลงานหน้าชั้น 4. การทำแบบฝึกหัดจากแบบเรียน คณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 159 และ 172	1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักศึกษา 2. การทำงานที่ได้รับมอบหมาย 3. สังเกตจากการนำเสนอผลงานหน้าชั้น 4. การทำแบบฝึกหัด จากแบบเรียน คณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 159 และ 172

แผนการสอนคาบ 1314
ปริพันธ์จำกัดเขตและการประยุกต์

สาระสำคัญ

1. ปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน f(x) จาก a ถึง b เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_b^a f(x)\,dx$
2. ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน [a , b] ถ้า g เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บน[a, b] แล้ว ตามทฤษฎีหลักมูลของแคลคูลัสจะได้ว่า $\int_b^a f(x)\,dx = g(b) - g(a)$
3. ทฤษฎีหลักมูลของแคลคูลัสสามารถนำไปหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งได้

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ

1. แสดงวิธีการหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยอาศัยทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสได้
2. เขียนกราฟเพื่อแสดงวิธีการหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งตามที่โจทย์กำหนดให้ได้

ปริพันธ์จำกัดเขต และทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

ปริพันธ์จำกัดเขตของ f จาก a ไป b เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$\int_b^a f(x)\,dx$ เรียกฟังก์ชัน f ว่า ปริพัทธ์ (Integrand)

เรียก a ว่า ขีดจำกัดล่าง (Lower Limit) ของการหาปริพันธ์

เรียก b ว่า ขีดจำกัดล่าง (Upper Limit) ของการหาปริพันธ์

และ x เป็นตัวแปรของการหาปริพันธ์

บทนิยาม ฟังก์ชัน g จะเรียกว่าเป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f บน [a, b] ก็ต่อเมื่อ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้บน [a, b]และ $g'(x) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in [a, b]$

ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

ถ้าให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน [a, b] และ g เป็นปฏิยานุพันธ์นิยามบน[a, b] ของ f แล้ว $\int_b^a f(x)\,dx = g(b) - g(a)$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\int_1^2 5x^4\,dx$

วิธีทำ เนื่องจากปฏิยานุพันธ์ของ $5x^4$ คือ $x^5 + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว

ให้ $F(x) = x^5 + C$

$F(2) = 2^5 + C = 32 + C$

$F(1) = 1^5 + C = 1 + C$

$F(2) - F(1) = 32 - 1$

ดังนั้น $\int_1^2 5x^4\,dx = 31$ #

เพื่อความสะดวกเราใช้สัญลักษณ์ $[F(x)]_a^b$ *แทน* $g(b) - g(a)$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\int_{-1}^2 (2x^3 - 3x^2 + x - 1)\,dx$

วิธีทำ

$$\int_{-1}^2 (2x^3 - 3x^2 + x - 1)\,dx = \left[\frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^2$$

$$= (8 - 8 + 2 - 2) - (\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 1)$$

$$= -3 \quad \#$$

สมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วง [a, b] และ c เป็นค่าคงตัว

1. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
2. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ สำหรับทุก ๆ ค่า $a \le c \le b$
4. $\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$
5. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
6. ถ้า $f(x) \le g(x)$ บนช่วง $a \le x \le b$ แล้ว $\int_b^a f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$
7. $f(x) = c$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x บนช่วง $a \le x \le b$ แล้ว $\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\int_0^1 (x^2 - 2x + 3)\,dx$

วิธีทำ

$$\int_0^1 (x^2 - 2x + 3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 1 + 3\right) - 0 = \frac{7}{3} \quad \#$$

เราสามารถใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92 คำนวณหาปริพันธ์จำกัดเขต $\int_b^a f(x)\,dx$ ได้โดยมีลำดับขั้นตอนดังนี้

ใช้คำสั่ง ปริพันธ์จำกัดเขต โดยการกด ♥ หรือ 2< แล้วพิมพ์ฟังก์ชัน f(x) คั่นด้วยจุลภาค พิมพ์ตัวแปร (x) คั่นด้วยจุลภาค พิมพ์ ลิมิตล่าง a คั่นด้วยจุลภาค พิมพ์ ลิมิตบน b ปิดวงเล็บแล้วกด ÷ จะได้ค่าปริพันธ์จำกัดเขตที่ต้องการ

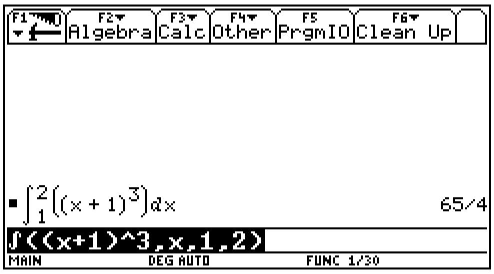
รูปแบบ : $\int(f(x), x, a, b)$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $\int_1^2 (x+1)^3\,dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x+1)^3\,dx &= \int_1^2 (x+1)^3\,d(x+1)\\ &= \left[\frac{(x+1)^4}{4}\right]_1^2\\ &= \frac{81}{4}-\frac{16}{4} = \frac{65}{4} \qquad \#\end{aligned}$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92

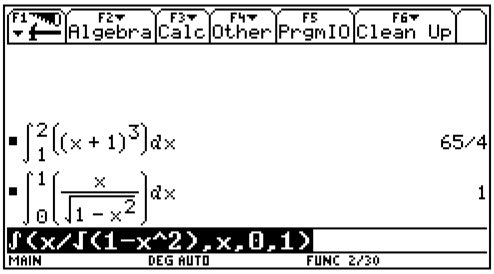


ตัวอย่างที่ 5 จงหาค่าของ $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int_0^1 x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(1-x^2)\\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^1\\ &= -\frac{1}{2}\cdot 2(0-1)\\ &= 1 \qquad \#\end{aligned}$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



การหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งโดยแคลคูลัส

ทฤษฎีบทที่ 1 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ไม่เป็นลบบนโดเมน [a, b]

ให้ A_a^b แทนพื้นที่ใต้เส้นโค้งของ f บนโดเมน [a, b]

แล้วจะมี c อย่างน้อย1 ตัว ระหว่าง a กับ b ซึ่ง $A_a^b = f(c)\cdot(b-a)$

ทฤษฎีบทที่ 2 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ไม่เป็นลบบนโดเมน [a, b] ให้ p คือเซตของจุดแบ่ง ซึ่งแบ่ง [a, b] ออกเป็น n ช่วงโดยที่

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$$

สำหรับ $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_{n-1} < x_n = b$

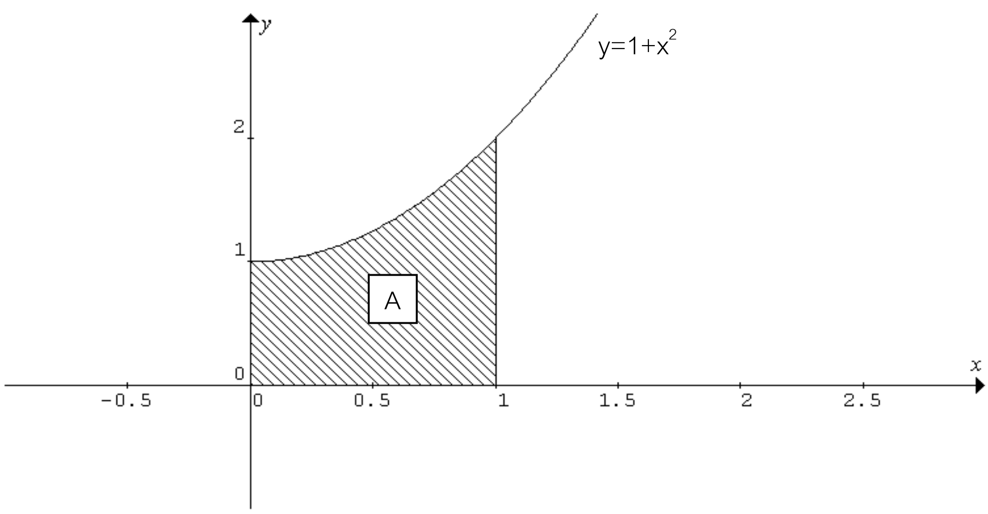
ถ้า c_k เป็นจำนวนจริงใด ๆ ในช่วงย่อยที่ k คือช่วง $[x_{k-1}, x_k]$

และ ให้ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ สำหรับ k = 1,2,…,n แล้ว

$$\lim_{\max \Delta x_k \to o} \sum_{k=0}^{n} f(c)\,\Delta x_k = A_a^b$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $f(x) = 1+x^2$ เหนือแกน x และอยู่ระหว่างเส้นตรง x = 0 และ x = 1

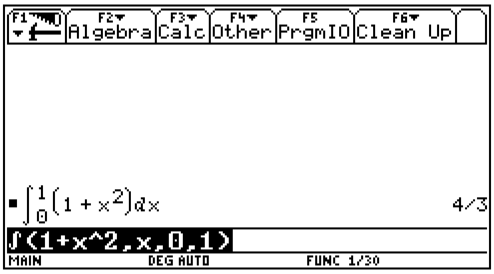
วิธีทำ พิจารณากราฟของ $f(x) = 1+x^2$ จากรูป



พื้นที่ส่วนที่แรเงา $A = \int_0^1 (1+x^2)\,dx$

$= \left.\frac{x^3}{3}+x\right|_0^1$

$= \frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}$ ตารางหน่วย #



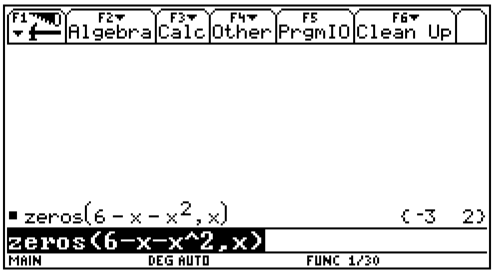
ตัวอย่างที่ 2 จงหาพื้นที่ใต้เส้นโค้ง ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยกราฟพาราโบลา $y = 6 - x - x^2$ และแกน x

วิธีทำ หาจุดตัดที่เส้นโค้งตัดแกน x คือหาค่า x เมื่อ y = 0 ดังนั้นให้ y = 0 จะได้

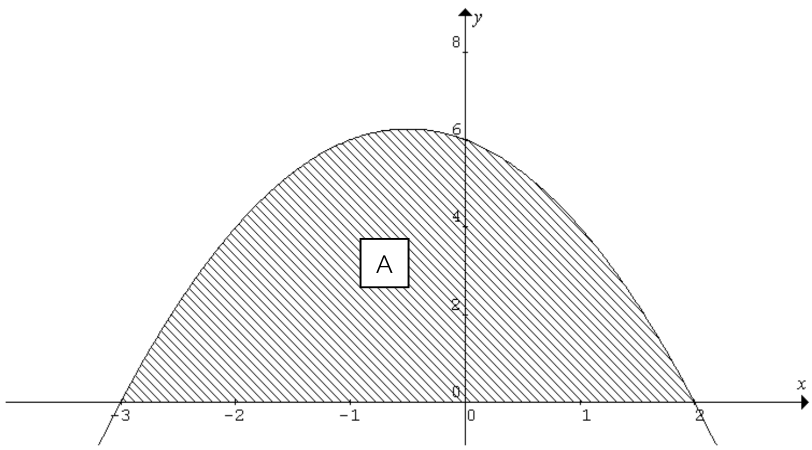
$6 - x - x^2 = 0$

และ $(x + 3)(2-x) = 0$

จากการแก้สมการหาจุดตัดจะได้ $x = -3$ และ $x = 2$



กราฟตัดแกน x ที่จุด (2, 0) และ (-3, 0) ดังรูป

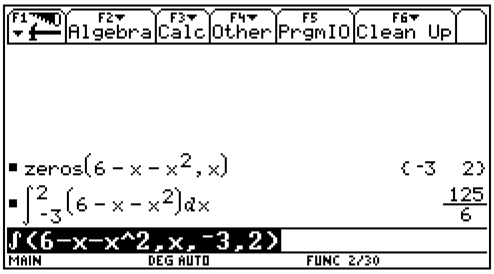


พื้นที่ส่วนที่แรเงา $A = \int_{-3}^{2}(6-x-x^2)\,dx$

$$= \left.(6x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})\right|_{-3}^{2}$$

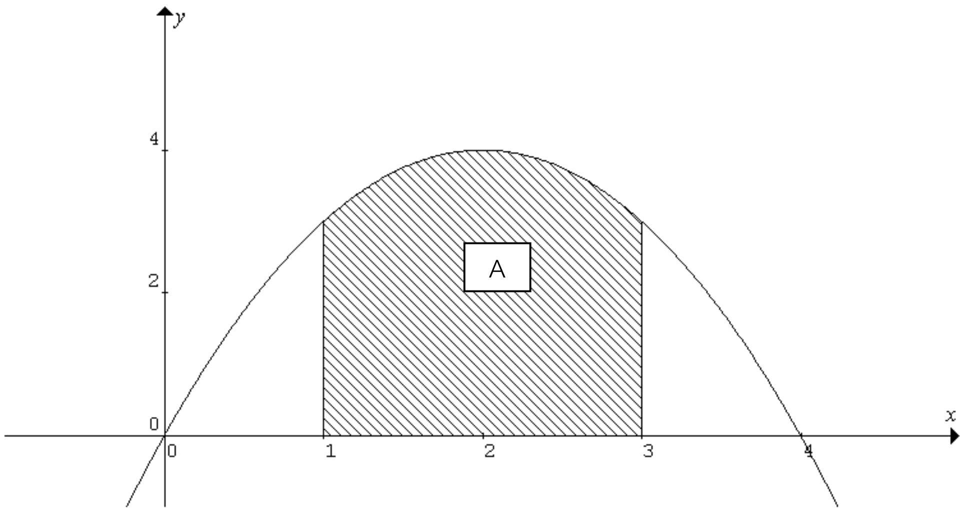
$$= (12-2-\frac{8}{3})-(-18-\frac{9}{2}+9)$$

$$= 20\frac{5}{6}$$ ตารางหน่วย #



ตัวอย่างที่ 3 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 4x - x^2$ แกน x เส้นตรง $x = 1$ และ $x = 3$

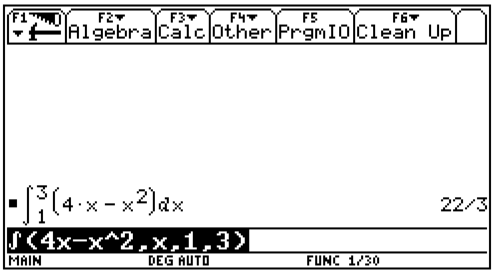
วิธีทำ



พื้นที่ส่วนที่แรเงา $A = \int_{1}^{3}(4x-x^2)\,dx$

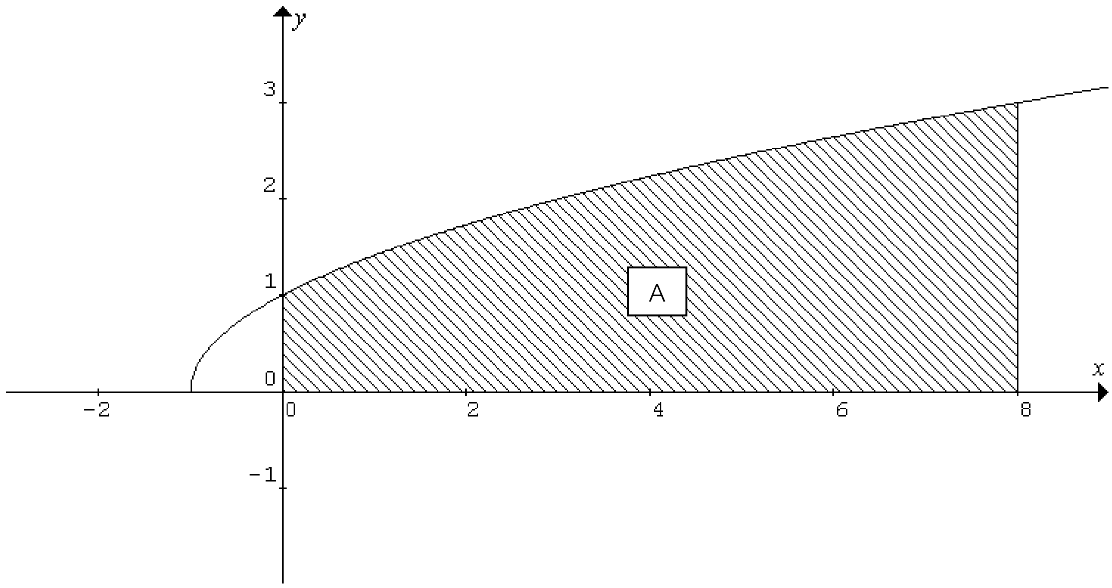
$$= \left.2x^2-\frac{x^3}{3}\right|_{1}^{3}$$

$$= 18-9-2+\frac{1}{3} = \frac{22}{3}$$ ตารางหน่วย #



ตัวอย่างที่ 4 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y=\sqrt{x+1}$ แกนx แกนy และ เส้นตรง $x = 8$

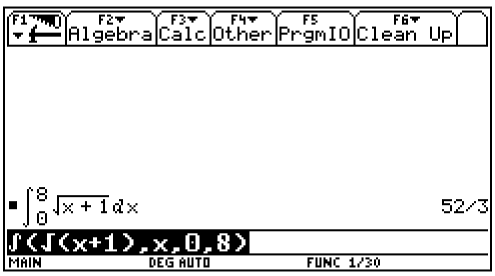
วิธีทำ



พื้นที่ส่วนที่แรเงา $\quad A = \int_0^8 \sqrt{x+1}\,dx$

$$= \left.\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^8 = \frac{2}{3}(9)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}(27) - \frac{2}{3} = \frac{52}{3}$$ ตารางหน่วย #



สื่อการเรียนการสอน

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. ใบงาน T7 2. เครื่องคำนวณเชิงกราฟ 3. แผ่นใส	1. ใบงาน C7 2. แผ่นใส

กิจกรรมการเรียนการสอน

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
ขั้นนำ ครูบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักศึกษาทราบ แล้วทบทวนเนื้อหาเรื่องการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตที่เรียนมา **ขั้นสอน** 1. ครูบอกนิยามปริพันธ์จำกัดเขตและคุณสมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต พร้อมยกตัวอย่างประกอบ 3 – 4 ตัวอย่างโดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส และแสดงการคำนวณโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟทั้ง 2 วิธี 2. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน T7 ข้อ 1 โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟตรวจสอบคำตอบ แล้วสุ่มนักเรียนมาเสนอผลงานที่หน้าชั้นเรียน 3. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน T7 ข้อ 2 พร้อมตอบคำถาม 4. ครูสรุปการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งอีกครั้งพร้อมยกตัวอย่างประกอบ 5. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน T7 ข้อ 3 แล้วสุ่มนักเรียนมาเสนอผลงานที่หน้าชั้นเรียน 6. ครูให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด จากแบบ-	**ขั้นนำ** ครูบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักศึกษาทราบ แล้วทบทวนเนื้อหาเรื่องการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตที่เรียนมา **ขั้นสอน** 1. ครูบอกนิยามปริพันธ์จำกัดเขตและคุณสมบัติของปริพันธ์จำกัดเขต พร้อมยกตัวอย่างประกอบ 3 – 4 ตัวอย่างโดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส 2. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน C7 ข้อ 1 3. ครูอธิบายหลักการ การหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง พร้อมยกตัวอย่างประกอบ 4. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน T7 ข้อ 3 แล้วสุ่มนักเรียนมาเสนอผลงานที่หน้าชั้นเรียน 5. ครูให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด จากแบบ-เรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 184 และ 196 โดยแสดงวิธีทำลงในสมุด

เรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 184 และ 196 โดยแสดงวิธีทำลงในสมุด แล้วใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟตรวจสอบคำตอบ	
ขั้นสรุป	**ขั้นสรุป**
ครูและนักศึกษาช่วยกันสรุปการหาปริพันธ์จำกัดเขตและการหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งอีกครั้ง	ครูและนักศึกษาช่วยกันสรุปการหาปริพันธ์จำกัดเขตและการหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งอีกครั้ง

การวัดและประเมินผล

กลุ่มทดลอง	**กลุ่มควบคุม**
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักศึกษา	1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักศึกษา
2. สังเกตจากการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในการทำใบงานและตอบคำถามในใบงาน	2. สังเกตจากการการทำใบงานและตอบคำถามในใบงาน
3. การทำงานที่ได้รับมอบหมาย	3. การทำงานที่ได้รับมอบหมาย
4. สังเกตจากการนำเสนอผลงานหน้าชั้น	4. สังเกตจากการนำเสนอผลงานหน้าชั้น
5. การทำแบบฝึกหัดจากแบบเรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 184 และ 196	5. การทำแบบฝึกหัด จากแบบเรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 184 และ 196

ใบงาน T7

1. จงหาปริพันธ์จำกัดเขตที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งตรวจสอบคำตอบที่ได้จากการใช้คำสั่งในเครื่องคำนวณ TI – 92

1.1 $\int_3^5 x^2\,dx$

วิธีทำ $\int_3^5 x^2\,dx$ = …………………………

= …………………………

= ………………………… #

1.2 $\int_0^3 (3-2x+x^2)\,dx$

วิธีทำ $\int_0^3 (3-2x+x^2)\,dx$ = …………………………

= …………………………

= ………………………… #

1.3 $\int_0^1 (x+1)^{10}\,dx$

วิธีทำ $\int_0^1 (x+1)^{10}\,dx$ = …………………………

= …………………………

= ………………………… #

1.4 $\int_0^4 (x-3)(x+3)\,dx$

วิธีทำ $\int_0^4 (x-3)(x+3)\,dx$ = …………………………

= …………………………

= ………………………… #

1.5 $\int_3^5 (2x-3)(x+4)\,dx$

วิธีทำ $\int_3^5 (2x-3)(x+4)\,dx$ = …………………………

= …………………………

= …………………………

=………………………… #

2. ให้นักศึกษา ศึกษาจากการใช้เครื่องคำนวณ TI – 92 หาพื้นที่ต่อไปนี้

การใช้เครื่องคำนวณ TI – 92 หาพื้นที่

ในกรณีที่การแบ่งส่วน p เป็นการแบ่งส่วนปกติ เพื่อความรวดเร็วเราสามารถจะใช้เครื่องคำนวณ TI – 92 ในการเขียนรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมประมาณค่าตามจำนวนที่ต้องการ พร้อมทั้งคำนวณหาผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมเหล่านั้น ในที่นี้จะแสดงให้ดูเป็นตัวอย่างโดยการเลือกจุด x_i^* ในช่วงปิดย่อย $[x_{i-1}, x_i]$ เป็นสามแบบคือ

- จุดปลายช่วงซ้ายมือ
- จุดปลายช่วงขวามือ
- จุดกึ่งกลางช่วง

กำหนดฟังก์ชันต่อเนื่อง f(x) บนช่วง [a, b] และ $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in [a, b]$ ให้ S เป็นบริเวณที่อยู่เหนือแกน x และอยู่ใต้เส้นโค้งของ f จาก x = a และ x = b

ในการใช้เครื่องคำนวณ TI – 92 เราจำเป็นต้องออกคำสั่งเพื่อให้เครื่องเขียนรูปสี่เหลี่ยมประมาณค่าตามจำนวนที่ต้องการ โดยมีลำดับขั้นตอนวิธีทำดังนี้

- เขียนกราฟของ f โดยกำหนด y1(x) = f(x) และกำหนด $\exists$

ให้ xmin = a และ xmax = b (สำหรับ ymin และ ymax ให้กำหนดตามความเหมาะสมและสวยงาม)

- ในHome Screen กำหนดคำสั่งให้เครื่องคำนวณเขียนรูปสี่เหลี่ยม

ประมาณค่าจำนวน n รูป (ต้องกำหนดจำนวนเต็มบวก n ที่ต้องการ)

(1) เลือกจุด x_i^* เป็นจุดปลายช่วงซ้ายมือ รูปแบบของคำสั่งเป็นดังนี้

$$\frac{x\max - x\min}{n} \to d:\text{For } i,0,n-1: x\min + i\times d \to x: yl(x) \to y: \text{Line}\, x,0,x,y: \text{Line}\, x,y,x+d,y: \text{Line}\, x+d,y,x+d,0: \text{EndFor}$$

(2) เลือกจุด x_i^* เป็นจุดปลายช่วงขวามือ รูปแบบของคำสั่งเป็นดังนี้

$$\frac{x\max - x\min}{n} \to d:\text{For } i,0,n-1: x\min + i\times d \to x: yl(x+d) \to y: \text{Line}\, x,0,x,y: \text{Line}\, x,y,x+d,y: \text{Line}\, x+d,y,x+d,0: \text{EndFor}$$

(3) เลือกจุด x_i^* เป็นจุดกึ่งกลางช่วงขวา รูปแบบของคำสั่งเป็นดังนี้

$$\frac{x\max - x\min}{n} \rightarrow d\text{:For } i,0,n-1\text{:}x\min + i \times d \rightarrow x\text{:}yl(x+\frac{d}{2}) \rightarrow y\text{:Line}\,x,0,x,y\text{:}$$
$$\text{Line}\,x,y,x+d,y\text{:Line}\,x+d,y,x+d,0\text{:EndFor}$$

ถ้าต้องการหาผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้ง n รูป ให้กลับไปคำนวณที่ Home Screen โดยใช้คำสั่ง $\sum_{i=0}^{n-1} yl(x\min + i \times d) \times d$ หรือ $\sum_{i=0}^{n-1} yl(x\min + i \times d + d) \times d$ หรือ $\sum_{i=0}^{n-1} yl(x\min + i \times d + \frac{d}{2}) \times d$ ตามลำดับ

หมายเหตุ ในกรณีที่ต้องการเปลี่ยนจำนวนเต็มบวก n เราจำเป็นต้องออกคำสั่งให้ลบรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเดิมออกก่อน โดยการกด $\boxed{\text{F4}}$ (Regraph) ต่อจากนั้นให้เรียกคำสั่งการสร้างรูปสี่ เหลี่ยมเดิมมาแก้ไขเฉพาะจำนวนเต็มบวก n และ n-1

สัญลักษณ์ ถ้าเลือกจุด x_i^* เป็นจุดปลายช่วงซ้ายมือ แล้วผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมประมาณค่าทั้ง n รูปจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ L_n

ถ้าเลือกจุด x_i^* เป็นจุดปลายช่วงขวามือ แล้วผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมประมาณค่าทั้ง n รูปจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ R_n

ถ้าเลือกจุด x_i^* เป็นจุดกึ่งกลางช่วง แล้วผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมประมาณค่าทั้ง n รูปจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ M_n

ตัวอย่างที่ 1 จงหาพื้นที่ของบริเวณ S ที่อยู่เหนือแกน x และอยู่ใต้เส้นโค้ง $y = f(x) = x^2$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 2$

(1) จงใช้เครื่องคำนวณ TI – 92 สร้างรูปสี่เหลี่ยมประมาณค่าจำนวน 10 รูป โดยแบ่งช่วงปิด [0,2] ออกเป็น 10 ช่วงย่อยความกว้างเท่า ๆ กัน และเลือกจุดปลายทางซ้ายมือของแต่ละช่วงย่อยในการกำหนดความสูงของรูปสี่เหลี่ยม พร้อมทั้งคำนวณหาผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมประมาณค่าทั้ง 10 รูป

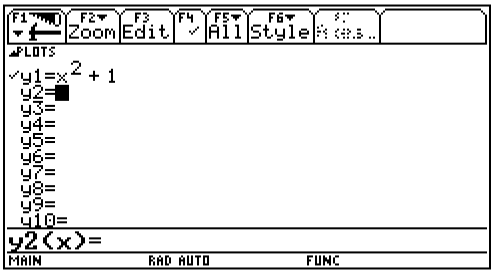
(2) จงแก้ไขโดยเพิ่มจำนวนรูปสี่เหลี่ยมประมาณค่าจาก 10 รูป เป็น 20 และ 40 รูป พร้อมทั้งคำนวณหาผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมประมาณค่าทั้งหมดที่สร้างได้

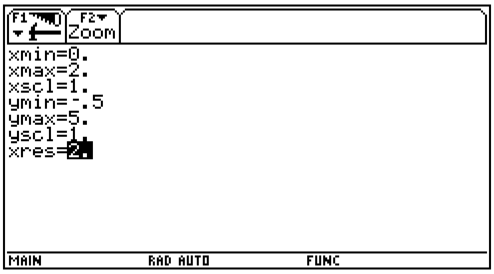
(3) จงหาผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมประมาณค่าเมื่อมีจำนวน n รูป

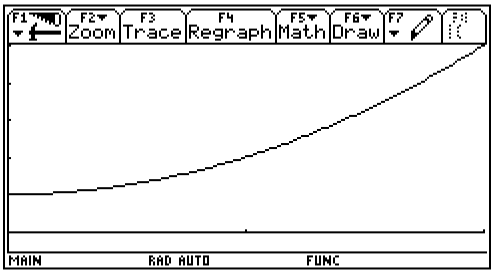
(4) จงหาพื้นที่ของบริเวณ S

วิธีทำ (1) ภาพต่อไปนี้แสดงขั้นตอนวิธีการใช้เครื่องคำนวณสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 10 รูป

- เขียนกราฟของ f โดยกำหนด $y1(x) = x^2+1$
- และกำหนด Window ให้ xmin = 0 , xmax = 2 , ymin = -0.5 และ ymax = 5

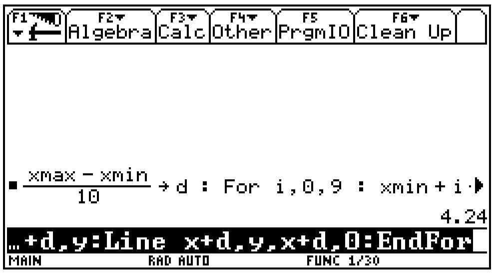


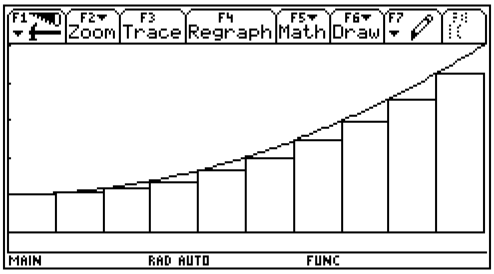




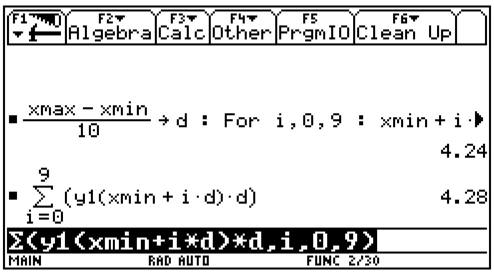
- ใน Home Screen กำหนดคำสั่งให้เครื่องคำนวณเขียนรูปสี่เหลี่ยมประมาณค่าจำนวน 10 รูป

$$\frac{x\max - x\min}{10} \rightarrow d\text{:For } i,0,9\text{:}x\min + i\times d \rightarrow x\text{:}yl(x+d) \rightarrow y\text{:Line}\,x,0,x,y\text{:}$$
$$\text{Line}\,x,y,x+d,y\text{:Line}\,x+d,y,x+d,0\text{:EndFor}$$





- ต้องการหาผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้ง 10รูป ให้กลับไปคำนวณที่ Home Screen โดยใช้คำสั่ง $\sum_{i=0}^{9} yl(x\min + i\times d)\times d$

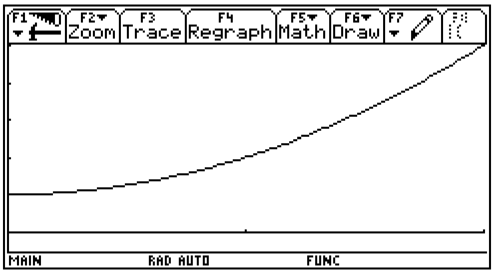


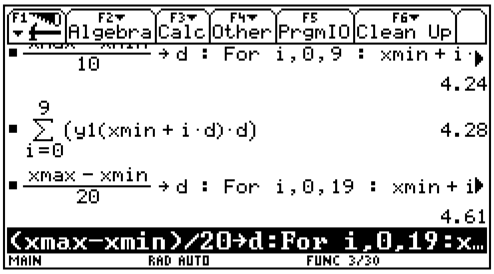
จากการคำนวณในภาพสุดท้ายจะได้ว่า $L_{10} = 4.28$ ตารางหน่วย

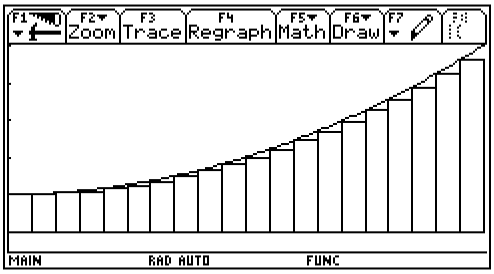
(2) n = 20

- ต้องการเปลี่ยนจำนวนเต็มบวก 10 เราจำเป็นต้องออกคำสั่งให้ลบรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเดิมออกก่อน โดยการกด $\boxed{\text{F4}}$ (Regraph)
- ใน Home Screen กำหนดคำสั่งให้เครื่องคำนวณเขียนรูปสี่เหลี่ยมประมาณค่าจำนวน 20 รูป

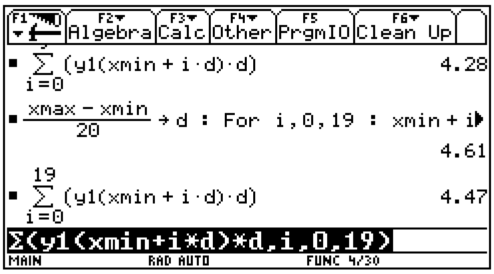
$$\frac{x\max - x\min}{20} \rightarrow d:\text{For } i,0,19:x\min + i \times d \rightarrow x:yl(x+d) \rightarrow y:\text{Line}\,x,0,x,y:$$
$$\text{Line}\,x,y,x+d,y:\text{Line}\,x+d,y,x+d,0:\text{EndFor}$$





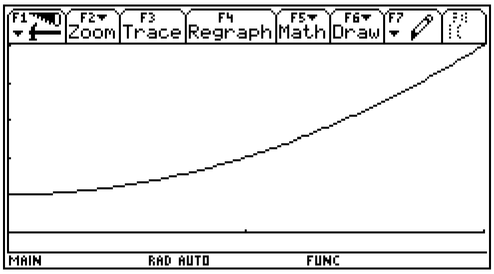


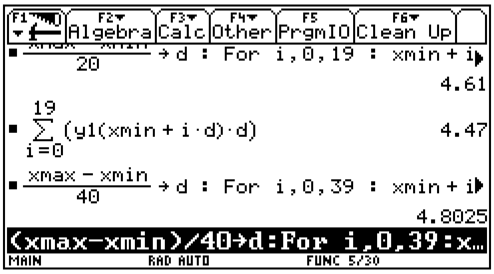
- ต้องการหาผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากทั้ง 20รูป ให้กลับไปคำนวณที่ Home Screen โดยใช้คำสั่ง $\sum_{i=0}^{19} yl(x\min + i \times d) \times d$

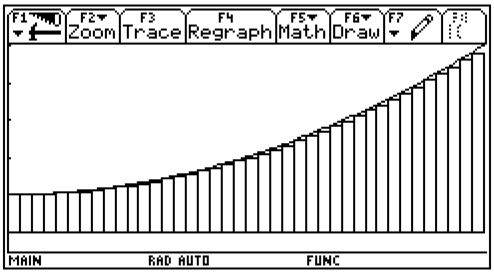


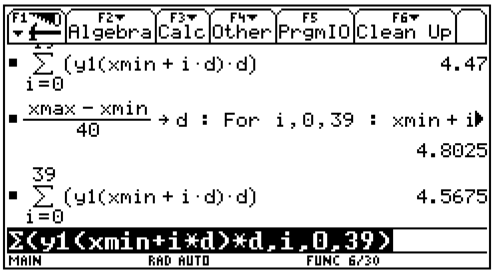
จากการคำนวณในภาพสุดท้ายจะได้ว่า L_{20} = 4.47 ตารางหน่วย

$n = 40$









จากการคำนวณในภาพสุดท้ายจะได้ว่า $L_{40} = 4.5675$ ตารางหน่วย

เมื่อนักศึกษาเปลี่ยนค่า n ให้มากขึ้นสามารถสรุปได้ว่า

……………………………………………………………………………………………….

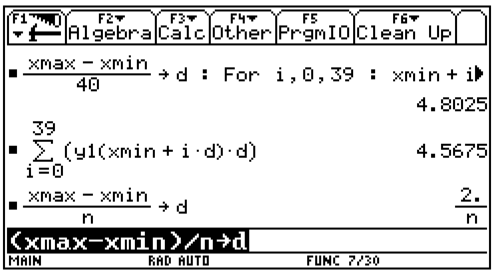
……………………………………………………………………………………………….

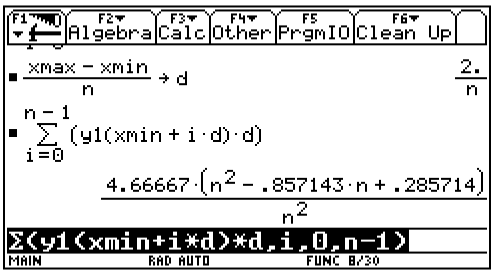
……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

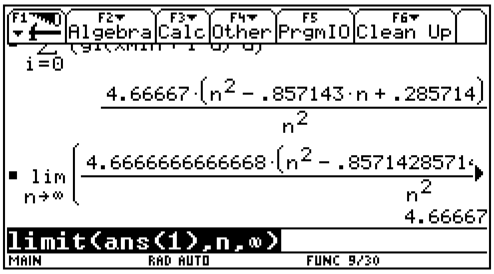
……………………………………………………………………………………………….

(3) การหาผลบวกของรูปสี่เหลี่ยมประมาณค่า n รูป เราไม่สามารถให้เครื่องคำนวณเขียนรูปสี่เหลี่ยมประมาณค่าได้ แต่สามารถหาผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมประมาณค่าทั้ง n รูปได้ดังนี้





ดังนั้น $L_n = \dfrac{4.66667(n^2 - .857143n + .285714)}{n^2}$



พื้นที่ $S = \lim\limits_{n\to\infty} L_n$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4.66667(n^2 - .857143n + .285714)}{n^2}$

$= 4.66667$ ตารางหน่วย #

2. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^3+3x+10$; $x \in [0,3]$

(1) จงใช้เครื่องคำนวณ TI – 92 สร้างรูปสี่เหลี่ยมประมาณค่าจำนวน 10, 30 และ 50 รูป โดยแบ่งช่วงปิด [0,3] ออกเป็น 10 , 30 และ 50 ช่วงย่อยความกว้างเท่า ๆ กัน และเลือกจุดกึ่งกลางของแต่ละช่วงย่อย ในการกำหนดความสูงของรูปสี่เหลี่ยมประมาณค่า พร้อมทั้งคำนวณหาผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมประมาณค่าทั้งหมดที่ได้ พร้อมกับตอบคำถามต่อไปนี้

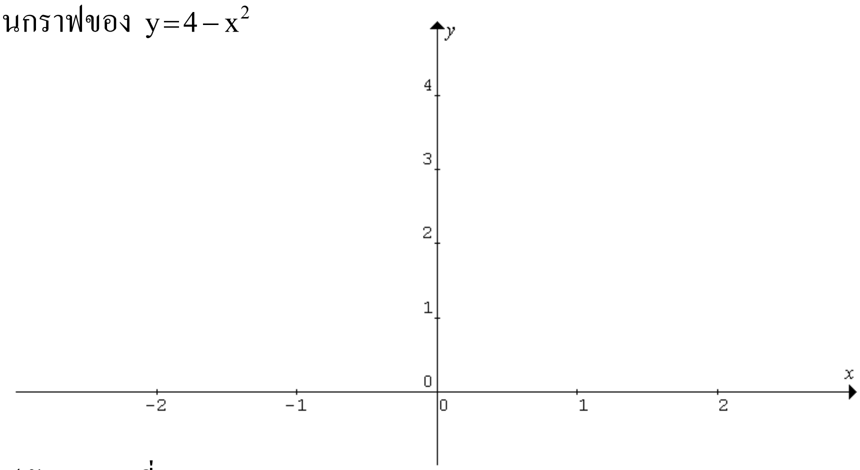
- จากการคำนวณ M_{10} = ... ตารางหน่วย
- จากการคำนวณ M_{30} = ... ตารางหน่วย
- จากการคำนวณ M_{50} = ... ตารางหน่วย

(2) จงหาพื้นที่ของบริเวณ S ที่อยู่เหนือแกน x และอยู่ใต้เส้นโค้งของ f จาก x = 0 ถึง x = 3

- จากการคำนวณ M_n = ... ตารางหน่วย
- พื้นที่ของ S = ...ตารางหน่วย

3. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y = 4 - x^2$ และแกนx โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราแล้วตอบคำถามต่อไปนี้

- จงเขียนกราฟของ $y = 4 - x^2$



- กราฟตัดแกน x ที่ จุด……………………………..
- พื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y = 4 - x^2$ และแกนx เท่ากับ………………………

ใบงาน C7

1 จงหาปริพันธ์จำกัดเขตที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1 $\int_3^5 x^2\,dx$

วิธีทำ $\int_3^5 x^2\,dx$ = ………………………….

= ………………………….

= …………………………. #

1.2 $\int_0^3 (3-2x+x^2)\,dx$

วิธีทำ $\int_0^3 (3-2x+x^2)\,dx$ = ………………………….

= ………………………….

= …………………………. #

1.3 $\int_0^1 (x+1)^{10}\,dx$

วิธีทำ $\int_0^1 (x+1)^{10}\,dx$ = ………………………….

= ………………………….

= …………………………. #

1.4 $\int_0^4 (x-3)(x+3)\,dx$

วิธีทำ $\int_0^4 (x-3)(x+3)\,dx$ = ………………………….

= ………………………….

= …………………………. #

1.5 $\int_3^5 (2x-3)(x+4)\,dx$

วิธีทำ $\int_3^5 (2x-3)(x+4)\,dx$ = ………………………….

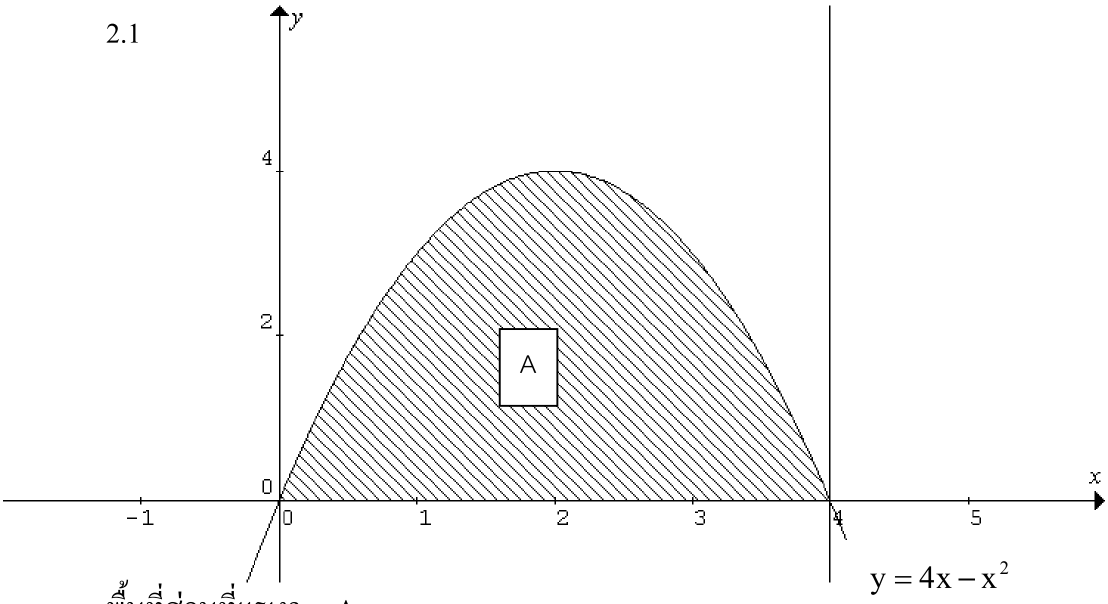
= ………………………….

= ………………………….

= …………………………. #

2. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่แรเงาต่อไปนี้

2.1



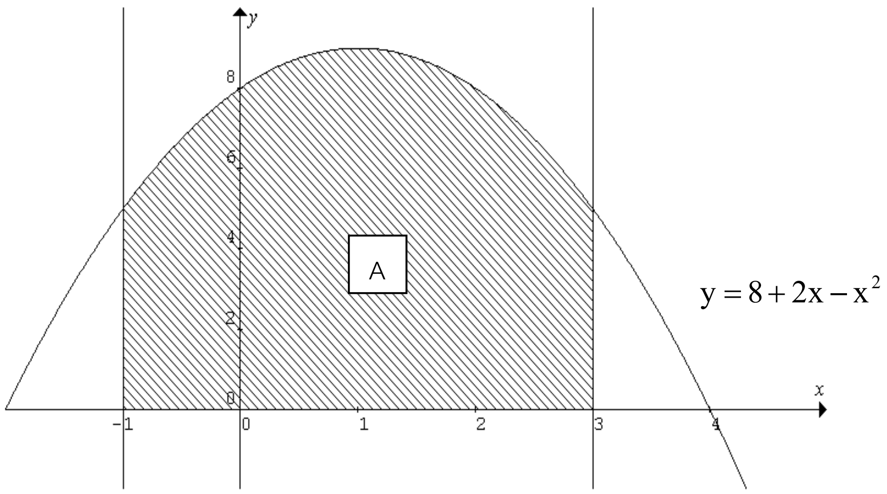
พื้นที่ส่วนที่แรเงา A = ……………………………………………..

= ……………………………………………..

= ……………………………………………..

= …………………………………………….. ตารางหน่วย

2.2



วิธีทำ พื้นที่ส่วนที่แรเงา A = ……………………………………………..

= ……………………………………………..

= ……………………………………………..

= …………………………………………….. ตารางหน่วย

แผนการสอนคาบ 1516
ปริพันธ์สองชั้น

สาระสำคัญ

1. ปริพันธ์สองชั้นของ f(x, y) เหนือบริเวณ R ใช้สัญลักษณ์คือ $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$
2. การหาปริพันธ์ซ้ำ จะทำได้โดยการหาปริพันธ์จากชั้นในสุดก่อนแล้วจึงหาค่าปริพันธ์ชั้นต่อมา
3. ความรู้เรื่องปริพันธ์สองชั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการหาพื้นที่ของบริเวณในระนาบxy

จุดประสงค์การเรียนรู้

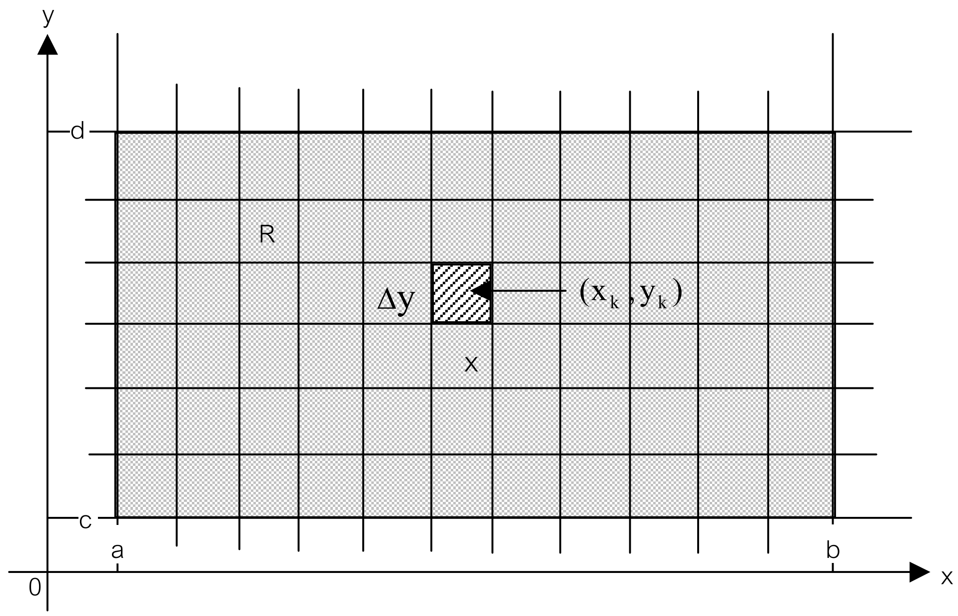
เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ

1. แสดงวิธีการหาปริพันธ์สองชั้นได้
2. นำความรู้เรื่องปริพันธ์สองชั้นไปประยุกต์ใช้หาพื้นที่ได้

เนื้อหา

ปริพันธ์สองชั้น

สัญลักษณ์ $\iint\limits_R f(x,y)dA$ เรียกว่า ปริพันธ์สองชั้น (Double Integrals) ของ f(x,y) เหนือบริเวณ R ซึ่งปกคลุมโดยตารางที่เกิดจากการตัดกันของเส้นขนานกับแกน x และแกน y ดังรูป



เส้นขนานกับแกนทั้งสองนี้ แบ่งระนาบออกเป็นชิ้นเล็ก ๆ ของพื้นที่ ΔA

$$\Delta A = \Delta x \Delta y = \Delta y \Delta x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

พื้นที่ชิ้นเล็ก ๆ เหล่านี้ อาจจะนับหรือไม่นับชิ้นที่มีบางส่วนอยู่ภายใน แต่จะพิจารณาเฉพาะ ΔA ที่อยู่ภายในอย่างสมบูรณ์

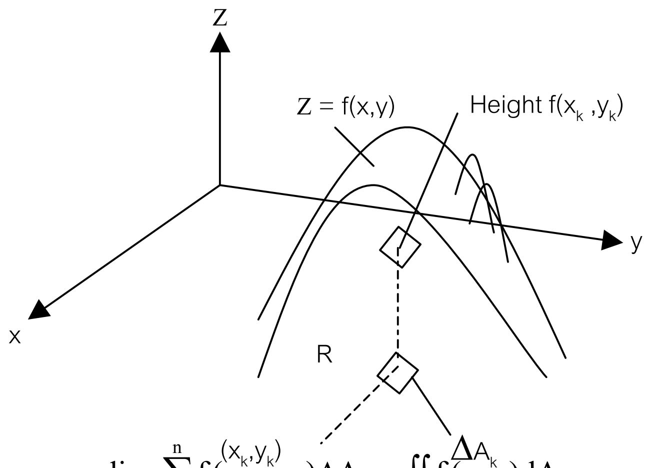
ถ้ากำหนดสมาชิก ΔA ที่อยู่ภายในบริเวณเป็น $\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3, ..., \Delta A_n$ ………(2) และให้ (x_k, y_k) เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่ใน ΔA_k จะเขียนผลรวมได้ว่า

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(3)$$

ถ้าฟังก์ชัน $f(x, y)$ ต่อเนื่องตลอด R และเส้นโค้งที่เป็นขอบของ R ต่อเนื่อง และมีความยาวรวมจำกัดแล้ว เมื่อตารางที่เกิดจากการตัดกันของเส้นที่ขนานกับแกน x และ แกน y ถี่ขึ้น นั่นคือลิมิตของ Δx และ Δy เข้าสู่ศูนย์ จะได้

$$\iint_R f(x, y)\,dxdy \text{ หรือ } \iint_R f(x, y)dA = \lim_{\Delta A \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(4)$$

นอกจากนี้ ปริพันธ์สองชั้น ยังแปลความหมายเสมือนปริมาตรในกรณีที่ f(x,y) เป็นบวกอีกด้วย สมมติว่าบริเวณ R เป็นฐานของทรงสามมิติ ดังรูป



$$\lim_{\Delta A \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k = \iint_R f(x, y)dA$$

ส่วนสูงเหนือจุด (x,y) กำหนดโดย Z =f(x,y) และ $f(x_k, y_k)\Delta A_K$ แทนปริมาตรโดยประมาณของทรงสามมิติบนฐาน ΔA_k ผลบวกในสมการ (3) ให้ค่าโดยประมาณของปริมาตรรวมของทรงสามมิติ และลิมิตของสมการ (4) ให้ปริมาตรที่แน่นอนแต่ยุ่งยากในการหาค่าจึงใช้ปริพันธ์ซ้ำ (Inerated Integrals)

$$\iint_R f(x, y)\,dxdy \text{ หรือ } \iint_R f(x, y)\,dydx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots..(5)$$

การหาปริพันธ์ซ้ำ $\iint_R f(x,y)\,dydx$ ทำได้ดังนี้

1. หาปริพันธ์ f(x,y) dy โดยเทียบกับ y ก่อน

2. หาปริพันธ์ผลลัพธ์จากข้อ 1 โดยเทียบกับ x ระหว่างลิมิต x = a และ x = b

คือเริ่มด้วยการหาปริพันธ์ชั้นในสุดก่อน แล้วจึงหาปริพันธ์ชั้นต่อมาดังนี้

$$\iint_R f(x,y)\,dydx = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

โดยให้ x เป็นเสมือนค่าคงตัว ขณะที่ทำการหาปริพันธ์ของ y

พิจารณาสมการ (6) ในรูปเรขาคณิต โดยพิจารณาทรงสามมิติที่มีฐานเหนือบริเวณ R ของระนาบxy และมีความสูงZ = f(x,y) ที่จุด (x,y) ของ R (เมื่อ f เป็นบวก) แล้วตัดทรงสามมิติโดยระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x ที่ x และที่ x+ dx อาจประมาณโดยเชิงอนุพันธ์ของปริมาตรกำหนดโดย dv = A(x) เมื่อ A(x) เป็นพื้นที่ภาคตัดขวางที่ตัดจากทรงสามมิติ โดยระนาบที่ x

พื้นที่ภาคตัดขวาง กำหนดโดยปริพันธ์ $A(x) = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy$ ……..…….(7)

ปริพันธ์ A(x) จาก x = a และ x=b จะได้ปริพันธ์ซ้ำในสมการ (6)

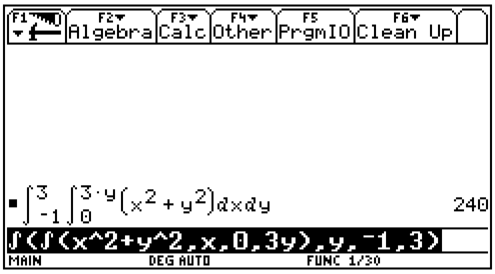
มีค่าเท่ากับ $V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dydx$ ซึ่งเป็นปริมาตรของทรงสามมิติ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\int_{-1}^{3}\int_0^{3y}(x^2+y^2)\,dxdy$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3}\int_0^{3y}(x^2+y^2)\,dxdy &= \int_{-1}^{3}\left(\frac{x^3}{3}+xy^2\right)\Bigg|_0^{3y} dy\\
&= \int_{-1}^{3}\left(\frac{27y^3}{3} 3y^3\right)dy\\
&= \int_{-1}^{3} 12y^3\,dy\\
&= 12\frac{y^4}{4}\Bigg|_{-1}^{3}\\
&= 3(3)^4 - 3(-1)^4\\
&= 243-3\\
&= 240 \qquad \#\end{aligned}$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}(1-6x^2y)\,dxdy$

วิธีทำ

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}(1-6x^2y)\,dxdy = \int_{-1}^{1}(x-2x^3y)\Big|_0^2\,dy$$

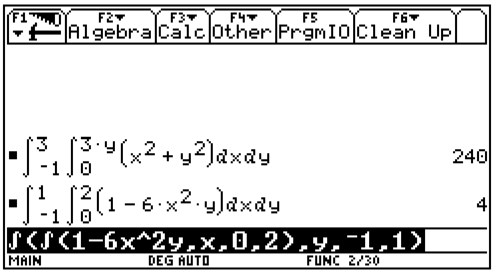
$$=\int_{-1}^{1}(2-16y)\,dy$$

$$=(2y-8y^2)\Big|_{-1}^{1}$$

$$=(2-8)-(-2-8)$$

$$=4 \qquad \#$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



ตัวอย่างที่ 3 จงหาปริมาตรของปริซึมฐานสามเหลี่ยมที่ตั้งอยู่ในระนาบ xy ซึ่งฐานมีขอบเขตเป็นสามเหลี่ยมประกอบด้วยเส้นตรง y= x , x=1 และมีขอบเขตโดยพื้นผิว z = 3-x-y

วิธีทำ *วิธีที่ 1*

$$V=\int_{0}^{1}\int_{0}^{x}(3-x-y)\,dydx$$

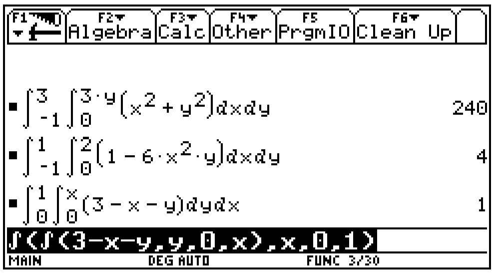
$$=\int_{0}^{1}\left[3y-xy-\frac{y^2}{2}\right]_{y=o}^{y=x}dx$$

$$=\int_{0}^{1}\left(3x-\frac{3x^2}{2}\right)dx$$

$$= \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \bigg|_{x=0}^{x=1}$$

$$= 1 \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย} \qquad \#$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



วิธีที่ 2

$$V = \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{x=y}^{x=1} dy$$

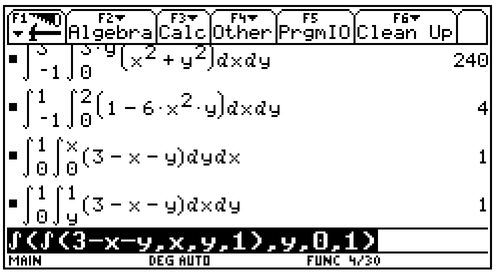
$$= \int_0^1 \left(3 - \frac{1}{2} - y - 3y + \frac{y^2}{2} + y^2 \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{5}{4} - 4y + \frac{3}{2} y^2 \right) dy$$

$$= \frac{5y}{2} - 2y^2 + \frac{y^3}{2} \bigg|_{y=0}^{y=1}$$

$$= 1 \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย} \qquad \#$$

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92



การหาพื้นที่โดยการหาปริพันธ์สองชั้น

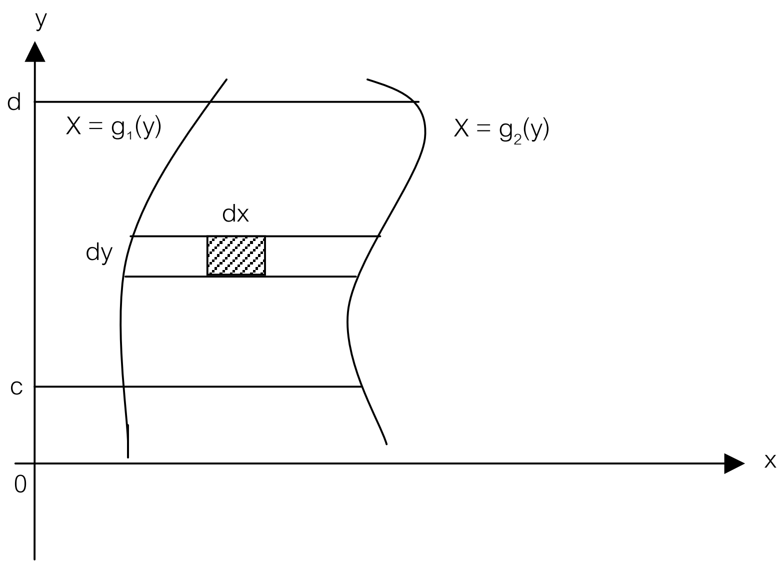
การนำไปใช้ของการหาปริพันธ์สองชั้น คือการหาพื้นที่ของบริเวณในระนาบ พื้นที่ถูกกำหนดโดยปริพันธ์ ของ

$$A = \iint dxdy = \iint dydx \qquad \text{…………(1)}$$

ในการปริพันธ์ เมื่อเลือกลำดับปริพันธ์ y ก่อน และ x จะได้

$$A = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dydx \qquad \text{………..(2)}$$

ซึ่งเป็นการหาพื้นที่ในระนาบ xy เสมือนว่า ถ้าพื้นที่มีขอบเขตประกอบด้วยเส้นโค้ง $x = g_1(y)$ อยู่ทางซ้ายและ $x = g_2(y)$ อยู่ทางขวา $y = c$ อยู่ทางด้านล่าง และ $y = d$ อยู่ทางด้านบน ดังรูป



หาปริพันธ์เทียบกับ x ก่อน ซึ่งจะแปรผันจาก $g_1(y)$ ไปยัง $g_2(y)$ แล้วจึงเทียบกับ y ซึ่งเป็นการเลือก $A = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dxdy$ ..……….(3)

การหาปริพันธ์ครั้งแรก เทียบกับ x เป็นการบวกด้วยกันของสมาชิก dA dx dy ทั้งหมดที่อยู่ในแนวนอนจากเส้นโค้ง $x = g_1(y)$ ทางซ้ายไปยังเส้นโค้ง $x = g_2(y)$ ทางขวา

การหาค่าของปริพันธ์ในสมการ (3) ให้ $A = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dxdy$

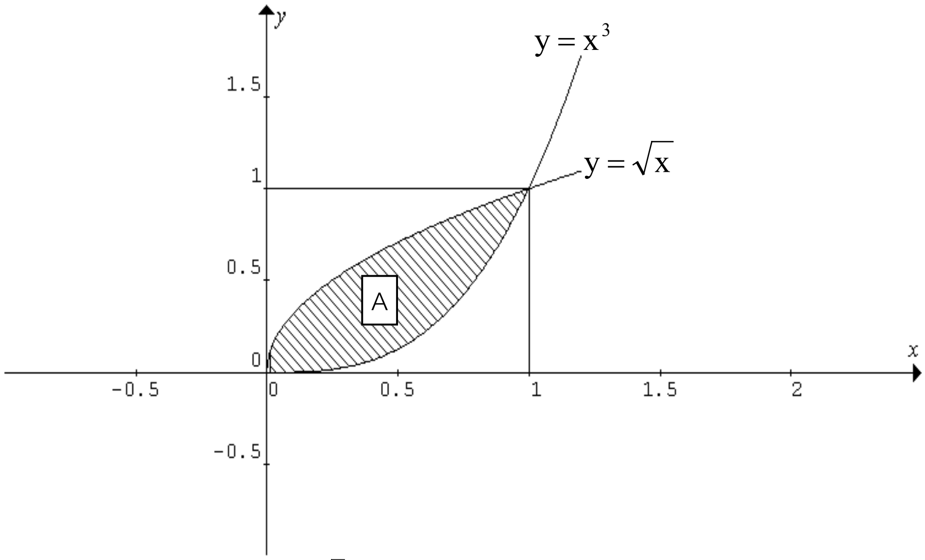
$$= \int_c^d x\Big|_{g_1(y)}^{g_2(y)} dy$$

$$= \int_c^d [g_2(y) - g_1(y)]\,dy$$

ปริพันธ์ครั้งหลังเป็นลิมิตของผลบวกของพื้นที่ชิ้นเล็กทุกชิ้นในแนวนอน

ตัวอย่างที่ 4 จงหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^3$ และ $y = \sqrt{x}$

วิธีทำ



พื้นที่ส่วนที่แรเงา $A = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dydx$

$$= \int_0^1 y\Big|_{y=x^3}^{y=\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)\,dx$$

$$= \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{4}$$

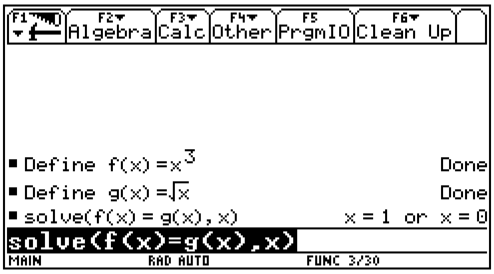
$$= \frac{5}{12}$$ ตารางหน่วย #

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92

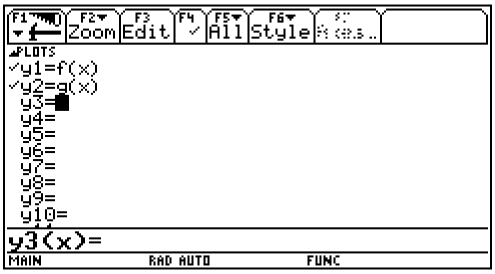
วิธีทำ $y = f(x) = x^3$ และ $y = g(x) = \sqrt{x}$

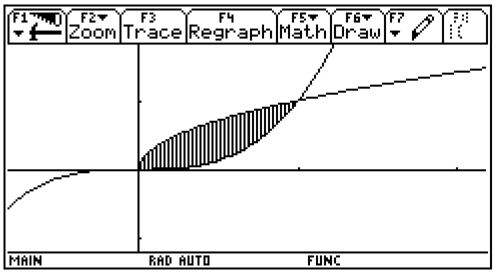
หาจุดตัดของ $f(x) = x^3$ และ $g(x) = \sqrt{x}$

แก้สมการ $x^3 = \sqrt{x}$

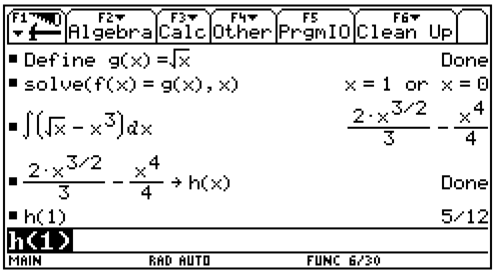


ดังนั้น จุดตัดของเส้นโค้งทั้งสองคือ (0,0) และ (1,1) ลักษณะของกราฟ f และพร้อมทั้งบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งของ f และ g แสดงได้ด้วยภาพ





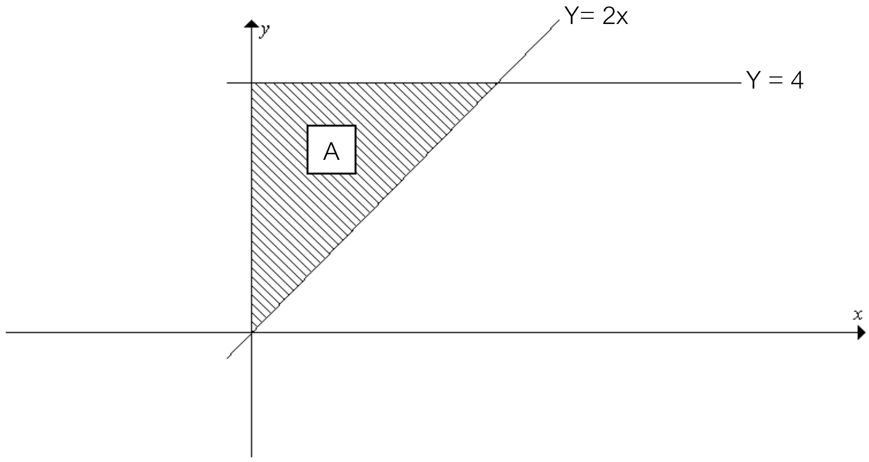
จะพบว่า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $g(x) \ge f(x)$ สำหรับทุก $x \in [0,1]$ ดังนั้นพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งของ f และ g คือ



$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 [g(x) - f(x)]\,dx \\
&= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)\,dx \\
&= \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{5}{12} \text{ ตารางหน่วย} \qquad \#
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาพื้นที่ปิดล้อมโดยแกน y เส้น$y = 2x$ และเส้น $y = 4$

วิธีทำ



พื้นที่ส่วนที่แรเงา $A = \int_0^4 \int_0^{\frac{Y}{2}} dxdy$

$$= \int_0^4 \frac{y}{2} dy$$

$$= \left. \frac{y^2}{4} \right|_0^4$$

$$= \frac{16}{4}$$

$= 4$ ตารางหน่วย #

ตัวอย่างที่ 6 จงหาพื้นที่ในระนาบ xy ซึ่งปิดล้อมด้วย $y^2 = 2x$ และ $y = x$

วิธีทำ จาก $y^2 = 2x$

$\therefore y = \pm\sqrt{2x}$ หาจุดตัดของเส้น $y^2 = 2x$ และ $y = x$ ดังนี้

$$x = \pm\sqrt{2x}$$

$$x^2 = 2x$$

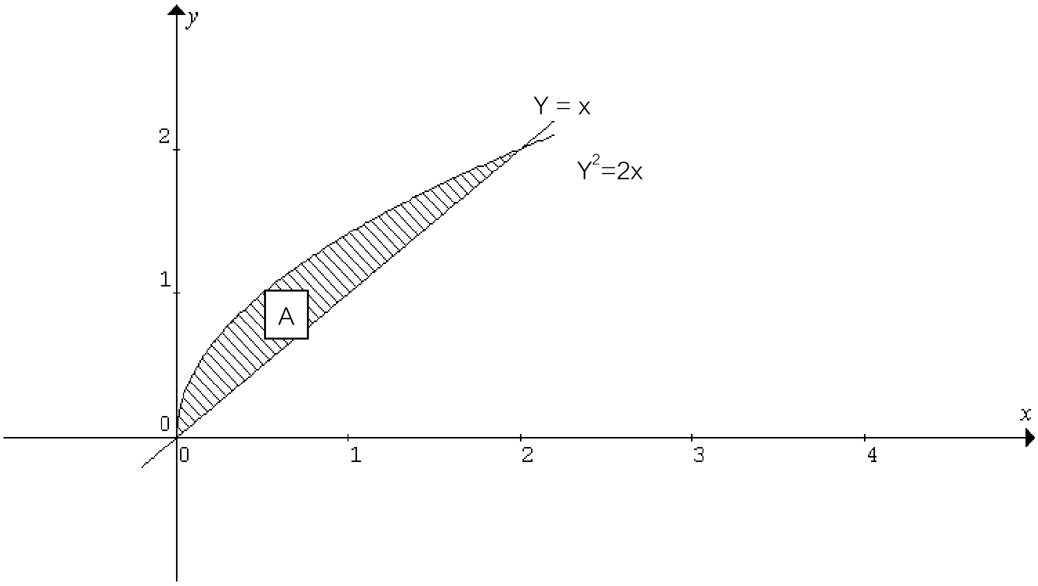
$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0,2$$

$$y = 0,2$$

$\therefore$ จุดตัดคือ (0,0) และ (2,2) เขียนรูปได้ดังนี้



พื้นที่ส่วนที่แรเงา $A = \int_0^2 \int_x^{\sqrt{2x}} dydx$

$$= \int_0^2 (\sqrt{2x} - x)\, dx$$

$$= \left(\sqrt{2}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}\right) - 2$$

$$= \frac{8}{3} - 2$$

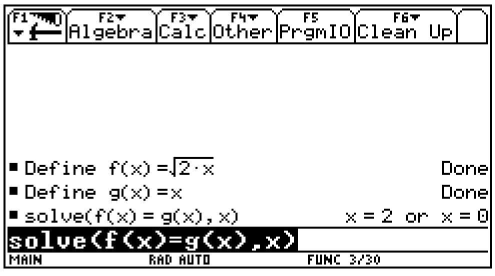
$$= \frac{2}{3}$$ ตารางหน่วย #

คำนวณหาปริพันธ์โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI- 92

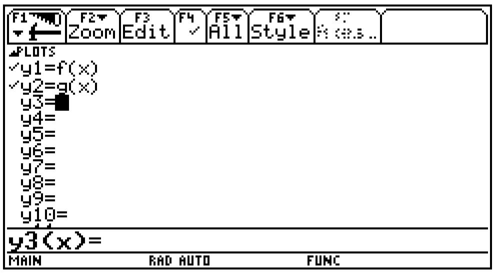
วิธีทำ $y^2 = f^2(x) = 2x$ และ $y = g(x) = x$

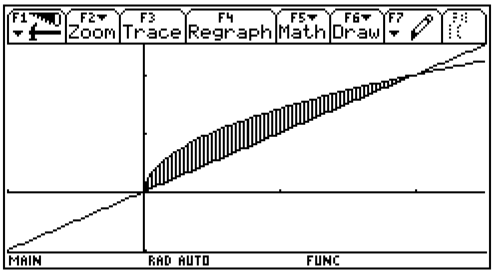
หาจุดตัดของ $f^2(x) = 2x$ และ $g(x) = x$

แก้สมการ $x = \pm\sqrt{2x}$

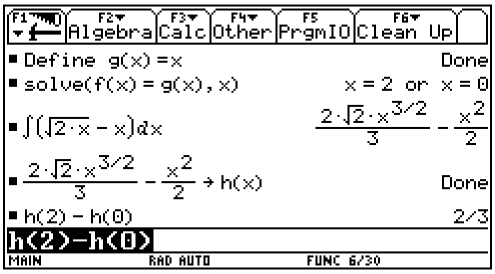


ดังนั้น จุดตัดของเส้นโค้งทั้งสองคือ (0,2) และ (0,2) ลักษณะของกราฟ f และ g พร้อมทั้งบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งของ f และ g แสดงได้ด้วยภาพ





จะพบว่า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ g (x) $\geq$ f (x) สำหรับทุก $x \in [0,2]$ ดังนั้นพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งของ f และ g คือ



$$A = \int_0^2 [g(x) - f(x)]dx$$

$$= \int_0^2 (\sqrt{2x} - x)\,dx$$

$$= \left. \left(\sqrt{2}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2} \right) \right|_0^2$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}\right) - 2$$

$$= \frac{8}{3} - 2$$

$$= \frac{2}{3}$$ ตารางหน่วย #

สื่อการเรียนการสอน

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. ใบงาน T8 2. เครื่องคำนวณเชิงกราฟ 3. แผ่นใส	1. ใบงาน C8 2. แผ่นใส

กิจกรรมการเรียนการสอน

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
ขั้นนำ ครูบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักศึกษาทราบ แล้วทบทวนเนื้อหาเรื่องการหาปริพันธ์จำกัดเขตที่เรียนมา **ขั้นสอน** 1. ครูอธิบายปริพันธ์สองชั้น พร้อมยกตัวอย่างประกอบ 3 – 4 ตัวอย่างโดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส และแสดงการคำนวณโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ทั้ง 2 วิธี 2. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน T8 ข้อ 1 โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟตรวจสอบคำตอบ แล้วสุ่มนักเรียนมาเสนอผลงานที่หน้าชั้นเรียน 3. ครูอธิบายการหาพื้นที่โดยการหาปริพันธ์สองชั้น พร้อมยกตัวอย่างประกอบ 3 ตัวอย่างโดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส และแสดงการคำนวณโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ทั้ง 2 วิธี 4. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน T8 ข้อ 2 โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟตรวจสอบคำตอบ แล้วสุ่มนักเรียนมาเสนอผลงานที่หน้าชั้นเรียน 5. ครูให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด จากแบบ-เรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 204 และ 210 โดยแสดงวิธีทำลงในสมุด	**ขั้นนำ** ครูบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักศึกษาทราบ แล้วทบทวนเนื้อหาเรื่องการหาปริพันธ์จำกัดเขตที่เรียนมา **ขั้นสอน** 1. ครูอธิบายปริพันธ์สองชั้น พร้อมยกตัวอย่างประกอบ 3 – 4 ตัวอย่างโดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส 2. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน C8 ข้อ 1 แล้วสุ่มนักเรียนมาเสนอผลงานที่หน้าชั้นเรียน 3. ครูอธิบายการหาพื้นที่โดยการหาปริพันธ์สองชั้น พร้อมยกตัวอย่างประกอบ 3 ตัวอย่างโดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส 4. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน T8 ข้อ 2 แล้วสุ่มนักเรียนมาเสนอผลงานที่หน้าชั้นเรียน 5. ครูให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด จากแบบ-เรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 204 และ 210 โดยแสดงวิธีทำลงในสมุด

แล้วใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟตรวจสอบคำตอบ **ขั้นสรุป** ครูและนักศึกษาช่วยกันสรุปการหาปริพันธ์สองชั้นและการหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งอีกครั้ง	 **ขั้นสรุป** ครูและนักศึกษาช่วยกันสรุปการหาปริพันธ์สองชั้นและการหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งอีกครั้ง

การวัดและประเมินผล

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักศึกษา 2. สังเกตจากการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในการทำใบงานและตอบคำถามในใบงาน 3. การทำงานที่ได้รับมอบหมาย 4. สังเกตจากการนำเสนอผลงานหน้าชั้น 5. การทำแบบฝึกหัดจากแบบเรียน คณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 204 และ 210	1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักศึกษา 2. สังเกตจากการการทำใบงานและตอบคำถามในใบงาน 3. การทำงานที่ได้รับมอบหมาย 4. สังเกตจากการนำเสนอผลงานหน้าชั้น 5. การทำแบบฝึกหัด จากแบบเรียน คณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 204 และ 210

ใบงาน T8

1. นักศึกษาแสดงวิธีการหาปริพันธ์ซ้ำต่อไปนี้แล้วใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟตรวจสอบคำตอบ

1.1 $\int_1^2\int_0^3 (1+8xy)\,dydx$

วิธีทำ $\int_1^2\int_0^3 (1+8xy)\,dydx$ = ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= …………………………………… #

1.2 $\int_0^2\int_{-1}^1 (1-6x^2y)\,dydx$

วิธีทำ $\int_0^2\int_{-1}^1 (1-6x^2y)\,dydx$ = ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= …………………………………… #

1.3 $\int_0^4\int_0^1 (x+2y)\,dydx$

วิธีทำ $\int_0^4\int_0^1 (x+2y)\,dydx$ = ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= …………………………………… #

1.4 $\int_0^2\int_0^{2x} xy\,dydx$

วิธีทำ $\int_0^2\int_0^{2x} xy\,dydx$ = ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= …………………………………… #

1.5 $\int_1^2 \int_0^y x^2 y^2 \, dxdy$

วิธีทำ $\int_1^2 \int_0^y x^2 y^2 \, dxdy$ = ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

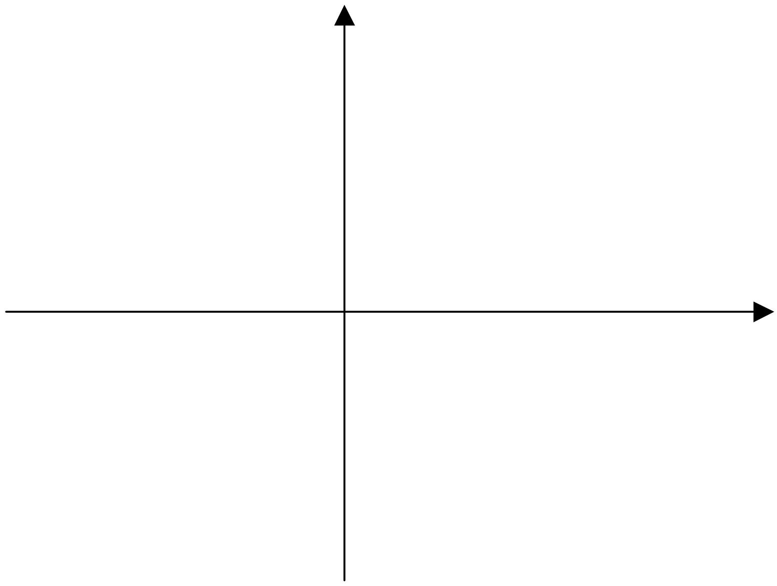
= …………………………………… #

2. ให้นักศึกษาใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟหาพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้และตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 $y = x$ และ $y = 3x - x^2$

วิธีทำ จุดตัดของเส้นตรง $y = x$ และเส้นโค้ง $y = 3x - x^2$ คือ………………..

ลักษณะของกราฟ $y = x,\ y = 3x - x^2$ พร้อมทั้งบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นตรง $y = x$ และเส้นโค้ง $y = 3x - x^2$ แสดงได้ด้วยภาพดังนี้



พื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นตรง $y = x$ และเส้นโค้ง $y = 3x - x^2$ เท่ากับ ……

……………..……………………………………………………………………………..

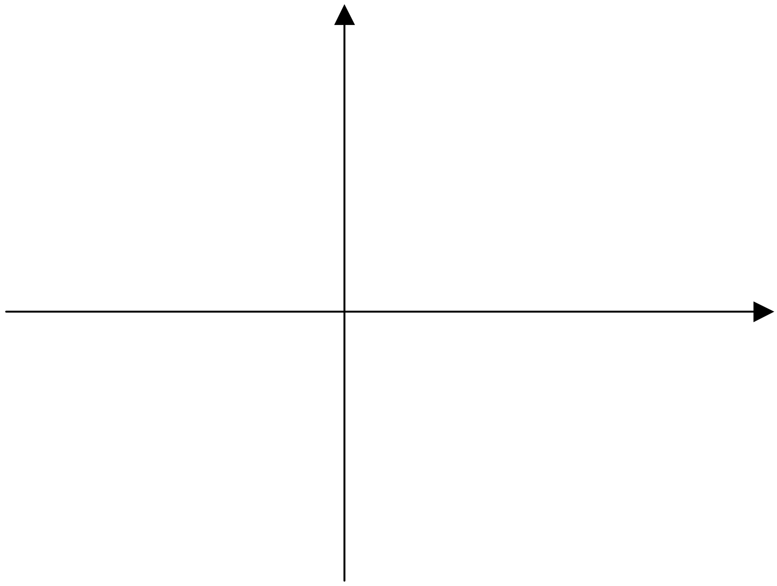
……………..……………………………………………………………………………..

……………..……………………………………………………………………………..

2.2 $y^2 = x$ และ $y = x^2$

วิธีทำ จุดตัดของ $y^2 = x$ และ $y = x^2$ คือ………………..

ลักษณะของกราฟ $y^2 = x$ และ $y = x^2$ พร้อมทั้งบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งของ $y^2 = x$ และ $y = x^2$ แสดงได้ด้วยภาพดังนี้



พื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y^2 = x$ และ $y = x^2$ เท่ากับ …………..

……………..………………………………………………………………………………..

……………..………………………………………………………………………………..

……………..………………………………………………………………………………..

ใบงาน C8

1. นักศึกษาแสดงวิธีการหาปริพันธ์ซ้ำต่อไปนี้

1.1 $\int_1^2\int_0^3 (1+8xy)\,dydx$

วิธีทำ $\int_1^2\int_0^3 (1+8xy)\,dydx =$ ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= …………………………………… #

1.2 $\int_0^2\int_{-1}^1 (1-6x^2y)\,dydx$

วิธีทำ $\int_0^2\int_{-1}^1 (1-6x^2y)\,dydx =$ ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= …………………………………… #

1.3 $\int_0^4\int_0^1 (x+2y)\,dydx$

วิธีทำ $\int_0^4\int_0^1 (x+2y)\,dydx =$ ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= …………………………………… #

1.4 $\int_0^2\int_0^{2x} xy\,dydx$

วิธีทำ $\int_0^2\int_0^{2x} xy\,dydx =$ ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= ……………………………………

= …………………………………… #

1.5 $\int_1^2\int_0^y x^2y^2\,dxdy$

วิธีทำ $\int_1^2\int_0^y x^2y^2\,dxdy$ = …………………………………….

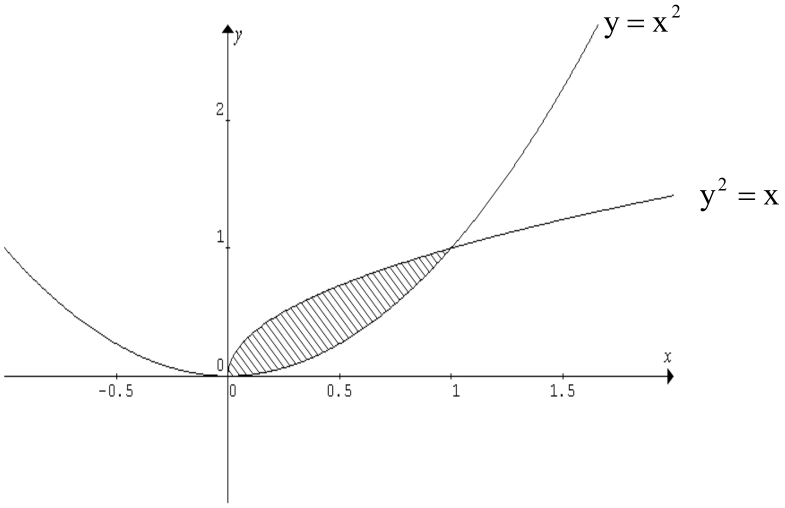
= …………………………………….

= …………………………………….

= …………………………………….

= ……………………………………. #

2. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่แรเงาจากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้



……………..………………………………………………………………………………..

……………..………………………………………………………………………………..

……………..………………………………………………………………………………..

……………..………………………………………………………………………………..

……………..………………………………………………………………………………..

……………..………………………………………………………………………………..

แผนการสอนคาบ 17-18
การหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติ

สาระสำคัญ

1. รูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุน หมายถึง รูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณในระนาบรอบเส้นตรงเส้นหนึ่ง
2. การหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนรอบ ทำได้ 2 วิธี คือ

   2.1 แบบจาน (Disk Method)

   2.2 แบบเปลือกทรงกระบอก (Shell Method)

จุดประสงค์การเรียนรู้

เมื่อเรียนจบคาบนี้แล้ว นักศึกษาสามารถ

1. สร้างภาพที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมตามที่โจทย์กำหนดให้ได้
2. ใช้พื้นฐานความรู้เรื่องการหาปริพันธ์ในการหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติได้
3. แสดงวิธีการหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากกการหมุน โดยวิธีแบบจานกลมและแบบเปลือกทรงกระบอกได้

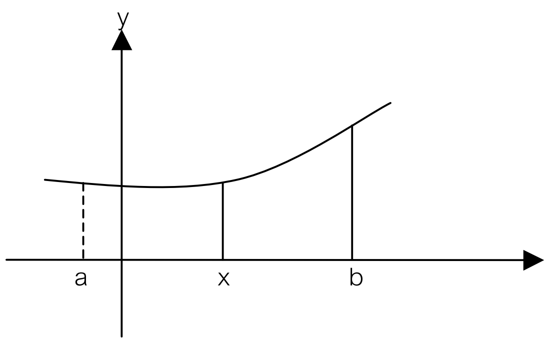
เนื้อหา

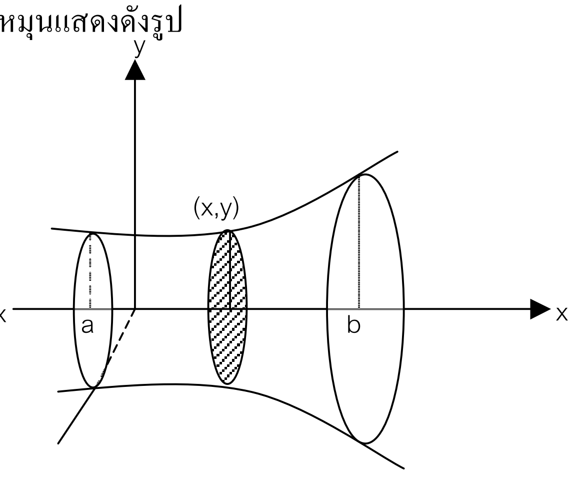
1. การหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนรอบ

รูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุน หมายถึงรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณในระนาบรอบเส้นตรงเส้นหนึ่ง การหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุน (Volumes of Solids of Revolution) สามารถหาได้ 2 วิธีดังนี้

1.1 การหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนโดยวิธีแบบจาน

การหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติวิธีแบบจาน ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบน $[a,b]$ ให้ Q เป็นรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกนx และเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ รอบแกน x อาณาบริเวณที่ใช้หมุนแสดงดังรูป





ภาคตัดขวางที่ตั้งฉากกับแกน x ที่จุด x ใด ๆ ของรูปทรงสามมิติ จะเป็นวงกลม หรือจานกลม (Clrcular Disk) มีรัศมีของการหมุนคือ $|f(x)|$ ดังนั้น จะได้พื้นที่ภาคตัดขวางที่จุด x ใด ๆ คือ

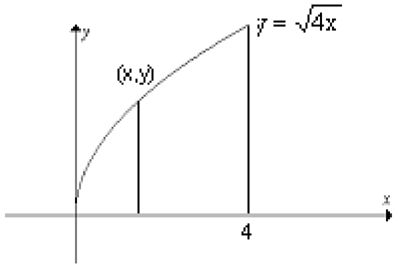
$$A(x) = \pi|f(x)|^2 = \pi[f(x)]^2$$

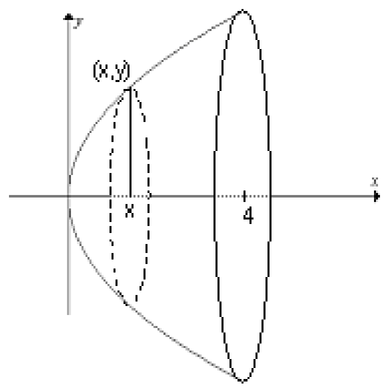
ให้ V เป็นปริมาตรของรูปทรงสามมิติ ที่เกิดจากการหมุนพื้นที่รอบแกน x

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

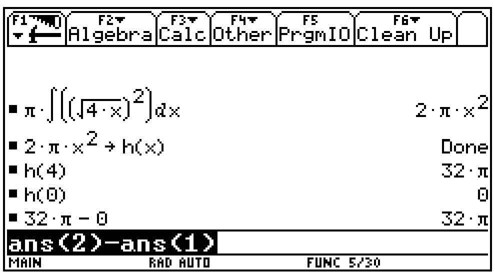
ถ้าให้ F เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบน [c,d] ปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณในระนาบที่ล้อมด้วยเส้นโค้ง x = F(y) แกน y เส้นตรง y = c และ y = d รอบแกน y จะเท่ากับ $V = \pi\int_c^d [f(y)]^2\,dy$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ปิดล้อมโดยแกน x เส้นโค้ง $y^2 = 4x$ แกน x และเส้นตรง $x = 4$ รอบแกน x





วิธีทำ

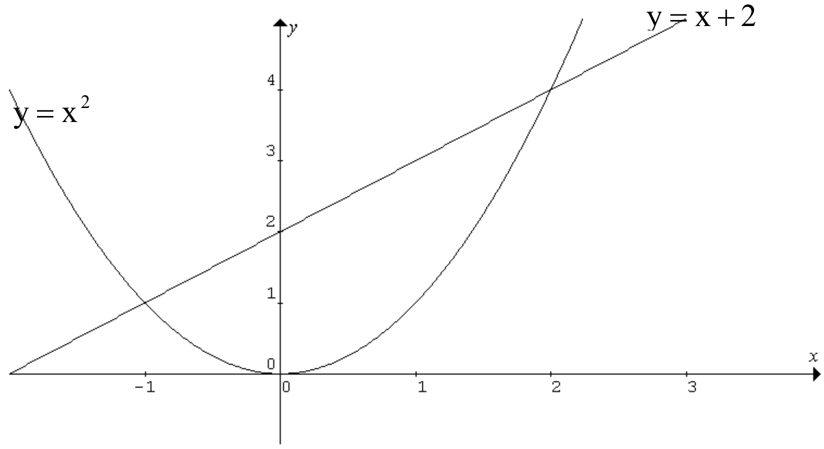


จากสูตร $V = \pi\int_0^4 (\sqrt{4x})^2\,dx$

$$= 4\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^4$$

$$= 32\pi \qquad \#$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นตรง $y = x+2$ กับเส้นโค้ง $y = x^2$ รอบแกน x



วิธีทำ หาจุดตัดระหว่างเส้นตรง $y = x+2$ กับเส้นโค้ง $y = x^2$ ได้จุดตัดคือ (-1,1) และ (2,4)

จากสูตร $$V = \pi\int_{1}^{2}(x+2)^2 dx - \pi\int_{-1}^{2}(x^2)^2\,dx$$

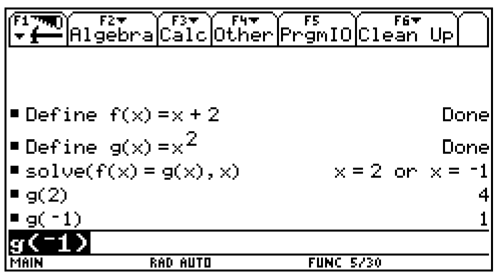
$$= \pi\left[\frac{(x+2)^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi\left[\left(\frac{64}{3} - \frac{32}{5}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{72\pi}{5}$$ #

หาปริมาตรของรูปทรงสามมิติโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-92

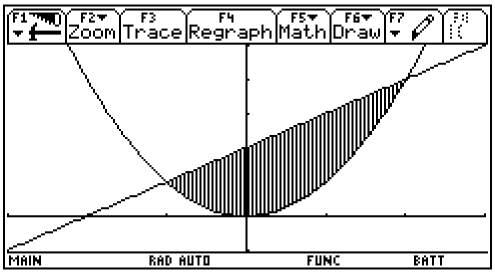
วิธีทำ หาจุดตัดระหว่างเส้นตรง $y=f(x) = x+2$ กับเส้นโค้ง $y = g(x) = x^2$



ได้จุดตัดคือ (-1,1) และ (2,4)

ในช่วง [-1,2] จะพบว่า ถ้า $x \in [-1,2]$ แล้ว $x + 2 \ge x^2$ นั้นคือ

$f(x) \ge g(x)$ สำหรับทุก $x \in [-1,2]$ ดังรูป



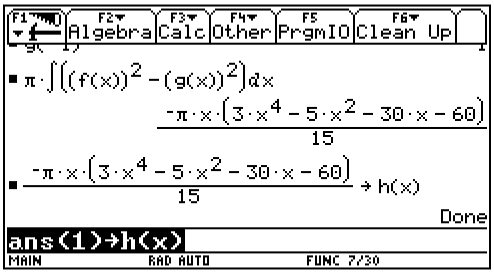
จะได้ว่าปริมาตรของรูปทรงสามมิติ

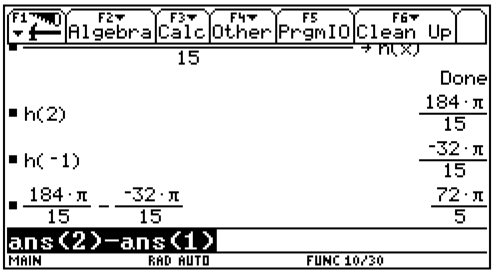
จากสูตร $V = \pi\int_{1}^{2}(x+2)^2dx - \pi\int_{-1}^{2}(x^2)^2\,dx$

$$= \pi\left[\frac{(x+2)^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{2}$$

$$= \pi\left[\left(\frac{64}{3} - \frac{32}{5}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{72\pi}{5} \qquad \#$$





1.2 การหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากกาหมุนโดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก

การหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติโดยวิธีแบบเปลือกทรงกระบอก

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบน [a,b] และ $f(x) \geq 0$ เมื่อ $a \geq 0$ ให้ R เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ แกน x และเส้นตรง $x = a$ และ $x = b$ ให้ Q เป็นรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนอาณาบริเวณรอบแกน y

ให้ V เป็นปริมาตรของรูปวงแหวนทรงกระบอก ซึ่งมีรัศมีด้านในเป็น r_1 และมีรัศมีด้านนอกเป็น r_2 และ มีส่วนสูงเป็น h

จะได้ $V = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h$

$$= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h$$

$$= 2\pi\left(\frac{r_2 + r_1}{2}\right)(r_2 - r_1)h$$

ให้ $\bar{r} = \frac{r_2 + r_1}{2}$ เป็นรัศมีเฉลี่ย และ $\Delta r = r_2 - r_1$ เป็นความหนาของวงแหวน ดังนั้น สูตรการหาปริมาตรของวงแหวนทรงกระบอกจะเป็น $V = 2\pi\bar{r}h\Delta r$

เมื่อ $2\pi\bar{r}$ คือ ความยาวของเส้นรอบวงกลม

รูปทรงสามมิติของวงแหวนสามารถหาค่าประมาณได้ โดยการรวมรูปวงแหวนทรงกระบอกเข้าด้วยกัน ในที่นี้ถ้ากำหนดว่า R เป็นบริเวณที่อยู่ในจตุภาคที่ 1 ซึ่งถูกล้อมรอบด้วย เส้นตรง $x = a$, $x = b$, $y = 0$ และเส้นโค้ง $y = f(x)$

รูปทรงสามมิติ Q เกิดขึ้นเมื่อ R หมุนรอบแกน y การหาปริมาตรยองรูปทรงสามมิติ Q ขั้นแรกต้องแบ่ง [a,b] ออกเป็นส่วนย่อย n ชิ้น

$$\{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b\}$$

ถ้าบริเวณ R หมุนรอบแกน y สี่เหลี่ยมผืนผ้าแต่ละชิ้นจะเกิดเป็นวงแหวนทรงกระบอก กำหนดให้ $V(t_i)$ คือ ปริมาตรของวงแหวนทรงกระบอก t_i และ $V(T_I)$ คือปริมาตรของวงแหวนทรงกระบอก T_i ดังนั้น สูตรการหาปริมาตรของรูปวงแหวนทรงกระบอกจะได้

$$V(t_i) = 2\pi\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta_i x f(x_{i-1})$$

$$V(T_i) = 2\pi\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta_i x f(x_i)$$

ปริมาตร V ของรูปทรงสามมิตินี้ จะมีค่าอยู่ระหว่าง

$$\sum_{i=1}^{n} V(t_i) \text{ และ } \sum_{i=1}^{n} V(T_i)$$

ดังนั้น เขียนใหม่จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} V(t_i) = 2\pi\sum_{i=1}^{n} \bar{x} f(x_{i-1})\Delta_i x \le V \le 2\pi\sum_{i=1}^{n} \bar{x} f(x_i)\Delta_i x = \sum_{i=1}^{n} V(T_i)$$

โดยที่ $\bar{x} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$

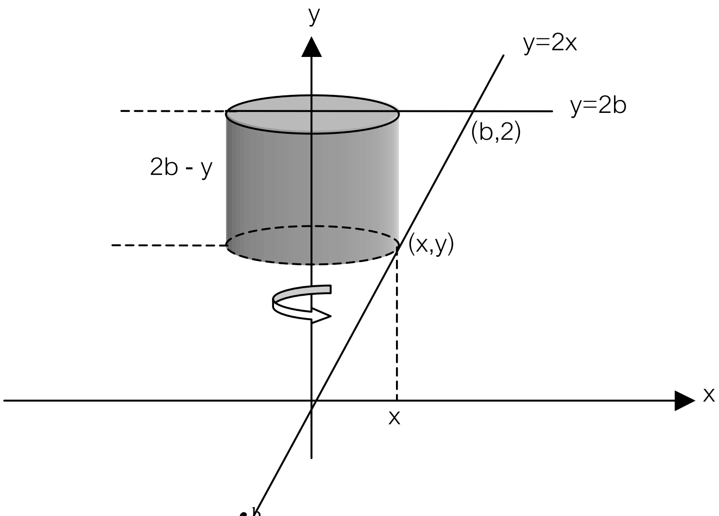
เมื่อ $\Delta x \to 0$ จะได้

$V = 2\pi\int_a^b x f(x)\,dx$ ซึ่งเป็นปริมาตรที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ R รอบแกน y

โดยวิธีเดียวกันถ้าบริเวณพื้นที่ R ในจตุภาคที่ 1 ถูกปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = c$, $y = d$, $x = 0$ และเส้นโค้ง $y = g(y)$ หมุนรอบแกน x

ดังนั้นปริมาตรของรูปทรงสามมิตินี้ คือ $V = 2\pi\int_c^d y(g(y))\,dy$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นตรง $y = 2x$ แกนy และเส้นตรงy $= 2b$ $(b > 0)$ รอบแกน y



วิธีทำ จากสูตร $V = \int_0^b 2\pi x(2b - 2x)\,dx$

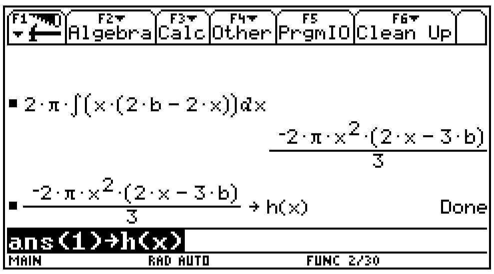
จะได้ $V = \int_0^b (4\pi bx - 4\pi x^2)\,dx$

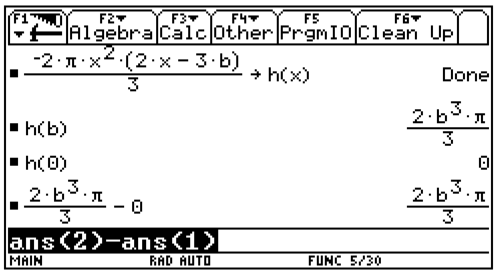
$$= 4\pi\int_0^b (bx - x^2)\,dx$$

$$= 4\pi\left[\frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^b$$

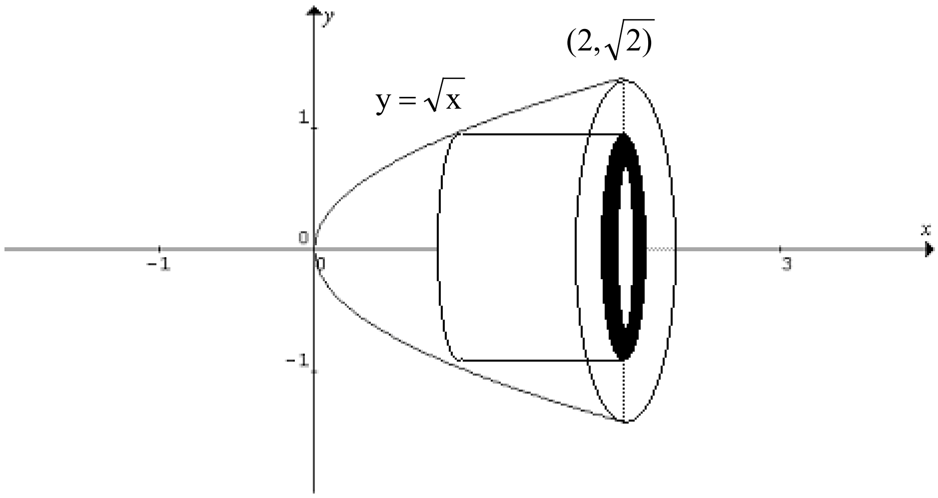
$$= 4\pi\left[\frac{b^3}{2} - \frac{b^3}{3}\right]$$

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงสามมิติ $= \frac{2}{3}\pi b^3$ ลูกบาศก์หน่วย #





ตัวอย่างที่ 2 จงหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ R ที่ปิดล้อมด้วยแกน x เส้นโค้ง $y=\sqrt{x}$ เส้นตรง $x=0$ และ $x=2$ รอบแกน x



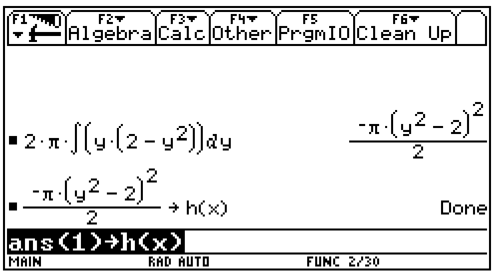
วิธีทำ จากสูตร $$V=2\pi\int_0^{\sqrt{2}} y(2-y^2)\,dy$$

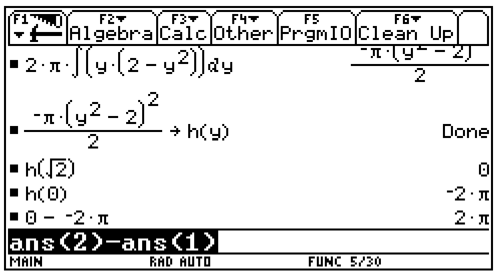
จะได้ $$V=2\pi\left[y^2-\frac{y^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=2\pi\left[(2-\frac{4}{4})\right]$$

ดังนั้น ปริมาตรของรูปทรงสามมิติ $=2\pi$ ลูกบาศก์หน่วย #

หาปริมาตรของรูปทรงสามมิติโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ TI-92





สื่อการเรียนการสอน

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. ใบงาน T9 2. เครื่องคำนวณเชิงกราฟ 3. แผ่นใส	1. ใบงาน C9 2. แผ่นใส

กิจกรรมการเรียนการสอน

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
ขั้นนำ ครูบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักศึกษาทราบ **ขั้นสอน** 1. ครูอธิบายการหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนรอบ 2. ครูอธิบายการหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจาการหมุนรอบ โดยวิธีแบบจาน แล้วยกตัวอย่างประกอบ 2 ตัวอย่าง โดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส และแสดงการคำนวณ โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟทั้ง 2 วิธี 3. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน T9 ข้อ 1 โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟตรวจสอบคำตอบ 4. ครูอธิบายการหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่ เกิดจาการหมุนโดยวิธีแบบเปลือก แล้วยกตัว อย่างประกอบ 2 ตัวอย่าง โดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส และแสดงการคำนวณ โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ ทั้ง 2 วิธี 5. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน T9 ข้อ 2 โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟตรวจสอบคำตอบ 6. ครูให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด จากแบบ-เรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 217 และ 225 โดยแสดงวิธีทำลงในสมุด แล้วใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟตรวจสอบ	**ขั้นนำ** ครูบอกจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักศึกษาทราบ **ขั้นสอน** 1. ครูอธิบายการหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนรอบ 2. ครูอธิบายการหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจาการหมุนรอบ โดยวิธีแบบจาน แล้วยกตัวอย่างประกอบ 2 ตัวอย่าง โดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส 3. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน C9 ข้อ 1 4. ครูอธิบายการหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจาการหมุน โดยวิธีแบบเปลือก แล้วยกตัว อย่างประกอบ 2 ตัวอย่าง โดยแสดงวิธีการคำนวณบนแผ่นใส 5. ครูให้นักศึกษาทำใบงาน C9 ข้อ 2 6. ครูให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด จากแบบ-เรียนคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 217 และ 225 โดยแสดงวิธีทำลงในสมุด

คำตอบ **ขั้นสรุป** ครูและนักศึกษาช่วยกันสรุป การหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนรอบอีกครั้ง	**ขั้นสรุป** ครูและนักศึกษาช่วยกันสรุป การหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนรอบอีกครั้ง

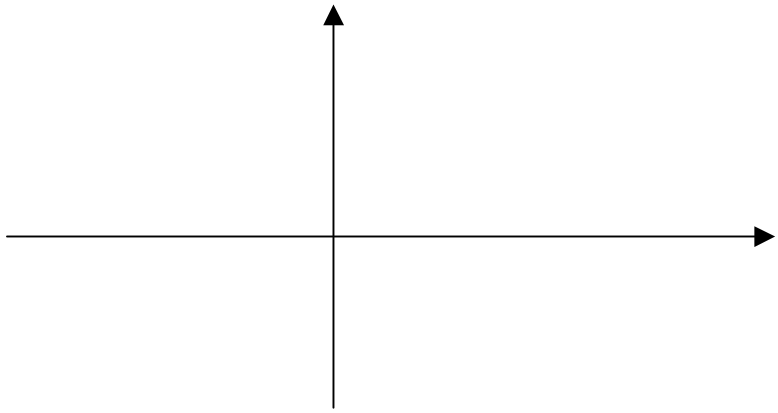
การวัดและประเมินผล

กลุ่มทดลอง	กลุ่มควบคุม
1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักศึกษา 2. สังเกตจากการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในการทำใบงานและตอบคำถามในใบงาน 3. การทำงานที่ได้รับมอบหมาย 4. สังเกตจากการนำเสนอผลงานหน้าชั้น 5. การทำแบบฝึกหัดจากแบบเรียน คณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 217 และ 225	1. สังเกตจากการตอบคำถามของนักศึกษา 2. สังเกตจากการการทำใบงานและตอบคำถามในใบงาน 3. การทำงานที่ได้รับมอบหมาย 4. สังเกตจากการนำเสนอผลงานหน้าชั้น 5. การทำแบบฝึกหัด จากแบบเรียน คณิตศาสตร์ 6 (3000-1506) หน้า 217 และ 225

ใบงาน T9

1. จงหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y^2 = 4x$ แกนx และเส้นตรงx $= 4$ รอบแกน x โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ พร้อมทั้งเขียนรูปประกอบ

วิธีทำ



…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

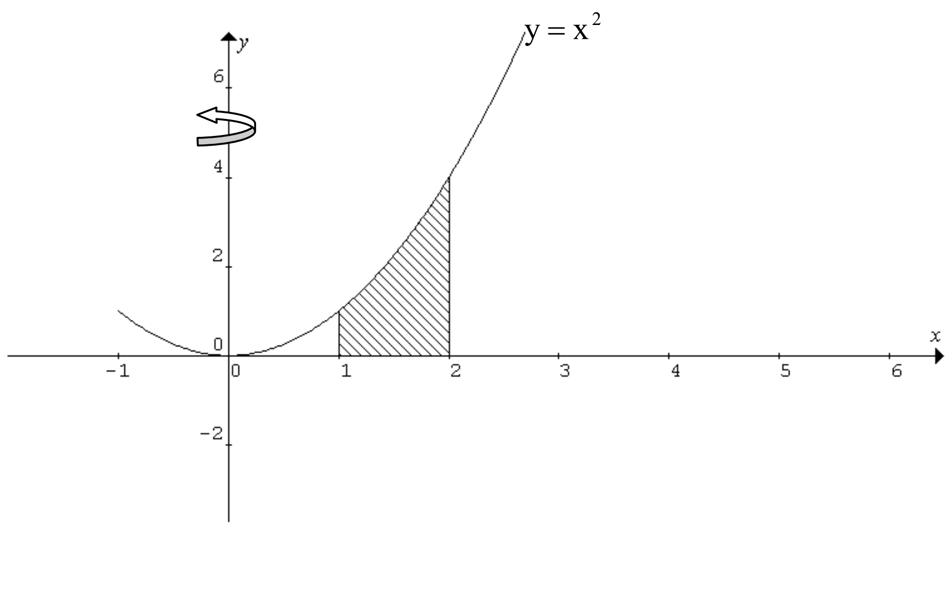
…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

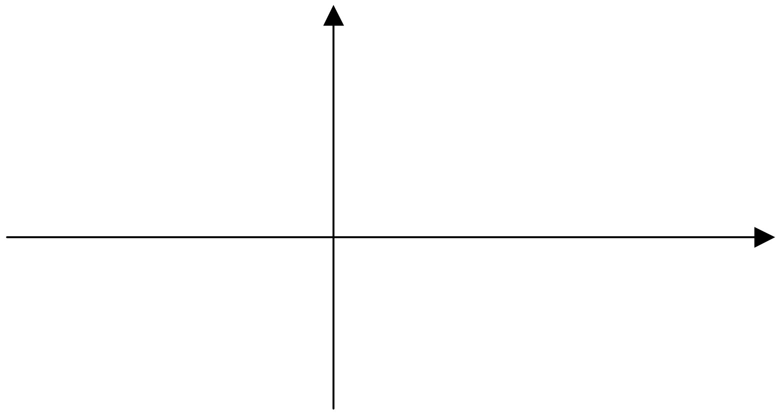
2. จงใช้วิธีแบบเปลือกทรงกระบอกคำนวณหาปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่แรเงาดังรูปที่ กำหนดให้ รอบแกน y โดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟ



ใบงาน C9

1. จงหาปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y^2 = 4x$ แกน x และเส้นตรง $x = 4$ รอบแกน x พร้อมทั้งเขียนรูปประกอบ

วิธีทำ



………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

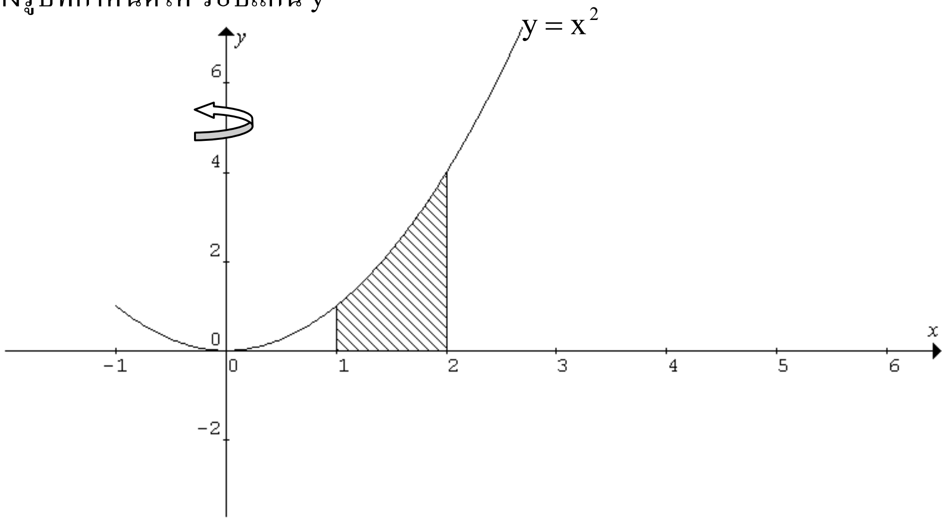
………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

2. จงใช้วิธีแบบเปลือกทรงกระบอกคำนวณหาปริมาตรของทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนบริเวณที่แรเงาดังรูปที่กำหนดให้ รอบแกน y



ภาคผนวก ข

แบบทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์และ

แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์

แบบทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์

เรื่อง ปริพันธ์

ระดับชั้น ปวส. 1 รายวิชาคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506)

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้มีทั้งหมด 20 ข้อ ใช้เวลาในการทำ 50 นาที
2. ก่อนทำแบบทดสอบให้นักศึกษาเขียน ชื่อ – สกุล เลขที่ ชั้นเรียน แผนก ให้ชัดเจนลงในกระดาษคำตอบ
3. ให้นักศึกษาทำแบบทดสอบให้ครบทุกข้อ
4. ในการทำแบบทดสอบ ให้นักศึกษาอ่านข้อคำถามแล้วเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียวเท่านั้น โดยให้เขียนเครื่องหมายกากบาท (×) ลงในช่องที่เป็นตัวเลือกในกระดาษคำตอบ

ตัวอย่าง

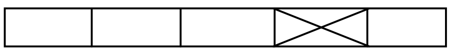
ข้อ 0 ตัวเลือกใดเป็นจำนวนคู่

ก. 0 ข. 1

ค. 2 ง. 3

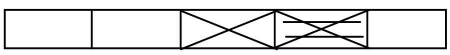
ถ้านักศึกษาเห็นว่าคำตอบข้อ ง. ถูกต้อง ให้ทำเครื่องหมายในกระดาษคำตอบดังนี้

ข้อ 0 ก ข ค ง จ



ถ้านักศึกษาต้องการเปลี่ยนคำตอบให้ทำเครื่องหมาย = ทับคำตอบเดิม แล้วทำเครื่องหมายกากบาท (×) ลงในช่องคำตอบที่เลือกใหม่ เช่น เปลี่ยนจากข้อ ง. เป็นข้อ ค. ดังนี้

ข้อ 0 ก ข ค ง จ



1. ถ้า $F'(x) = f(x)$ สำหรับ $x \in (a, b)$ แล้ว $F(x)$ มีความสัมพันธ์กับ $f(x)$ อย่างไร

ก. $F(x)$ เป็นอนุพันธ์ของ $f(x)$ ข. $F(x)$ เป็นอินทิกรัล ของ $f(x)$

ค. $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ ง. $F(x)$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของ $f(x)$

2. ถ้า $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ แล้วตัวเลือกใดไม่ถูกต้อง

ก. $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ ข. $\frac{d}{dx}(\int f(x)\,dx) = \frac{d}{dx}F(x)$

ค. $\int f(x)\,dx = \int \frac{d}{dx}F(x) + c$ ง. $\int F(x)\,dx = f(x) + c$

3. ตัวเลือกใดเป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = x^2$

ก. $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$ ข. $F(x) = x^3 + c$

ค. $F(x) = 2x$ ง. $F(x) = x^3$

4. ตัวเลือกใดไม่ถูกต้อง

ก. $\int 5\,dx = 5x + c$ ข. $\int (3x+1)\,dx = \frac{3x^2}{2} + x + c$

ค. $\int x^4\,dx = 4x^3 + c$ ง. $\int (2x-4)^3\,dx = \frac{(2x-4)^4}{8} + c$

5. ถ้า $F(x) = \frac{x^2}{2}$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ แล้ว $f(x)$ คือตัวเลือกใด

ก. $f(x) = x^2$ ข. $f(x) = x$

ค. $f(x) = x + 5$ ง. $f(x) = x^2 + 1$

6. กำหนด $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$; $n \neq -1$ แล้ว $\int \sqrt{x}\,dx$ หาได้ตามตัวเลือกใด

ก. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$ ข. $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + c$

ค. $\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + c$ ง. $\frac{1}{\sqrt{x}} + c$

7. ตัวเลือกใดเป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = \frac{x^5 - 5x^3 - 4}{x^3}$

ก. $\frac{x^3}{3} - 5x + \frac{2}{x^2} + c$ ข. $\frac{x^2}{2} - 5 + c$

ค. $\frac{x^4}{4} - 5x^2 + c$ ง. $\frac{x^3}{3} - 5x + \frac{4}{x^2} + c$

8. ตัวเลือกใดเป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = \sin 3x$

ก. $-\cos 3x + c$ ข. $\cos 3x + c$

ค. $\frac{-\cos 3x}{3} + c$ ง. $\frac{\cos 3x}{3} + c$

9. ตัวเลือกใดถูกต้อง

ก. $\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$

ข. $\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\cos^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$

ค. $\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$

ง. $\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\cot^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$

10. $\int \frac{dx}{x \ln x}$ หาคำตอบได้โดยใช้สูตรใด

ก. $\int e^u du = e^u + c$

ข. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \;; u \neq 0$

ค. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c \;; a > 0 , a \neq -1$

ง. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \;; n \neq -1$

11. ตัวเลือกใดเป็นการหาปริพันธ์โดยแยกส่วน

ก. $\int \sqrt{2x+1}\, dx$

ข. $\int \cos^4 x \sin x\, dx$

ค. $\int \sin^5 x\, dx$

ง. $\int x \cos x\, dx$

12. ตัวเลือกใดเป็นการหาปริพันธ์โดยใช้เศษส่วนย่อย

ก. $\int \sqrt{2x+1}\, dx$

ข. $\int \cos^4 x \sin x\, dx$

ค. $\int \frac{5}{(2x+1)(x-2)} dx$

ง. $\int \frac{1}{2x+3} dx$

13. ถ้าแทนค่าโดยให้ $u = 1 + x^3$ จะได้ $du = 3x^2\, dx$ แล้วหา $\int 3x^2 \sqrt{1+x^3}\, dx$ เป็นการหาปริพันธ์แบบใด

ก. หาปริพันธ์โดยเศษส่วนย่อย

ข. หาปริพันธ์โดยการแทนค่า

ค. หาปริพันธ์โดยแยกส่วน

ง. หาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง

14. จาก $\int_a^b f(x)\, dx$ ข้อสรุปใด<u>ไม่ถูกต้อง</u>

ก. เรียก f ว่า ปริพัทธ์

ข. เรียก x ว่าตัวคงที่ของการหาปริพันธ์

ค. เรียก b ว่าขีดจำกัดบนของการหาปริพันธ์

ง. เรียก a ว่าขีดจำกัดล่างของการหาปริพันธ์

15. ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน [a, b] ถ้า g เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บน [a, b] แล้ว $\int_a^b f(x)\, dx$ มีค่าเท่าไร

ก. f(b) – f(a) ข. f(a) – f(b) ค. g(b) – g(a) ง. g(a) – g(b)

16. ตัวเลือกใดถูกต้อง

ก. $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

ข. $\int_0^1 x^2 dx = -\frac{1}{3}$

ค. $\int_0^1 x^2 dx = 0$

ง. $\int_0^1 x^2 dx = 2$

17. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วง [a, b] และ c เป็นค่าคงตัว ตัวเลือกใด<u>ไม่ถูกต้อง</u>

ก. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx$ ข. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

ค. $\int_a^a f(x)\,dx = 1$ ง.

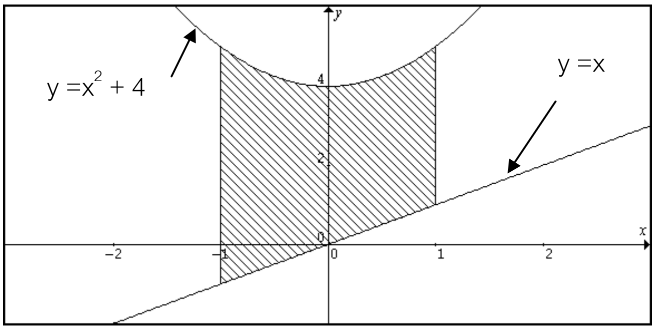
$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

18. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [a, b] และ $g(x) \le f(x)$ สำหรับ $a \le x \le b$ แล้ว A เป็นพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง y = f(x) , y = g(x) แกน x เส้นตรง x= a และเส้นตรง x= b ข้อสรุปใดถูกต้อง

ก. $A = \int_a^b [f(x)-g(x)]dy$ ข. $A = \int_a^b [g(x)-f(x)]dy$

ค. $A = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$ ง. $A = \int_a^b [g(x)-f(x)]dx$

19. จากรูปข้อสรุปใดถูกต้อง



ก. พื้นที่ส่วนที่แรเงาหาได้จาก $\int_{-1}^{1}(x - x^2 + 4)\,dx$

ข. พื้นที่ส่วนที่แรเงาหาได้จาก $\int_{-1}^{1}(x^2 - x - 4)\,dx$

ค. พื้นที่ส่วนที่แรเงาหาได้จาก $\int_{-1}^{1}(x^2 + 4 - x)\,dx$

ง. พื้นที่ส่วนที่แรเงาหาได้จาก $\int_{-1}^{1}(x^2 + x + 4)\,dx$

20. กำหนด $f(x) = x^2$ และ $g(x) = 2x - x^2$ ตัวเลือกใดสรุปถูกต้อง

ก. จุดตัดของเส้นโค้งทั้งสองคือ (0, 0) และ (-1, 1)

ข. พื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยกราฟทั้งสองเท่ากับ $\frac{1}{6}$

ค. พื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยกราฟทั้งสองหาได้จาก $\int_{-1}^{0}(2x - x^2) - (x^2)\,dx$

ง. พื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยกราฟทั้งสองหาได้จาก $\int_{0}^{1}(x^2 - (2x - x^2)\,dx$

แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์
เรื่อง การประยุกต์ปริพันธ์
ระดับชั้น ปวส. 1 รายวิชาคณิตศาสตร์ 6 (3000-1506)

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบฉบับนี้มีทั้งหมด 15 ข้อ ใช้เวลาในการทำ 50 นาที
2. ก่อนทำแบบทดสอบให้นักศึกษาเขียน ชื่อ – สกุล เลขที่ ชั้นเรียน แผนก ให้ชัดเจนลงในกระดาษคำตอบ
3. ให้นักศึกษาทำแบบทดสอบให้ครบทุกข้อ
4. ในการทำแบบทดสอบ ให้นักศึกษาอ่านข้อคำถามแล้วเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียวเท่านั้น โดยให้เขียนเครื่องหมายกากบาท (×) ลงในช่องที่เป็นตัวเลือกในกระดาษคำตอบ

ตัวอย่าง

ข้อ 0 ตัวเลือกใดเป็นจำนวนคู่

ก. 0 ข. 1

ค. 4 ง. 5

ถ้านักศึกษาเห็นว่าคำตอบข้อ ง. ถูกต้อง ให้ทำเครื่องหมายในกระดาษคำตอบดังนี้

ข้อ 0	ก	ข	ค	ง	จ
				×	

ถ้านักศึกษาต้องการเปลี่ยนคำตอบให้ทำเครื่องหมาย = ทับคำตอบเดิม แล้วทำเครื่องหมายกากบาท (×) ลงในช่องคำตอบที่เลือกใหม่ เช่น เปลี่ยนจากข้อ ง. เป็นข้อ ค. ดังนี้

ข้อ 0	ก	ข	ค	ง	จ
			×	$\cancel{\times}$	

1. พื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = x^2$ เหนือแกน x และอยู่ระหว่างเส้นตรง $x = 1$ และ $x = 3$ มีค่าเท่าไร

   ก. $\frac{5}{3}$ ตารางหน่วย　　ข. $\frac{26}{3}$ ตารางหน่วย

   ค. $\frac{32}{3}$ ตารางหน่วย　　ง. $\frac{56}{3}$ ตารางหน่วย

2. พื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = 4x - x^2$ เหนือแกน x และอยู่ระหว่างเส้นตรง $x = 0$ และ $x = 4$ มีค่าเท่าไร

   ก. $\frac{5}{3}$ ตารางหน่วย　　ข. $\frac{26}{3}$ ตารางหน่วย

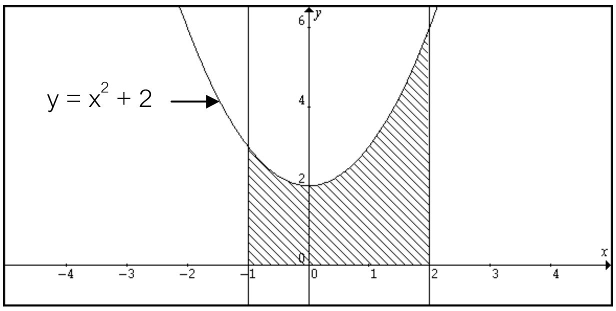
   ค. $\frac{32}{3}$ ตารางหน่วย　　ง. $\frac{56}{3}$ ตารางหน่วย

3. พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = x^2 - 7x + 6$ กับแกน x และอยู่ระหว่างเส้นตรง $x = 2$ และ $x = 6$ มีค่าเท่าไร

   ก. $\frac{5}{3}$ ตารางหน่วย　　ข. $\frac{26}{3}$ ตารางหน่วย

   ค. $\frac{32}{3}$ ตารางหน่วย　　ง. $\frac{56}{3}$ ตารางหน่วย

4. จากรูป พื้นที่ส่วนที่แรเงามีค่าเท่าไร



   ก. 3 ตารางหน่วย　　ข. 6 ตารางหน่วย

   ค. 9 ตารางหน่วย　　ง. 12 ตารางหน่วย

5. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x = y^2 + 2$ แกน y ตั้งแต่ $y = 0$ ถึง $y = 3$ มีค่าเท่าไร

   ก. 2 ตารางหน่วย　　ข. 4 ตารางหน่วย

   ค. 15 ตารางหน่วย　　ง. 18 ตารางหน่วย

6. พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = \sin x$ และแกน x ตั้งแต่ $x = 0$ ถึง $x = \pi$ มีค่าเท่าไร

   ก. 1 ตารางหน่วย　　ข. 2 ตารางหน่วย

   ค. 3 ตารางหน่วย　　ง. 4 ตารางหน่วย

7. พื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = e^x$ และแกน x จาก $x = 1$ ถึง $x = 2$ มีค่าเท่าไร

   ก. $e-1$　　ข. $e(e-1)$

   ค. e^2-1　　ง. $e(e^2-1)$

8. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^3$ และ $y = \sqrt{x}$ มีค่าเท่าไร

ก. $\frac{1}{12}$ ตารางหน่วย ข. $\frac{5}{12}$ ตารางหน่วย

ค. $\frac{7}{12}$ ตารางหน่วย ง. $\frac{11}{12}$ ตารางหน่วย

9. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยแกน y เส้นตรง $y = 2x$ และเส้นตรง $y = 6$ มีค่าเท่าไร

ก. 3 ตารางหน่วย ข. 6 ตารางหน่วย

ค. 9 ตารางหน่วย ง. 12 ตารางหน่วย

10. พื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - 2x$ และ $g(x) = 2x$ มีค่าเท่าไร

ก. $\frac{16}{3}$ ตารางหน่วย ข. $\frac{32}{3}$ ตารางหน่วย

ค. $\frac{35}{3}$ ตารางหน่วย ง. $\frac{41}{3}$ ตารางหน่วย

11. พื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยกราฟ $y = x^2$ และ $y = 4x$ มีค่าเท่าไร

ก. $\frac{16}{3}$ ตารางหน่วย ข. $\frac{32}{3}$ ตารางหน่วย

ค. $\frac{35}{3}$ ตารางหน่วย ง. $\frac{41}{3}$ ตารางหน่วย

12. ปริซึมที่ตั้งอยู่ในระนาบ xy ซึ่งฐานเป็นสามเหลี่ยมประกอบด้วยเส้นตรง $y = x$ และ $x = 1$ มีขอบเขตโดยพื้นผิว $z = 3 - x - y$ จะหาปริมาตรได้ตามข้อใด

ก. $\int_0^1\int_0^x (3 - x - y)\,dydx$ ข. $\int_0^x\int_0^1 (3 - x - y)\,dydx$

ค. $\int_0^1\int_0^y (3 - x - y)\,dydx$ ง. $\int_0^1\int_0^x (3 - x - y)\,dxdy$

13. จากข้อ 12. ปริมาตรของปริซึมมีค่าเท่าไร

ก. 1 ลูกบาศก์หน่วย ข. 2 ลูกบาศก์หน่วย

ค. 3 ลูกบาศก์หน่วย ง. 4 ลูกบาศก์หน่วย

14. ปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วย $x = y^3$, $y = 0$ และ $y = 2$ รอบแกน y มีค่าเท่าไร

ก. $\frac{32}{7}\pi$ ลูกบาศก์หน่วย ข. $\frac{87}{7}\pi$ ลูกบาศก์หน่วย

ค. $\frac{128}{7}\pi$ ลูกบาศก์หน่วย ง. $\frac{142}{7}\pi$ ลูกบาศก์หน่วย

15. ปริมาตรของรูปทรงสามมิติที่เกิดจากการหมุนพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยแกน x เส้นโค้ง $y^2 = 4x$ และเส้นตรง $x = 4$ รอบแกน x มีค่าตามตัวเลือกใด

ก. $\int_0^4 \pi(4x)^2 dx$ ข. $\int_0^4 (4x)\,dx$

ค. $\int_0^4 \pi(\sqrt{4x})^2 dx$ ง. $\int_0^4 \pi(\sqrt{4x})dx$

ภาคผนวก ค

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญ

1. อาจารย์ดร. เรวดี กระโหมวงศ์	อาจารย์ประจำภาควิชาการประเมินผลและวิจัย คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา
2. ดร. สมมาต บรรจงรัตน์	อาจารย์ประจำหมวดสามัญ วิทยาลัยเทคนิคนครศรีธรรมราช อำเภอเมือง จังหวัดนครศรีธรรมราช
3. อาจารย์สมคิด วงศ์นาถ	อาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ สถาบันราชภัฏนครศรีธรรมราช อำเภอเมือง จังหวัดนครศรีธรรมราช

ภาคผนวก ง

ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r)
ของแบบทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์และ
แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์
และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบทั้งฉบับ

ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบทั้งฉบับ

ข้อ	ค่าความยากง่าย (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)
1	0.42	0.42
2	0.24	0.26
3	0.53	0.21
4	0.55	0.68
5	0.53	0.53
6	0.42	0.42
7	0.34	0.47
8	0.32	0.42
9	0.61	0.37
10	0.42	0.42
11	0.37	0.53
12	0.50	0.37
13	0.32	0.21
14	0.37	0.21
15	0.42	0.21
16	0.37	0.32
17	0.47	0.53
18	0.50	0.68
19	0.34	0.26
20	0.26	0.21

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบทั้งฉบับ เท่ากับ 0.77

ค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์ และค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบทั้งฉบับ

ข้อ	ค่าความยากง่าย (p)	ค่าอำนาจจำแนก (r)
1	0.39	0.58
2	0.53	0.53
3	0.29	0.47
4	0.55	0.26
5	0.50	0.37
6	0.39	0.37
7	0.34	0.26
8	0.47	0.32
9	0.34	0.26
10	0.34	0.26
11	0.37	0.21
12	0.45	0.26
13	0.34	0.26
14	0.37	0.42
15	0.32	0.32

ค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบทั้งฉบับ เท่ากับ 0.84

บทคัดย่อ

ผลของการใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่มีต่อมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์ และความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ของนักศึกษาหลักสูตร ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 โรงเรียนนครอาชีวศึกษา

บทคัดย่อ

ของ

ศุภชัย เรืองเดช

เสนอต่อมหาวิทยาลัยทักษิณ เพื่อเป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร

ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์

กรกฎาคม 2546

การวิจัยครั้งนี้มีจุดมุ่งหมายเพื่อ 1) เปรียบเทียบมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์ของนักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ระหว่างกลุ่มที่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟกับกลุ่มที่ไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียน 2) เปรียบเทียบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์ของนักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ระหว่างกลุ่มที่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟกับกลุ่มที่ไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 โรงเรียนนครอาชีวศึกษา อำเภอเมือง จังหวัดนครศรีธรรมราช ที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ 6 จำนวน 40 คน โดยวิธีสุ่มอย่างง่าย ซึ่งแบ่งนักศึกษาเป็น 2 กลุ่ม คือกลุ่มทดลองจำนวน 20 คน ที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนและกลุ่มควบคุมจำนวน 20 คน ที่เรียนแบบปกติโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียน ผู้วิจัยดำเนินการสอนนักศึกษาทั้ง 2 กลุ่ม กลุ่มละ 18 คาบ คาบละ 50 นาที แล้วทำการทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์และแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์ ทำการวิเคราะห์ข้อมูลโดยการหา คะแนนเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และการทดสอบแบบที

ผลการวิจัยพบว่า 1) นักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนมีมโนทัศน์เชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับปริพันธ์สูงกว่านักศึกษาที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.01 2) นักศึกษาหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง ชั้นปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียนมีความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการประยุกต์ปริพันธ์สูงกว่านักศึกษาที่เรียนโดยไม่ใช้เครื่องคำนวณเชิงกราฟประกอบการเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

THE EFFECTS OF GRAPHING – CALCULATOR UTILIZATION IN MATHEMATICS LEARNING ON MATHEMATICS CONCEPTS AND PROBLEM SOLVING ABILITY OF THE FIRST YEAR STUDENTS AT HIGHER VOCATIONAL CERTIFICATE LEVEL, NAKHON VOCATIONAL SCHOOL

AN ABSTRACT

BY

SUPACHAI RUANGDECH

Presented to Thaksin University in partial fulfillment of the requirements for the Master of Education degree in Mathematics

July, 2003

The purposes of this research were : 1) To compare mathematics concepts on Integration of the first year students at Higher Vocational Certificate level between students who used graphing calculators and those who did not use graphing calculators. 2) To compare problem solving ability on applications of Integration of the first year students at Higher Vocational Certificate level between students who used graphing calculators and those who did not use graphing calculators. The sample obtained by ramdom simpling consisted of 40 of the first year students at Higher Vocational Certificate level at Nakhon Vocational School, Muang District, Nakhon Si Thammarat Province. The sample was divided into 2 groups each of 20 students. The experimental group learned using graphing calculators and the controled group learned through conventional method without graphing calculators. Both sample groups were taught by the researcher for 18 periods of 50 minutes each, and then took the mathematics concepts test and the problem solving ability test. The test date were analyzed by SPSS PC^{+} for arithmetic means, standard deviations and t-test.

The research findings were as follows : 1) The first year students at Higher Vocational Certificate level who used graphing calculators had higher mathematics concepts on Integration than those who did not use graphing calculators at 0.01 level of significance. 2) The first year students at Higher Vocational Certificate level who used graphing calculators had higher problem solving ability on applications of Integration than those who did not use graphing calculators at 0.05 level of significance.

ประวัติย่อของผู้วิจัย

ชื่อ นายศุภชัย ชื่อสกุล เรืองเดช

เกิด วันที่ 17 เดือนตุลาคม พุทธศักราช 2514

สถานที่อยู่ปัจจุบัน	137/1 หมู่ 2 ตำบลไม้เรียง อำเภอฉวาง จังหวัดนครศรีธรรมราช 80260
ตำแหน่งหน้าที่ปัจจุบัน	อาจารย์ผู้สอน
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนนครอาชีวศึกษา ตำบลโพธิ์เสด็จ อำเภอเมือง จังหวัดนครศรีธรรมราช 80000

ประวัติการศึกษา

พ.ศ. 2534	ประกาศนียบัตรวิชาชีพเทคนิค (ช่างเทคนิควิศวกรรมไฟฟ้า) วิทยาลัยเทคนิคนครศรีธรรมราช อำเภอเมือง จังหวัดนครศรีธรรมราช
พ.ศ. 2541	ครุศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์) สถาบันราชภัฏนครศรีธรรมราช อำเภอเมือง จังหวัดนครศรีธรรมราช
พ.ศ. 2546	การศึกษามหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยทักษิณ อำเภอเมือง จังหวัดสงขลา