

อินทิกรัลตามเส้นทางสำหรับบ่อศักย์จัตุรัสลิกอนันต์

วิทยา ทิพย์อักษร

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
มหาวิทยาลัยทักษิณ

2550



ใบรับรองวิทยานิพนธ์
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์
มหาวิทยาลัยทักษิณ

ชื่อวิทยานิพนธ์ : อินทิกรัลตามเส้นทางสำหรับบ่งชี้ศักย์จลน์สถิตย์

ชื่อ - สกุลผู้ทำวิทยานิพนธ์ : นายวิทยา ทิพย์อักษร

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

.....ประธานที่ปรึกษา

(รองศาสตราจารย์ ดร. นิคม ชูศิริ)

.....กรรมการที่ปรึกษา

(อาจารย์ ดร. ประสงค์ เกษราธิคุณ)

มหาวิทยาลัยทักษิณอนุมัติให้รับวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

(รองศาสตราจารย์ ประดิษฐ์ มีสุข)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

สำเร็จการศึกษา เมื่อวันที่.....เดือน.....พ.ศ.....

ลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยทักษิณ

บทคัดย่อ

ได้ใช้วิธีการอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมนศึกษาอนุภาคภายในบ่อศักย์จัตุรัสลึก-อนันต์ในหนึ่งมิติ โดยคำนวณหาตัวแปรกระจายสำหรับบ่อศักย์จัตุรัสลึกอนันต์ด้วยวิธีอินทิกรัลตามเส้นทางแบบลากรางเกียน พร้อมทั้งได้นำวิธีจุดภาพกระจกเงามาประยุกต์ใช้ในการคำนวณหาตัวแปรกระจายด้วย ตัวแปรกระจายที่ได้อยู่ในรูปแบบของผลรวม และจากตัวแปรกระจายดังกล่าวสามารถนำไปคำนวณหาฟังก์ชันคลื่นและระดับพลังงานที่เป็นไปได้ของอนุภาคที่อยู่ภายใต้อิทธิพลของบ่อศักย์จัตุรัสลึกอนันต์ได้

Abstract

The Feynman path integral approach was used to study the motion of a particle in one dimension in an infinite square potential well. The propagator for this potential was calculated by means of the Lagrangian path integral. The image point method was also introduced to estimate the propagator. This propagator was not only evaluated in summation form, but also could be used to calculate all of wave functions and possible energy levels of a particle under the influence of this potential.

ประกาศคุณูปการ

การทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าได้รับความรู้ด้านต่างๆเป็นอย่างมาก ทั้งความรู้ใหม่ๆ และได้ความกระจ่างชัดกับความรู้เดิมที่เคยศึกษามากมายยิ่งขึ้น อันนำไปสู่ความสำเร็จในการทำวิทยานิพนธ์ในครั้งนี้

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ประสบความสำเร็จได้ เนื่องจากการได้รับการสนับสนุนและความอนุเคราะห์จากบุคคลหลายท่าน ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณบุคคลดังต่อไปนี้

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.นิคม ชูศิริ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ที่กรุณาให้คำปรึกษาทางด้านวิชาการ ด้านแหล่งข้อมูลต่างๆ ตลอดจนการตรวจทานแก้ไขรูปเล่มวิทยานิพนธ์จนเสร็จสมบูรณ์ และขอขอบพระคุณ ดร.ประสงค์ เกษราธิคุณ ที่กรุณาให้คำปรึกษาและความช่วยเหลือในการทำวิทยานิพนธ์ตั้งแต่ต้นจนจบ

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ บุคลากรภาควิชาฟิสิกส์ และบุคลากรบัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยทักษิณทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ ตลอดมา

สุดท้ายข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณคุณพ่อ คุณแม่ และทุกๆ คนในครอบครัวที่คอยห่วงใยและให้กำลังใจในการทำงาน ขอขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ และน้องๆ ในภาควิชาฟิสิกส์ ที่ให้ความช่วยเหลือและกำลังใจเสมอมา

วิทยา ทิพย์อักษร

สารบัญ

บทที่	หน้า
1 บทนำ	1
ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย	1
วัตถุประสงค์	3
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	4
ขอบเขตของการวิจัย	4
ระยะเวลาที่ทำการวิจัย	4
2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	5
ปัญหาอิเล็กทรอนิกส์คอมพ์	5
ปัญหาค่าแฟกต์อีนันต์	5
3 ทฤษฎีการอินทิเกรตตามเส้นทาง	7
ทฤษฎีการอินทิเกรตตามเส้นทางเบื้องต้น	7
ฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของอนุภาค	11
การคำนวณหาตัวแปรกระจาย	14
4 ผลการวิจัย	20
ปัญหาค่าแฟกต์อีนันต์ (infinite potential barrier)	20
ปัญหาบ่อศักย์จัตุรัสลึกอนันต์ (infinite square potential well)	26
5 สรุปและอภิปรายผล	35
บรรณานุกรม	37
ภาคผนวก	40
ประวัติย่อผู้วิจัย	46

สารบัญภาพประกอบ

ภาพที่	หน้า
1 แสดงเส้นทางที่เป็นไปได้กับเส้นทางแบบฉบับ	7
2 แสดงการคำนวณเส้นทางของอนุภาคโดยแบ่งทางเดินออกเป็นเส้นทางย่อยๆ	9
3 แสดงการแทนเส้นทางใดๆที่เป็นไปได้ด้วยเส้นทางแบบฉบับ	10
4 แสดงเส้นทางแบบฉบับของอนุภาคอิสระ	22
5 แสดงเส้นทางแบบฉบับสองเส้นทางที่เชื่อมต่อกันที่ (x_a, t_a) และ (x_b, t_b) พร้อมด้วยจุดภาพระจกเงาที่คล้องจองกัน	25
6 แสดงเส้นทางแบบฉบับจำนวนมากมายมหาศาลที่เชื่อมต่อกันที่ (x_a, t_a) และ (x_b, t_b) พร้อมด้วยจุดภาพระจกเงาที่คล้องจองกัน	28
7 แสดงบ่อศักย์จักร์สถิกอนันต์	41

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

วิชาฟิสิกส์แบบฉบับ (classical physics) ที่นักวิทยาศาสตร์ได้คิดค้นขึ้นมา สามารถนำมาอธิบายปรากฏการณ์ธรรมชาติจนได้ผลอย่างดีเลิศจนกระทั่งถึงปลายศตวรรษที่ 19 มีสาระสำคัญพอสรุปได้ดังนี้ ในระบบต่างๆทางฟิสิกส์ ปริมาณทั้งหลายสามารถแทนได้ด้วยตัวแปรพลวัต (dynamical variable) ที่มีนิยามแน่ชัด โดยตัวแปรเหล่านี้ยังแสดงถึงสถานะ (state) ของระบบนั้นในขณะใดขณะหนึ่งด้วย ส่วนสถานะในเวลาใดๆสามารถติดตามได้ ถ้าเพียงแต่ทราบสถานะเบื้องต้นเท่านั้น หลักการนี้กล่าวในเชิงคณิตศาสตร์หมายความว่าตัวแปรพลวัตเหล่านี้สอดคล้องตามสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equation) อันดับหนึ่งที่มีตัวแปรเป็นรูปของเวลา ดังนั้นจุดประสงค์ของการศึกษาฟิสิกส์แบบฉบับคือ ความพยายามที่จะแสวงหาตัวแปรพลวัตต่างๆที่สอดคล้องตามสมการ แล้วใช้สมการแห่งการเคลื่อนที่ (equation of motion) เหล่านี้มาทำนายปรากฏการณ์ธรรมชาติ

นับตั้งแต่เริ่มต้นได้คิดค้นวิชากลศาสตร์ (mechanics) เพื่อศึกษาปรากฏการณ์ธรรมชาติของวัตถุหรือระบบวัตถุขนาดใหญ่ที่เกิดขึ้นมาจากแรงที่กระทำต่อวัตถุนั้น ยังไม่เคยปรากฏว่ามีปรากฏการณ์ใดขัดแย้งกับหลักสำคัญดังกล่าวข้างต้น แม้มีปรากฏการณ์ใหม่ๆ ที่ยุ่งยากเกิดขึ้นก็สามารถแก้ปัญหาได้ด้วยการเพิ่มหรือดัดแปลงตัวแปรหรือเพิ่มสมการใหม่ นอกจากนี้ยังไม่มีปรากฏการณ์ใดที่ขัดแย้งกับหลักสำคัญนี้แล้ว ในทางตรงกันข้ามฟิสิกส์แบบฉบับได้ก้าวหน้าต่อไปอย่างไม่หยุดยั้ง ทั้งยังขจัดความขัดแย้งและความยุ่งยากของวิชาให้มีความต่อเนื่องกันเป็นอย่างดี ความก้าวหน้าดังกล่าวได้เจริญรุดหน้าไปเรื่อยๆ จนถึงปี ค.ศ. 1900 ซึ่งเป็นปีเริ่มต้นมีอุปสรรคเกิดขึ้น ปัญหานี้เกิดขึ้นเนื่องจากเราได้เข้าไปสู่ปรากฏการณ์ธรรมชาติที่มีขนาดเล็กในระดับอะตอมหรือเล็กกว่าอะตอม ในระดับนี้หลักต่างๆ ที่มีอยู่ในฟิสิกส์แบบฉบับไม่อาจนำมาใช้ในการอธิบายปรากฏการณ์เหล่านี้ต้องอาศัยหลักฟิสิกส์แนวใหม่ สำหรับการค้นพบฟิสิกส์แนวใหม่เกิดขึ้นหลายระยะและมีบุคคลหลายกลุ่มเกี่ยวข้องด้วย ทว่าจุดเริ่มต้นที่ถือว่าเป็นการค้นพบฟิสิกส์แนวใหม่คือปี ค.ศ. 1925 หรือเป็นปีแห่งการค้นพบวิชากลศาสตร์ควอนตัม (quantum - mechanics) อันเป็นวิชากลศาสตร์พื้นฐานแนวใหม่ที่ใช้แก้ปัญหาต่างๆ ในระดับอะตอม

ผู้ที่ประสบความสำเร็จเป็นคนแรกคือ ไฮเซนเบิร์ก (Heisenberg) ไฮเซนเบิร์กได้อาศัยหลักการคล่องจองและคณิตศาสตร์แบบใหม่ที่เรียกว่า เมตริกซ์ (matrix) เข้ามาช่วยในการพิจารณาปัญหา ทำให้เกิดวิชากลศาสตร์ควอนตัมแบบใหม่เรียกว่า กลศาสตร์เมตริกซ์ (matrix-

mechanics) เมื่อนำไปแก้ปัญหาลักษณะต่างๆทางฟิสิกส์พบว่าให้ผลดีเกินคาด แต่เนื่องวิชากลศาสตร์ควอนตัมแบบนี้ใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ที่นักฟิสิกส์ส่วนใหญ่ไม่คุ้นเคย จึงเป็นเรื่องยากที่จะเข้าใจความหมายที่แท้จริงของทฤษฎีนี้ ดังนั้นจึงไม่เป็นที่ยอมรับในหมู่นักฟิสิกส์ อย่างไรก็ตามปัญหาความยุ่งยากดังกล่าวได้คลี่คลายลง เมื่อในปีเดียวกัน ชเรอดิงเงอร์ (Schrodinger) ได้ค้นพบวิชากลศาสตร์ควอนตัมอีกรูปแบบหนึ่งซึ่งเรียกว่า กลศาสตร์เชิงคลื่น (wave mechanics) หลักการของชเรอดิงเงอร์คือ อนุภาคที่มีขนาดเล็กในระดับอะตอมหรือเล็กกว่าจะมีพฤติกรรมแบบคลื่น (สสาร) ตำแหน่งและโมเมนตัมของอนุภาคจึงไม่อาจทำนายได้แน่นอน แต่จะสอดคล้องกับหลักความไม่แน่นอนของไฮเซนเบิร์ก ดังนั้นเราจึงไม่กล่าวถึงเส้นทางเดินของอนุภาคเลยเพราะไม่สามารถหาได้ ปริมาณต่างๆ ที่สังสรรค์อยู่กับอนุภาคสามารถสืบสาวได้จากฟังก์ชันคลื่น (wave - function) ที่สมนัยกับอนุภาคนั้น โดยฟังก์ชันคลื่นที่กล่าวถึงนี้จะต้องสอดคล้องกับสมการชเรอดิงเงอร์ (Schrodinger equation) ที่มีตัวแปรเป็นตำแหน่งและเวลาซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z, t) \right) \psi(x, y, z, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, y, z, t) \quad (1.1)$$

เมื่อ ∇^2 และ $V(x, y, z, t)$ เป็นตัวดำเนินการลาปลาเซียนและพลังงานศักย์ของอนุภาคตามลำดับ

หรือในกรณีเมื่อพลังงานศักย์ไม่ขึ้นต่อเวลาอย่างชัดเจนกล่าวคือ $V = V(x, y, z)$ สมการชเรอดิงเงอร์ (1.1) จะลดรูปไปสู่

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z) \right) \psi(x, y, z) = E \psi(x, y, z) \quad (1.2)$$

และเรียกสมการ (1.2) นี้ว่า สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นต่อเวลา

กลศาสตร์ควอนตัมในแบบของชเรอดิงเงอร์สามารถนำมาประยุกต์และใช้แก้ปัญหาลักษณะต่างๆทางควอนตัมได้ดีเช่น ปัญหากำแพงศักย์อนันต์ ปัญหาอนุภาคในกล่องหรือบ่อศักย์จัตุรัสสี่กอนันต์ ฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์ หรือแม้แต่ปัญหาอิเล็กตรอนในศักย์คู่ออมบ์ของอะตอมไฮโดรเจนก็สามารถคำนวณได้โดยไมยาก ทำให้วิธีการของชเรอดิงเงอร์เป็นที่ยอมรับในหมู่นักฟิสิกส์ดังจะเห็นได้ตามตำราควอนตัมต่างๆ

กลศาสตร์ควอนตัมทั้งสองแบบที่กล่าวมาข้างต้นจะแทนปริมาณต่างๆ ในฟิสิกส์หรือตัวแปรพลวัตด้วยตัวดำเนินการ (operator) แทนที่จะเป็นปริมาณที่มีค่าเป็นตัวเลขธรรมดาซึ่งจะสะดวกในการทำนายปรากฏการณ์ต่างๆ ดังนั้นในปี ค.ศ. 1948 ฟายน์แมน จึงได้เสนอกกลศาสตร์ควอนตัมแนวใหม่อีกรูปแบบหนึ่งที่ปราศจากตัวดำเนินการและถือเป็นพัฒนาการของวิชากลศาสตร์ควอนตัมในระดับหนึ่งคือ ทฤษฎีการอินทิเกรตตามเส้นทาง (path integration theory) หรืออินทิกรัลตามเส้นทาง (path integral) ที่สามารถพิสูจน์ได้ว่าเหมือนกับกลศาสตร์ควอนตัมของชเรอดิงเงอร์ทุกประการ (วิรุฬห์ สายคณิต. 2525) แต่วิธีการของฟายน์แมนสามารถเข้าถึงองค์ความรู้ของระบบอนุภาคด้วยวิธีที่แตกต่างไปจากวิธีการของชเรอดิงเงอร์ กล่าวคือวิธีการของฟายน์แมนคำนวณหาตัวแพร่กระจาย (propagator) ของอนุภาค แทนที่จะเป็นฟังก์ชันคลื่น โดยตัวแพร่กระจายนี้ได้บรรจุความรู้เกี่ยวกับระบบไว้อย่างครบถ้วน อาทิ มีรายละเอียดเกี่ยวกับฟังก์ชันคลื่น พลังงาน และโอกาสที่จะพบอนุภาค ณ ตำแหน่งต่างๆ เป็นต้น ยิ่งไปกว่านั้นถ้าทราบตัวแพร่กระจายของอนุภาค เราสามารถนำไปสู่ปริมาณทางกายภาพอื่นๆ ได้อีก เช่น ความหนาแน่นสถานะ ฟังก์ชันพาร์ทิชัน หรือปริมาณทางกายภาพที่สามารถวัดได้โดยตรง เช่น ความนำไฟฟ้า ความนำความร้อน หรือแม้แต่ความสามารถในการดูดกลืนแสง เป็นต้น

ความแตกต่างโดยสิ้นเชิงระหว่างวิธีการของชเรอดิงเงอร์และวิธีการของฟายน์แมนก็คือวิธีการของชเรอดิงเงอร์ใช้วิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์คำนวณหาฟังก์ชันคลื่นออกมา ในขณะที่วิธีการของฟายน์แมนใช้การอินทิเกรตตามเส้นทางคำนวณหาตัวแพร่กระจายออกมา วิธีการทั้งสองมีความยากง่ายแตกต่างกันขึ้นอยู่กับรูปแบบของปัญหา อย่างไรก็ตามพบว่าวิธีการของฟายน์แมนกลับขาดประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาบางอย่างเช่น ปัญหาอนุภาคในกล่องหรือบ่อศักย์จัตุรัสสี่กอนันต์ ซึ่งเป็นปัญหาพื้นฐานทางวิชากลศาสตร์ควอนตัมที่สามารถคำนวณได้โดยง่ายด้วยวิธีการของชเรอดิงเงอร์ (ดูรายละเอียดในภาคผนวก) ดังนั้นผู้วิจัยจึงคิดว่าน่าจะใช้ทางเลือกใหม่ในการเข้าถึงความรู้ของปัญหาดังกล่าว โดยใช้วิธีการอินทิเกรตตามเส้นทางคำนวณหาตัวแพร่กระจายออกมา หลังจากนั้นปริมาณทางกายภาพอื่นๆ เช่น ฟังก์ชันคลื่นหรือระดับพลังงานที่เป็นไปได้ก็น่าจะสามารถหาได้โดยไม่ยาก

1.2 วัตถุประสงค์

- 1.2.1 เพื่อศึกษาทฤษฎีการอินทิเกรตตามเส้นทางของฟายน์แมน
- 1.2.2 เพื่อคำนวณหาตัวแพร่กระจายของอนุภาคภายในบ่อศักย์จัตุรัสสี่กอนันต์
- 1.2.3 เพื่อคำนวณหาฟังก์ชันคลื่นและระดับพลังงานที่เป็นไปได้ของอนุภาคภายในบ่อศักย์จัตุรัสสี่กอนันต์ แล้วเปรียบเทียบกับวิธีการของชเรอดิงเงอร์

1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.3.1 ทำให้เข้าใจวิธีการอินทิเกรตตามเส้นทางของฟายน์แมน ซึ่งอาจนำไปแก้ปัญหา ระบบอนุภาคที่อยู่ภายใต้สนามหรือแรงในรูปแบบอื่นๆ ได้

1.3.2 ทำให้ทราบรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ของตัวแผ่กระจาย ฟังก์ชันคลื่นและระดับพลังงานที่เป็นไปได้ ของอนุภาคภายในบ่อศักย์จัตุรัสสี่กอนันต์

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยนี้มุ่งเน้นศึกษาอนุภาค(อิเล็กตรอน) ที่อยู่ภายในกล่องหรือบ่อศักย์จัตุรัสสี่กอนันต์ ปริมาณหลักที่ต้องการคำนวณคือ ตัวแผ่กระจาย ฟังก์ชันคลื่นและระดับพลังงานที่เป็นไปได้

1.5 ระยะเวลาที่ทำการวิจัย

ประมาณ 18 เดือน ตั้งแต่เดือนพฤศจิกายน 2548 ถึงเดือนเมษายน 2550

บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

หลักจากฟายน์แมน ได้เสนอกลศาสตร์ควอนตัมแนวใหม่ในรูปแบบของอินทิกรัลตามเส้นทางหรือการรวมเส้นทางเดินที่เป็นไปได้ทั้งหมดของอนุภาคโดยการคำนวณหาตัวแผ่กระจาย (propagator) นับตั้งแต่นั้นเป็นต้นมากลศาสตร์ควอนตัมตามแบบฉบับฟายน์แมนได้รับความสนใจจากนักฟิสิกส์เป็นจำนวนมาก ทั้งนี้เนื่องจากได้รับการพิสูจน์ว่าอินทิกรัลตามเส้นทางดังกล่าวมีประโยชน์ต่อวงการฟิสิกส์หลายสาขา เมื่อนำทฤษฎีของฟายน์แมนมาแก้ปัญหาพื้นฐานทางกลศาสตร์ควอนตัมเช่น ปัญหาอนุภาคอิสระ ฮาร์มอนิกฮอสซิลเลเตอร์ หรือปัญหาอนุภาคภายใต้อิทธิพลของสนามไฟฟ้าที่มีค่าคงที่ (เอกพันธ์ จันผง. 2548) ปรากฏว่าสามารถคำนวณตัวแผ่กระจายออกมา ตลอดจนหาฟังก์ชันคลื่นและระดับพลังของอนุภาคได้ และยังพิสูจน์ได้ว่าได้ผลเหมือนกับทฤษฎีของชเรอดิงเงอร์ทุกประการ แต่อย่างไรก็ตามยังมีข้อเท็จจริงที่น่าประหลาดใจเป็นอย่างยิ่งว่าทฤษฎีของฟายน์แมนกลับขาดประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาบางปัญหาเช่น ปัญหาอิเล็กตรอนในศักย์คูลออมบ์ของอะตอมไฮโดรเจน ปัญหาการแก่งค์กัยอนันต์ และปัญหาอนุภาคในกล่องหรือบ่อศักย์จัตุรัสสี่กอนันต์ เป็นต้น ซึ่งปัญหาเหล่านี้สามารถคำนวณได้ไม่ยากเมื่อใช้ทฤษฎีของชเรอดิงเงอร์

นักวิจัยทั้งในประเทศและต่างประเทศพยายามที่จะแก้ปัญหาข้างต้น พอจะสรุปได้ดังนี้

2.1 ปัญหาอิเล็กตรอนในศักย์คูลออมบ์

โฮ และ อินะมาตะ (Ho and Inomata. 1982) ประสบความสำเร็จในการสร้างรูปแบบอินทิกรัลตามเส้นทางของอะตอมไฮโดรเจน โดยสามารถคำนวณฟังก์ชันกรีน (Green's function) หรือตัวแผ่กระจายของอิเล็กตรอนในรูปแบบที่กระชับได้ จากฟังก์ชันกรีนดังกล่าว นิคม ชูศิริ และ วิรุพห์ สายคณิต (Choosiri and Sayakanit. 1984) สามารถคำนวณฟังก์ชันคลื่นและพลังงานที่เป็นไปได้ของอะตอมไฮโดรเจนสามมิติได้ ต่อมา ไคลเนอร์ท (Kleinert. 1998) สามารถใช้ตัวแทนอวกาศโมเมนตัม (momentum space representation) กับอินทิกรัลตามเส้นทางแก้ปัญหาของอะตอมไฮโดรเจนได้

2.2 ปัญหาการแก่งค์กัยอนันต์

กู๊ดแมน (Goodman. 1981) ได้นำเสนอวิธีจุดภาพกระจกเงา (image point method) ไปประยุกต์ใช้กับอินทิกรัลตามเส้นทางของอนุภาคภายใต้อิทธิพลของการแก่งค์กัยอนันต์ โดยสามารถคำนวณตัวแผ่กระจายของอนุภาคภายใต้การแก่งค์กัยดังกล่าวได้ และจากตัวแผ่กระจาย

ดังกล่าว อัฐชัย ถาวรสุวรรณ, วิทยา ทิพย์อักษร และ นิคม ชูศิริ (2549) สามารถคำนวณฟังก์ชันคลื่นและระดับพลังงานของอนุภาคได้ และยังพบว่าวิธีจุดภาพกระจกเงาสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาอนุภาคในกล่องหรือบ่อศักย์จัตุรัสสี่เหลี่ยมได้อีกด้วย

นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยที่พยายามศึกษาอนุภาคที่ถูกกระทำด้วยแรงหลายๆแรง เช่น นิคม ชูศิริ (2539) ได้ศึกษาอินทิกรัลตามเส้นทางอนุภาคไฟฟ้าภายใต้แรงฮาร์มอนิกและสนามแม่เหล็กคงที่ โดยสามารถคำนวณตัวแผ่กระจายออกมาได้ ต่อมาก็สามารถคำนวณตัวแผ่กระจายของอนุภาค(อิเล็กตรอน)ภายใต้อิทธิพลของแรงฮาร์มอนิก สนามไฟฟ้าคงที่และสนามแม่เหล็กสม่ำเสมอได้(นิคม ชูศิริ. 2540) ยิ่งไปกว่านั้น นิคม ชูศิริ (2541) ประสบความสำเร็จในการศึกษาอินทิกรัลตามเส้นทางของอิเล็กตรอนภายใต้อิทธิพลของแรงฮาร์มอนิก สนามแม่เหล็ก สนามไฟฟ้า และศักย์ที่ไร้ระเบียบ(disorder potential) รวมทั้งยังคำนวณความหนาแน่นสถานะและระดับพลังงานของอิเล็กตรอนได้

จากที่กล่าวมาทั้งหมด จะเห็นว่าทฤษฎีการอินทิเกรตตามเส้นทางหรืออินทิกรัลตามเส้นทางสามารถนำมาประยุกต์และแก้ปัญหาต่างๆทางควอนตัมได้ ถึงแม้ในบางปัญหาจะเป็นไปได้ยากก็ตามและอาจจะต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ขั้นสูง แต่นักวิจัยก็พยายามจนสำเร็จลุล่วง ดังนั้นการใช้ทฤษฎีดังกล่าวเพื่อศึกษาปัญหาอนุภาคในกล่องหรือบ่อศักย์จัตุรัสสี่เหลี่ยมซึ่งเป็นปัญหาพื้นฐานทางกลศาสตร์ควอนตัมโดยประยุกต์วิธีจุดภาพกระจกเงา เพื่อคำนวณหาตัวแผ่กระจาย ตลอดจนฟังก์ชันคลื่นและพลังงานที่เป็นไปได้ของอนุภาคก็น่าจะทำได้ไม่ยาก

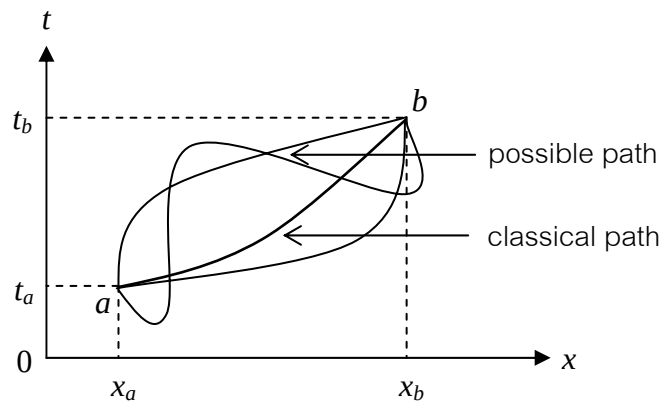
บทที่ 3

ทฤษฎีการอินทิเกรตตามเส้นทาง

3.1 ทฤษฎีการอินทิเกรตตามเส้นทางเบื้องต้น

ฟายน์แมนสังเกตว่าถ้าต้องการศึกษาพฤติกรรมของอิเล็กตรอน อาจใช้วิธีการของชเรอดิงเงอร์เพื่อหาแอมพลิจูดของความน่าจะเป็น (probability amplitude) ของอิเล็กตรอนที่ประพฤติตัวเป็นคลื่น แต่จากการวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับธรรมชาติของการเป็นไปได้ทั้งคลื่นและอนุภาค แสดงว่าแอมพลิจูดของคลื่นของอิเล็กตรอนนั้นอาจคำนวณได้โดยถือว่าอิเล็กตรอนเป็นอนุภาค (Feynman, 1956)

พิจารณาอนุภาคตัวหนึ่งเคลื่อนที่จากจุด a ณ เวลา t_a ไปยังจุด b ณ เวลา t_b ในกลศาสตร์แบบฉบับ (classical mechanics) สามารถบอกตำแหน่งของอนุภาคที่เวลาใดๆได้ นั่นคือเราทราบเส้นทางที่แน่นอนของอนุภาคซึ่งมีอยู่เส้นทางเดียว แต่ในทางควอนตัมไม่สามารถบอกตำแหน่งของอนุภาคได้แน่นอน เราบอกได้เพียงโอกาสของความน่าจะเป็นเท่านั้น ฟายน์แมนพบว่าเส้นทางเคลื่อนที่ของอนุภาคมีได้หลายเส้นทางนอกเหนือจากเส้นทางแบบฉบับ(classical path) ดังแสดงในภาพที่ 1



ภาพที่ 1 แสดงเส้นทางที่เป็นไปได้กับเส้นทางแบบฉบับ

ฟายน์แมนยังพบอีกว่าแอมพลิจูดของความน่าจะเป็นสมนัยกับเส้นทางใดมีรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ดังนี้

$$\phi[x(t)] = [\text{const.}] e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \quad (3.1)$$

โดยที่

$$S[x(t)] = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt \quad (3.2)$$

และลากรางเกียน

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \quad (3.3)$$

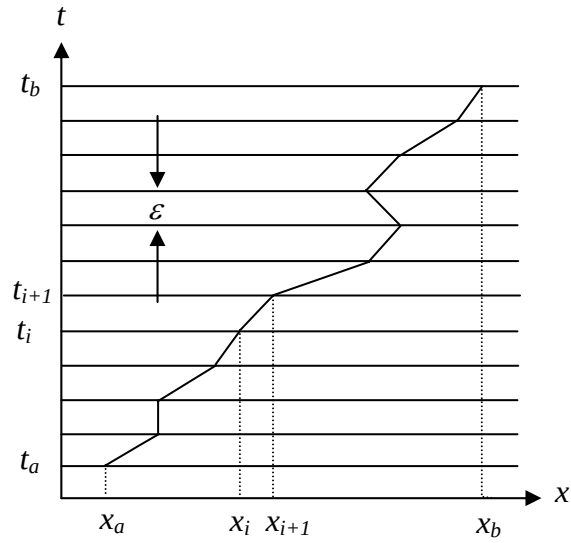
ฟายน์แมนได้ให้นิยามแอมพลิจูดของความน่าจะเป็นที่อนุภาคจะเคลื่อนที่จากจุด a ณ เวลา t_a ไปยังจุด b ณ เวลา t_b ไว้ดังนี้

$$K(b, a) = \sum_{\substack{\text{all paths} \\ a \rightarrow b}} \phi[x(t)] = \sum_{\substack{\text{all paths} \\ a \rightarrow b}} [\text{const.}] e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \quad (3.4)$$

และเรียกแอมพลิจูดของความน่าจะเป็นนี้ว่า ตัวแพร่กระจาย(propagator or transition amplitude) (บางตำราอาจเขียนเป็น $\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle$ หรือ $K(x_b, t_b; x_a, t_a)$) เนื่องจากจำนวนเส้นทางทั้งหมดระหว่างจุด a กับจุด b มีจำนวนมหาศาลจนนับไม่ถ้วน ในการรวมแอมพลิจูดตามสมการ (3.4) จึงเป็นเรื่องยุ่งยากจนแทบเป็นไปไม่ได้ เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว ฟายน์แมนจึงเปลี่ยนการบวกหรือผลบวก (summation) ในสมการ (3.4) เป็นการอินทิเกรตแทนด้วยวิธีการดังนี้

แบ่งช่วงเวลาจาก t_a ถึง t_b ออกเป็นช่วงย่อย ๆ และกว้างเท่าๆกันเป็นจำนวน n ช่วง โดยที่ $t_n - t_{n-1} = t_{n-1} - t_{n-2} = \dots = t_i - t_{i-1} = \dots = t_2 - t_1 = t_1 - t_0 = \varepsilon$ เมื่อ $t_0 = t_a$, $t_n = t_b$, $x(t_0) = x_a$ และ $x(t_n) = x_b$ โดยการแบ่งเช่นนี้ ทำให้เราได้เวลาเป็นชุด t_i ซึ่งมีระยะห่างเท่ากับ ε แต่ละ t_i เราอาจเลือก x_i ที่คล้อยจองกับ t_i หนึ่งจุด โดยการเชื่อมโยงจุดเหล่านั้นด้วยเส้นตรง เราจะได้เส้นทางเดินของอนุภาคหนึ่งเส้นทาง ดังแสดงในภาพที่ 2 ในการเดินทางของอนุภาคจากจุด x_i ไปยังจุด x_{i+1} แอมพลิจูดของความน่าจะเป็นจะมีค่าประมาณดังนี้

$$\begin{aligned} K(x_{i+1}, x_i) &\approx \frac{1}{A} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x_{i+1}, x_i]\right) \\ &\approx \frac{1}{A} \exp\left(\frac{i}{\hbar} L\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\varepsilon}, \frac{x_{i+1} + x_i}{2}, \frac{t_{i+1} + t_i}{2}\right) \varepsilon\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$



ภาพที่ 2 แสดงการคำนวณเส้นทางของอนุภาคโดยแบ่งทางเดินออกเป็นเส้นทางย่อยๆ

แอมพลิจูดของความน่าจะเป็นในการเดินทางของอนุภาคจากจุด a ไปยังจุด b โดยใช้เส้นทางดังแสดงในภาพที่ 2 คือ

$$\begin{aligned}\phi[x(t)] &\approx K(x_n, x_{n-1})K(x_{n-1}, x_{n-2})\dots K(x_i, x_{i-1})\dots K(x_1, x_0) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} K(x_i, x_{i-1})\end{aligned}\quad (3.6)$$

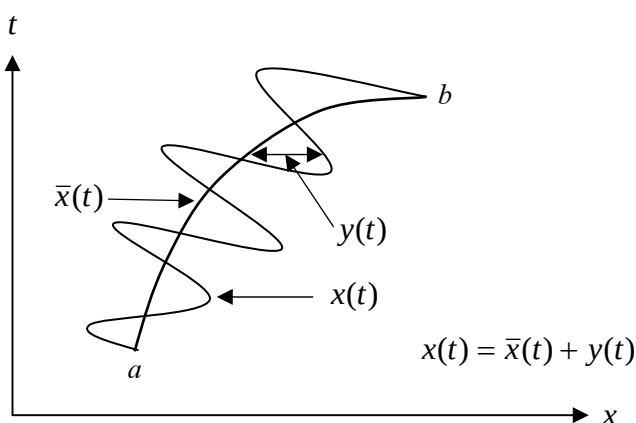
จากสมการ (3.5) และ (3.6) เราจะได้ว่าผลรวมของการมีส่วนร่วม (contribution) จากแต่ละเส้นทางสามารถหาได้โดยการอินทิเกรตสมการ (3.6) กล่าวคือ

$$\begin{aligned}K(b, a) &= \sum_{a \rightarrow b} \phi[x(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint \dots \int \prod_{i=1}^{n-1} K(x_i, x_{i-1}) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint \dots \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} \varepsilon \sum_i L\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{\varepsilon}, \frac{x_{i+1} + x_i}{2}, \frac{t_{i+1} + t_i}{2}\right)\right) \frac{dx_1}{A} \frac{dx_2}{A} \dots \frac{dx_i}{A} \dots \frac{dx_{n-2}}{A} \frac{dx_{n-1}}{A}\end{aligned}\quad (3.7)$$

โดยที่ A เป็นค่าคงที่ พบว่ามีค่าเป็น $\left(\frac{2\pi\hbar\epsilon}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$ สมการ(3.7) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปที่กะทัดรัดกว่าดังนี้

$$K(b,a) = \int_a^b e^{\frac{i}{\hbar}S[b,a]} D[x(t)] \quad (3.8)$$

ซึ่งรู้จักกันดีในนามของอินทิกรัลตามเส้นทาง (path integral) หรือการอินทิเกรตตามเส้นทาง (path integration) พิจารณาสมการ (3.7) จะเห็นว่าการคำนวณตัวแปรกระจายนั้น ความยากง่ายในการคำนวณขึ้นอยู่กับรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ของลากรางเกียนของระบบ ถ้าหากทำการอินทิเกรตแต่ละตัวแปรโดยตรง จำนวนครั้งของการอินทิเกรตมากมายมหาศาลจนแทบเป็นไปไม่ได้ ในทางปฏิบัติอย่างไรก็ตามเราสามารถเลี่ยงปัญหานี้ได้โดยการแทนเส้นทางใดๆ ที่เป็นไปได้ด้วยเส้นทางแบบฉบับ ดังแสดงในภาพที่ 3



ภาพที่ 3 แสดงการแทนเส้นทางใดๆที่เป็นไปได้ด้วยเส้นทางแบบฉบับ

ตัวอย่างเช่น ระบบของตัวแกว่งกวัดฮาร์มอนิกเชิงเส้นซึ่งมีลากรางเกียนดังนี้

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) \quad (3.9)$$

โดยการแทนเส้นทางใด ๆ ที่เป็นไปได้ด้วยเส้นทางแบบฉบับ กับส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากเส้นทางแบบฉบับ กล่าวคือ เราให้

$$x(t) = \bar{x}(t) + y(t) \quad (3.10)$$

เมื่อ $\bar{x}(t)$ และ $y(t)$ คือเส้นทางแบบฉบับ และส่วนที่เบี่ยงเบนไปจากเส้นทางแบบฉบับ เมื่อแทนสมการ (3.10) ลงใน (3.8) เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} K(b, a) &= e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_b, x_a)} \int_0^0 D[y(t)] e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \frac{m}{2} (\dot{y}^2 - \omega^2 y^2) dt} \\ &= F(t_b, t_a) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_b, x_a) \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

โดยที่ $F(t_b, t_a)$ คือ พรีแฟกเตอร์ (prefactor) ซึ่งเป็นปริมาณที่ไม่ขึ้นอยู่กับจุดเริ่มต้นและจุดปลายของการเคลื่อนที่ของอนุภาค ส่วน $S_{cl}(x_b, x_a)$ คือแอคชันแบบฉบับ สามารถคำนวณได้โดยใช้หลักแห่งการกระทำที่น้อยที่สุด (the principle of least action) อย่างไรก็ตาม แวน เวิลด์ (van Vleck, 1978) และ พาอูลี (Pauli, 1952) พบว่าในกรณีที่ลากรางเจียนของระบบมีรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นกำลังสอง (quadratic) ค่าพรีแฟกเตอร์ของระบบสามารถหาได้โดยใช้สูตร

$$F(t_b, t_a) = \left(\frac{i}{2\pi\hbar} \frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_b} S_{cl}(x_b, x_a) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

โดยอาศัยสมการ (3.11) และ (3.12) เราจะได้ว่า ในการคำนวณหาตัวแผ่กระจายของอนุภาคในทางควอนตัมมักกลับกลายเป็นการคำนวณหาเส้นทางแบบฉบับแทน

3.2 ฟังก์ชันคลื่นและพลังงานของอนุภาค

พิจารณาสมการ (3.8) อีกครั้งหนึ่ง

$$K(b, a) = \int_a^b e^{\frac{i}{\hbar} S[b, a]} D[x(t)] \quad (3.13)$$

เนื่องจาก $S[x(t)] = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt$ และจากคุณสมบัติของการอินทิเกรตสามารถแบ่งช่วงของการ -

อินทิเกรตออกเป็นสองส่วนได้ กล่าวคือ

$$S[b, a] = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt = \int_{t_a}^{t_c} L(x, \dot{x}, t) dt + \int_{t_c}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt$$

$$S[b, a] = S[b, c] + S[c, a] \quad (3.14)$$

จากสมการ (3.13) และสมการ (3.14) เราจะได้ว่า

$$K(b, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^c \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[c, a]\right) D[x(t)] \int_c^b \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[b, c]\right) D[x(t)] dx_c$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K(b, c) K(c, a) dx_c \quad (3.15)$$

สูตรนี้อาจตีความได้ว่าอนุภาคเคลื่อนที่จากจุด a ถึงจุด b จะเท่ากับ (หรือให้ผลเหมือนกัน) อนุภาคเคลื่อนที่จาก a ถึง c แล้วจาก c ถึง b แอมพลิจูดของอนุภาคที่เคลื่อนที่จาก a ถึง b จะเท่ากับผลคูณของแอมพลิจูดของแต่ละช่วงของการเดินทางและแอมพลิจูดรวมทั้งหมดของอนุภาคที่เคลื่อนที่จาก a ถึง b จึงได้จากการอินทิเกรตตัวแปร x_c กล่าวคือ

$$K(a \rightarrow c \rightarrow b) = K(b, c) K(c, a)$$

$$K(a \rightarrow b) = \int_{-\infty}^{\infty} K(b, c) K(c, a) dx_c \quad (3.16)$$

ในกรณีที่เราไม่สนใจว่าอนุภาคเริ่มต้นมาจากตำแหน่งใด (x_a อาจมาจากตำแหน่งใดๆก็ได้) $K(b, a)$ ก็จะกลายเป็นแอมพลิจูดของความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคที่ตำแหน่ง x_b ณ เวลา t_b แอมพลิจูดดังกล่าวนี้ก็คือ ฟังก์ชันคลื่นนั่นเอง กล่าวคือ

$$K(b, a) = K(x_b, t_b; x_a, t_a) \xrightarrow{\text{ไม่สนใจต้นกำเนิด}(x_a, t_a)} \psi(x_b, t_b)$$

ดังนั้น จากสมการ (3.15) หรือ (3.16) ถ้าไม่สนใจตำแหน่งเริ่มต้น (x_a, t_a) เราจะได้ว่า

$$\psi(x_b, t_b) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x_b, t_b; x_c, t_c) \psi(x_c, t_c) dx_c \quad (3.17)$$

สรุปได้ว่า ถ้าทราบฟังก์ชันคลื่น ณ เวลา t_c และทราบรูปแบบของตัวแผ่กระจาย เราก็สามารถหาฟังก์ชันคลื่น ณ เวลา t ใด ๆ ได้ โดยที่ $t > t_c$

พิจารณาระบบนิ่ง (stationary system) ใดๆ แฮมิลโทเนียนของระบบไม่ขึ้นต่อเวลา อย่างชัดเจน คำตอบหรือผลเฉลยของสมการชโรดิงเงอร์คือ

$$H\psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad (3.18)$$

จะอยู่ในรูป

$$\psi(x, t) = \sum_n C_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \psi_n(x) \quad (3.19)$$

โดยที่

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \psi_n^*(x) e^{\frac{i}{\hbar} E_n t} dx \quad (3.20)$$

เมื่อแทน C_n ลงในสมการ (3.19) เราจะได้

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x', t') \psi_n^*(x') e^{\frac{i}{\hbar} E_n t'} dx' \psi_n(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \psi_n(x) \psi_n^*(x') e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t-t')} \psi(x', t') dx' \end{aligned} \quad (3.21)$$

เปรียบเทียบกับสมการ (3.17) กับสมการ (3.21) เราจะได้ว่า

$$K(x, t; x', t') = \sum_n \psi_n(x) \psi_n^*(x') e^{-\frac{i}{\hbar} E_n (t-t')} \quad (3.22)$$

นี่คือตัวแผ่กระจายของอนุภาคที่มีระดับพลังงานไม่ต่อเนื่อง ส่วนในกรณีที่อนุภาคมีระดับพลังงานต่อเนื่อง สมการ (3.22) จะกลายเป็น

$$K(x,t;x',t') = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(x) \psi_k^*(x') e^{\frac{i}{\hbar} E(k)(t-t')} dk \quad (3.23)$$

จะเห็นว่าตัวแผ่กระจายจะให้ความรู้แก่เราเกี่ยวกับฟังก์ชันคลื่นและพลังงานพร้อม ๆ กัน

3.3 การคำนวณหาตัวแผ่กระจาย

3.3.1 อนุภาคอิสระ (free particle)

อนุภาคอิสระหมายถึง อนุภาคที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของแรงใด ๆ พลังงานศักย์ของอนุภาคมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นพลังงานรวมและลากรางเกียนของระบบจะประกอบด้วยพลังงานจลน์แต่เพียงอย่างเดียว กล่าวคือ

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad (3.24)$$

อาศัยสมการ (3.7) ตัวแผ่กระจายสามารถเขียนได้ดังนี้

$$K(b,a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \dots \int \exp\left(\frac{im}{2\hbar\varepsilon} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})^2\right) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon}\right)^{\frac{n}{2}} \quad (3.25)$$

พิจารณาสมการ (3.25) จะเห็นว่าประกอบไปด้วยอินทิกรัลแบบเกาส์เซียน (Gaussian integral) เป็นจำนวนมาก กล่าวคือเป็นอินทิกรัลในรูปแบบ

$$\int \exp(-ax^2) dx \text{ หรือ } \int \exp(-ax^2 + bx) dx$$

เนื่องจากการอินทิเกรตเทอมที่เป็นเกาส์เซียน ผลลัพธ์ที่ได้กลับมามีอยู่ในรูปเกาส์เซียนอีก ดังนั้นเราสามารถอินทิเกรตตัวแปรในสมการ (3.25) ทีละตัวแปร พิจารณาการอินทิเกรตตัวแรก

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon} \right) \exp\left(-\frac{m}{2i\hbar\varepsilon} [(x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_0)^2] \right) dx_1 \\
&= \left(\frac{m}{2\pi\hbar \cdot 2\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m}{2i\hbar \cdot 2\varepsilon} (x_2 - x_0)^2 \right)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

อันดับต่อไปเราคูณสมการ (3.26) ด้วยเทอม

$$\left(\frac{m}{2\pi\hbar\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m}{2i\hbar\varepsilon} (x_3 - x_2)^2 \right) \tag{3.27}$$

แล้วทำการอินทิเกรตโดยให้ x_2 เป็นตัวแปร ผลที่ได้จะคล้ายกับสมการ (3.26) ยกเว้นตำแหน่ง $(x_2 - x_0)^2$ ต้องเปลี่ยนเป็น $(x_3 - x_0)^2$ นอกจากนี้เทอม 2ε จะถูกแทนด้วย 3ε ในสองตำแหน่ง ผลที่ได้คือ

$$\left(\frac{m}{2\pi\hbar \cdot 3\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m}{2i\hbar \cdot 3\varepsilon} (x_3 - x_0)^2 \right) \tag{3.28}$$

โดยวิธีการดังกล่าว หลังจากที่ได้ปฏิบัติเป็นจำนวน $n-1$ ครั้ง เราได้

$$\left(\frac{m}{2\pi\hbar \cdot n\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m}{2i\hbar \cdot n\varepsilon} (x_n - x_0)^2 \right) \tag{3.29}$$

เนื่องจาก $n\varepsilon = t_n - t_0 = t_b - t_a$ ดังนั้น ในที่สุดเราได้ตัวแพร่กระจายของอนุภาคอิสระ

$$K(b, a) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar(t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m}{2i\hbar(t_b - t_a)} (x_b - x_a)^2 \right) \tag{3.30}$$

3.3.2 ฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้น

ฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้นหรือตัวแกว่งกวัดฮาร์โมนิกหนึ่งมิติมีลากรางเกียนในรูปแบบนี้

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) \quad (3.31)$$

ดังนั้นตัวแปรกระจายสามารถเขียนได้เป็น

$$K(b, a) = \int_a^b \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) dt\right) D[x(t)] \quad (3.32)$$

เราอาจพิจารณาการอินทิเกรตข้างต้นโดยตรงเช่นเดียวกับกรณีของอนุภาคอิสระในทางทฤษฎีแล้ว เราอาจคำนวณค่าอินทิกรัลเหล่านี้ได้ เนื่องจากรูปแบบของการอินทิเกรตยังคงเป็นแบบเกาส์เซียน แต่ในทางปฏิบัติแล้วการคำนวณดังกล่าวค่อนข้างยุ่งยาก จึงขอเสนอวิธีใหม่ดังได้แสดงไว้ในหัวข้อ 3.1 กล่าวคือแยกทางเดินแบบฉบับออกจากทางเดินที่เป็นไปได้ทั้งหมด วิธีการนี้จะเป็นประโยชน์ไม่เฉพาะแต่ปัญหาของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เท่านั้น แต่จะมีประโยชน์ต่อปัญหาอื่น ๆ ที่มีลากรางเกียนยุ่งยากกว่านี้

จากวิชากลศาสตร์แบบฉบับ ทางเดินของอนุภาคจะต้องสอดคล้องสมการลากรางหรือสอดคล้องหลักแห่งการกระทำที่น้อยที่สุด (the principle of least action) กล่าวในเชิงคณิตศาสตร์เราได้

$$\delta S = \delta \int L(x, \dot{x}, t) dt = 0 \quad (3.33)$$

ขั้นตอนในการคำนวณหาเส้นทางแบบฉบับ $\bar{x}$ อาจกระทำได้ดังนี้ สมมติว่าเราทำให้ทางเดินเปลี่ยนไปจากทางเดินแบบฉบับเป็นจำนวน δx เนื่องจาก $\delta x(t_a) = \delta x(t_b) = 0$ ดังนั้น

$$\delta S = S(\bar{x} + \delta x) - S(\bar{x}) = 0 \quad (3.34)$$

กระจาย δx ออกเป็นอนุกรมกำลัง โดยคิดเฉพาะกำลังที่หนึ่งของ δx เราสามารถเขียน

$$S(\bar{x} + \delta x) = \int_a^b L(\dot{\bar{x}} + \delta \dot{x}, \bar{x} + \delta x, t) dt$$

$$\begin{aligned}
 S(\bar{x} + \delta x) &= \int_a^b \left(L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) + \delta \dot{\bar{x}} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \delta x \frac{\partial L}{\partial x} \right) dt \\
 S(\bar{x} + \delta x) &= S(\bar{x}) + \int_a^b \left(\delta \dot{\bar{x}} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \delta x \frac{\partial L}{\partial x} \right) dt
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

โดยการอินทิเกรตบางส่วนเราได้

$$\delta S = \delta x \frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_a^b \delta \dot{\bar{x}} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right) dt \tag{3.36}$$

เนื่องจาก δx ที่จุดปลายทั้งสองมีค่าเป็นศูนย์ เทอมแรกทางขวาของสมการ (3.36) จึงมีค่าเป็นศูนย์ ระหว่างจุดปลายทั้งสอง δx มีค่าเท่าใดก็ได้ เงื่อนไข $\delta S = 0$ จึงสอดคล้องกับ

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0 \tag{3.37}$$

เราเรียกสมการ (3.37) ว่า สมการลากราง (Lagrange equation)

สำหรับกรณีของฮาร์โมนิกออสซิลเลเตอร์ สมการ (3.37) กลับกลายเป็น

$$\ddot{\bar{x}} + \omega^2 \bar{x} = 0 \tag{3.38}$$

ผลเฉลยหรือคำตอบทั่วไปของสมการ (3.38) คือ

$$\bar{x} = A \cos \omega t + B \sin \omega t \tag{3.39}$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงที่ไม่เจาะจง อาศัยเงื่อนไข $\bar{x}(t_a) = x_a$ และ $\bar{x}(t_b) = x_b$ คำตอบของสมการ (3.39) จึงกลายเป็น

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{\sin \omega(t_b - t_a)} (x_b \sin \omega(t - t_a) + x_a \sin \omega(t_b - t)) \tag{3.40}$$

สมการ (3.40) นี้สามารถนำไปคำนวณหาแอดชันแบบฉบับ S_{cl} ได้ กล่าวคือ

$$S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{m}{2} \dot{\bar{x}}^2 - \frac{m}{2} \omega^2 \bar{x}^2 \right) dt \quad (3.41)$$

เราอาจคำนวณหา S_{cl} โดยการแทนค่า $\dot{\bar{x}}^2$ และ $\bar{x}^2$ ที่ได้จากสมการ (3.40) ลงในสมการ แล้วทำการอินทิเกรต อย่างไรก็ตามการคำนวณจะสะดวกกว่า หากเราอินทิเกรตสมการ (3.41) บางส่วนเสียก่อน โดยที่

$$S_{cl} = \frac{m}{2} (\dot{\bar{x}}\bar{x}) \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} \bar{x} \left(\frac{m}{2} \ddot{\bar{x}} + \frac{m}{2} \omega^2 \bar{x} \right) dt \quad (3.42)$$

เราจะเห็นว่าเทอมที่ 2 ทางด้านขวามือของสมการ (3.42) มีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจาก $\bar{x}$ สอดคล้องสมการ (3.38) ในที่สุดเราได้

$$S_{cl} = \frac{m}{2} (\dot{\bar{x}}(t_b)\bar{x}(t_b) - \dot{\bar{x}}(t_a)\bar{x}(t_a)) \quad (3.43)$$

หาค่าอนุพันธ์ของ $\bar{x}(t)$ เทียบกับเวลา t แล้วแทนค่า t เท่ากับ t_a และ t_b ในที่สุดเราจะได้

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t_a) &= \frac{\omega}{\sin \omega(t_b - t_a)} (x_b - x_a \cos \omega(t_b - t_a)) \\ \dot{\bar{x}}(t_b) &= \frac{\omega}{\sin \omega(t_b - t_a)} (x_b \cos \omega(t_b - t_a) - x_a) \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

แทนค่า $\dot{\bar{x}}(t_a)$, $\dot{\bar{x}}(t_b)$, $\bar{x}(t_a)$ และ $\bar{x}(t_b)$ ลงในสมการ (3.42) เราได้

$$S_{cl} = \frac{m\omega}{2 \sin \omega(t_b - t_a)} ((x_a^2 + x_b^2) \cos \omega(t_b - t_a) - 2x_a x_b) \quad (3.45)$$

เมื่อได้ S_{cl} แล้ว เราก็สามารถคำนวณหา prefactor โดยใช้สูตรของ van Vleck และ Pauli ได้เลย

กล่าวคือ โดยอาศัยสมการ (3.12) เราได้

$$F(t_b, t_a) = \left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sin \omega(t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.46)$$

จากสมการ (3.45), (3.46) และอาศัยสมการ (3.11) ในที่สุดเราได้ตัวแผ่กระจายของฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้นดังนี้

$$K(b, a) = \left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar \sin \omega T} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{im\omega}{2\hbar \sin \omega T} \left((x_a^2 + x_b^2) \cos \omega T - 2x_a x_b \right) \right) \quad (3.47)$$

โดยที่ $T = t_b - t_a$

บทที่ 4

ผลการวิจัย

4.1 ปัญหากำแพงศักย์อนันต์ (infinite potential barrier)

ก่อนที่จะศึกษาปัญหาอนุภาคภายในบ่อศักย์จัตุรัสลึกอนันต์ จำเป็นที่จะต้องศึกษาปัญหาที่ง่ายกว่าเสียก่อนคือ ปัญหากำแพงศักย์อนันต์ซึ่งเป็นปัญหาของสถานะที่มีขอบเขตไม่จำกัด (unbounded-state problem) ที่ง่ายที่สุดปัญหาหนึ่งในวิชากลศาสตร์ควอนตัม และมักปรากฏเป็นตัวอย่างแรกๆ ตัวอย่างหนึ่งในตำรากลศาสตร์ควอนตัมเบื้องต้นทั่วไป เป็นปัญหาของอนุภาคตัวหนึ่งที่เคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของศักย์

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x > 0 \\ \infty & \text{for } x \leq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

สถานะไอเกนโมเมนตัมหรือฟังก์ชันคลื่นต่อกรณีดังกล่าวนี้ได้เป็นไปตามแบบอย่างของอนุภาคอิสระ ทว่ากลับมีรูปแบบเป็น

$$\psi_p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}} \sin\left(\frac{px}{\hbar}\right) & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

4.1.1 แอคชันแบบฉบับของอนุภาคนอกกำแพงศักย์อนันต์

สำหรับอนุภาคอิสระที่เคลื่อนที่นอกกำแพงศักย์สูงอนันต์ ($x > 0$) แอคชันแบบฉบับมีรูปแบบเป็น

$$S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt \quad (4.3)$$

เมื่อ
$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

โดยที่แอคชันแบบฉบับดังกล่าวสอดคล้องสมการลากราง หรือสอดคล้องหลักแห่งการกระทำที่น้อยที่สุด (the principle of least action) (ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้น สมการ (3.33)-(3.37)) ดังนั้น

$$\delta S_{cl} = \delta \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt = 0 \quad (4.4)$$

แสดงว่า $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ และสามารถหาผลเฉลยของสมการดังนี้

จาก
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (4.5)$$

โดย
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x}$$

และ
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

เมื่อแทนสมการข้างต้นลงในสมการ (4.5) จะได้

$$m\ddot{x} = 0$$

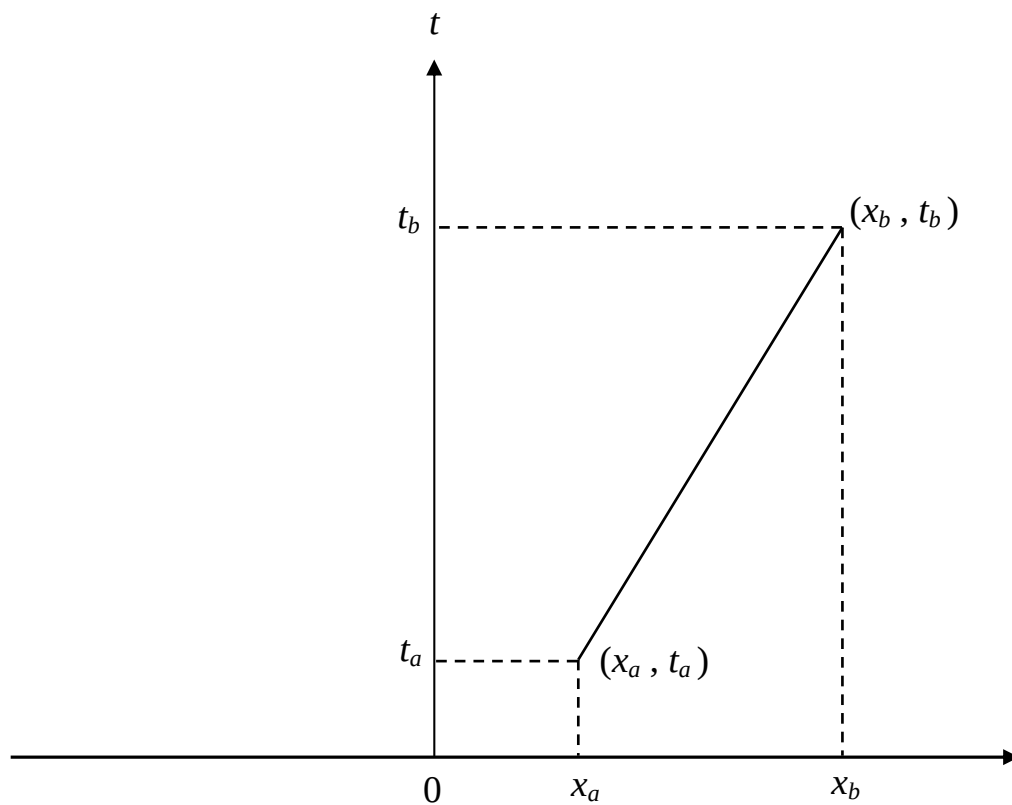
หรือ
$$\ddot{x} = 0$$

ดังนั้น
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = 0$$

$$\left(\frac{dx}{dt} \right) = c_1$$

จะได้
$$x = c_1 t + c_2 \quad (4.6)$$

หาค่าคงที่ c_1, c_2 ได้จากเงื่อนไขเริ่มต้น โดยพิจารณาภาพที่ 4 ประกอบ ดังนี้



ภาพที่ 4 แสดงเส้นทางแบบฉบับของอนุภาคอิสระ

ให้
$$x(t_b) = x_b ; \quad x_b = c_1 t_b + c_2 \quad (4.7)$$

และ
$$x(t_a) = x_a ; \quad x_a = c_1 t_a + c_2 \quad (4.8)$$

จากสมการ (4.7) และสมการ (4.8) จะได้ค่าคงที่ c_1, c_2 ดังนี้

$$c_1 = \frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \quad (4.9)$$

และ

$$c_2 = x_b - \left(\frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \right) t_b \quad (4.10)$$

เมื่อแทนสมการ (4.9) และสมการ (4.10) ลงในสมการ (4.6) จะได้

$$x = \left(\frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \right) t + x_b - \left(\frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \right) t_b \quad (4.11)$$

โดยที่ x ในสมการ (4.11) คือเส้นทางแบบฉบับ $\bar{x}(t)$ หรือ $x_{cl}(t)$ ดังนั้น

$$\bar{x}(t) = x_{cl}(t) = \left(\frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \right) t + x_b - \left(\frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \right) t_b \quad (4.12)$$

และ

$$\dot{\bar{x}}(t) = \dot{x}_{cl}(t) = \left(\frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \right) \quad (4.13)$$

จาก $S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt$ สำหรับอนุภาคอิสระซึ่งมีลากรางเจียนเป็น $L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ ดังนั้น

$$S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 dt \quad (4.14)$$

เมื่อแทนสมการ (4.13) ลงในสมการ (4.14) จะได้

$$S_{cl} = \int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} m \left(\frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} \right)^2 dt \quad (4.15)$$

ดังนั้น แอคชันแบบฉบับของอนุภาคนอกกำแพงศักย์อนันต์คือ

$$S_{cl} = \frac{1}{2} m \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a} \quad (4.16)$$

4.1.2 ตัวแพร่กระจายของอนุภาคภายใต้อิทธิพลของกำแพงศักย์อนันต์

จาก
$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = F(t_b, t_a) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(x_b, x_a)\right\} \quad (4.17)$$

และ
$$F(t_b, t_a) = \left(\frac{i}{2\pi\hbar} \frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_b} S_{cl}(x_b, x_a)\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.18)$$

เมื่อแทนสมการ (4.16) ลงในสมการ (4.18) จะได้

$$F(t_b, t_a) = \left(\frac{i}{2\pi\hbar} \left(\frac{-m}{t_b - t_a}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.19)$$

$$F(t_b, t_a) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.20)$$

เมื่อแทนสมการ (4.16) และสมการ (4.20) ลงในสมการ (4.17) จะได้

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{im}{2\hbar} \frac{(x_b - x_a)^2}{(t_b - t_a)}\right\} \quad (4.21)$$

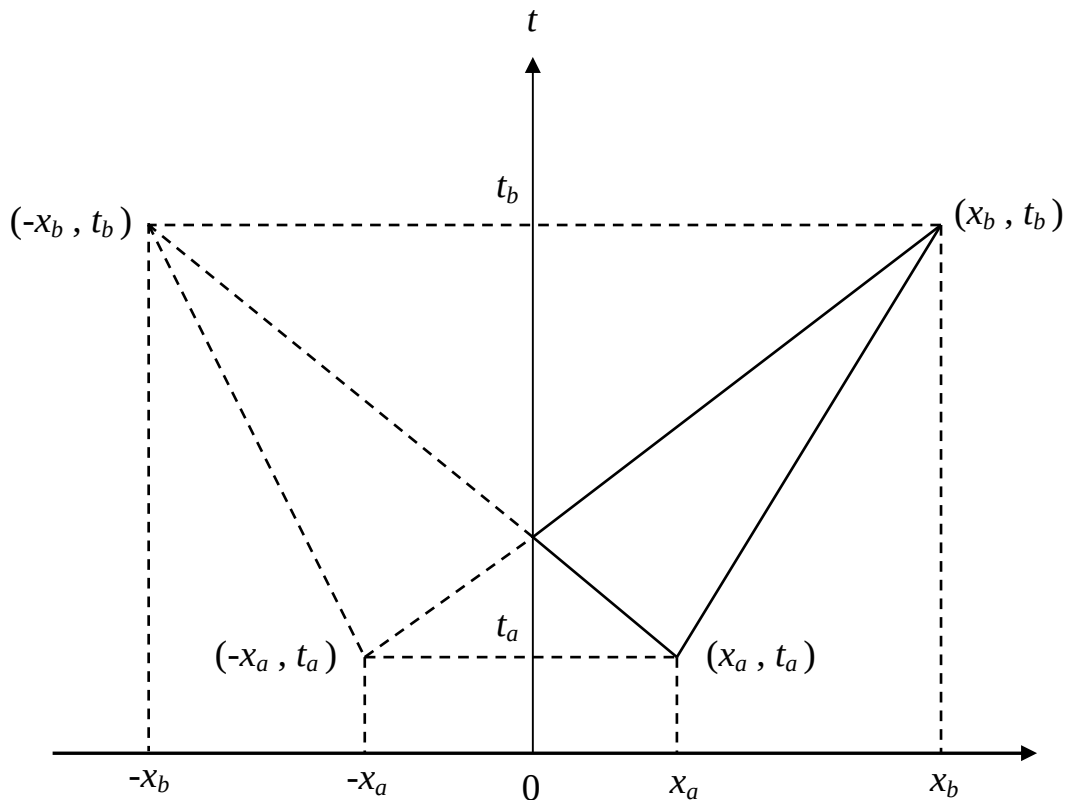
ตัวแพร่กระจายที่ได้จากสมการ (4.21) เป็นตัวแพร่กระจายของอนุภาคอิสระที่เคลื่อนที่จากตำแหน่ง (x_a, t_a) ไปยัง (x_b, t_b) โดยตรง ซึ่งอิทธิพลของกำแพงศักย์สูงอนันต์มิได้มีผลต่ออนุภาคแต่ประการใด ตัวแพร่กระจายดังกล่าวจึงไม่อาจใช้เป็นตัวแพร่กระจายของอนุภาคภายใต้อิทธิพลของกำแพงศักย์สูงอนันต์ได้

ในปี ค.ศ.1981 กูดแมน (Goodman) จึงได้เสนอว่า เส้นทางแบบฉบับของอนุภาคที่เคลื่อนที่จาก (x_a, t_a) ไปยัง (x_b, t_b) มีได้สองเส้นทาง เส้นทางแรกคือเส้นทางจาก (x_a, t_a) ไปยัง (x_b, t_b) โดยตรง ส่งผลให้ได้ตัวแพร่กระจายของอนุภาคอิสระดังสมการ (4.21) ส่วนเส้นทางที่สองอนุภาคเคลื่อนที่จาก (x_a, t_a) ไปกระทบผนังกำแพงศักย์ก่อน แล้วจึงสะท้อนกลับไปยัง (x_b, t_b)

ถูกแทนได้แก้ปัญหาเส้นทางผ่านการสะท้อนผนังกำแพงศักย์ดังกล่าว โดยอาศัยวิธีจุดภาพกระจกเงาเพื่อหาเส้นทางที่สมมูลกัน กล่าวคือ ให้ผนังกำแพงศักย์ (แกน $x = 0$) เป็นกระจกเงาสะท้อนจุด (x_a, t_a) และ (x_b, t_b) ซึ่งเงาของจุดคู่นี้ดังกล่าวก็คือ $(-x_a, t_a)$ และ $(-x_b, t_b)$ ตามลำดับ (ดังแสดงในภาพที่ 5) จะได้ว่าเส้นทางแบบฉบับที่สะท้อนผ่านผนังจะสมมูลกับเส้นทางแบบฉบับจากจุด $(-x_a, t_a)$ ไปยัง (x_b, t_b) และ (x_a, t_a) ไปยัง $(-x_b, t_b)$ ส่งผลให้ตัวแผ่กระจายที่ผ่านการสะท้อนกลับกลายเป็น

$$K(-x_b, t_b; x_a, t_a) = K(x_b, t_b; -x_a, t_a)$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar} \frac{(-x_b - x_a)^2}{(t_b - t_a)} \right\} \quad (4.22)$$



ภาพที่ 5 แสดงเส้นทางแบบฉบับสองเส้นทางที่เชื่อมต่อกับจุด (x_a, t_a) และ (x_b, t_b) พร้อมด้วยจุดภาพกระจกเงาที่คล้องจองกัน

โดยอาศัยวิธีจุดภาพกระจกเงาของกูดแมน ตัวแผ่กระจายของอนุภาคอิสระกรณีเคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของกำแพงศักย์อนันต์สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar(t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \exp\left(\frac{im}{2\hbar(t_b - t_a)} (x_b - x_a)^2 \right) - \exp\left(\frac{im}{2\hbar(t_b - t_a)} (-x_b - x_a)^2 \right) \right\} \quad (4.23)$$

$$\text{หรือ} \quad K(x_b, t_b; x_a, t_a) = K(x_b, t_b; x_a, t_a)_F - K(-x_b, t_b; x_a, t_a)_F \quad (4.24)$$

โดยตัวห้อย F บ่งชี้ถึงตัวแผ่กระจายของอนุภาคอิสระ และสาเหตุที่เทอมที่สองของสมการ (4.23) หรือ (4.24) มีค่าเป็นลบนั้น เนื่องจากเป็นตัวแผ่กระจายของอนุภาคที่สะท้อนผนังกำแพงศักย์ จะต้องคูณด้วยตัวประกอบเฟส -1 (ประกอบเฟสดังกล่าวเกิดขึ้นจากการสะท้อนตรงขอบปลายของฟังก์ชันคลื่น)

4.2 ปัญหาบ่อศักย์จัตุรัสลึกอนันต์ (infinite square potential well)

ปัญหาบ่อศักย์จัตุรัสลึกอนันต์หรืออนุภาคในกล่อง เป็นปัญหาของสถานะที่มีขอบเขตจำกัด (bounded-state problem) และมักปรากฏเป็นตัวอย่างในตำรากลศาสตร์ควอนตัมทั่วไป ถัดจากปัญหากำแพงศักย์ เป็นปัญหาของอนุภาคตัวหนึ่งที่เคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของศักย์

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 < x < L \\ \infty & \text{for } x \leq 0 \text{ or } x \geq L \end{cases} \quad (4.25)$$

และฟังก์ชันคลื่นต่อกรณีดังกล่าวมีรูปแบบเป็น

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & \text{for } 0 < x < L \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \text{ or } x \geq L \end{cases} \quad (4.26)$$

4.2.1 ตัวแผ่กระจายของอนุภาคภายใต้อิทธิพลของบ่อศักย์จัตุรัสลึกอนันต์

จากแนวความคิดของกูดแมนที่ได้กล่าวมาแล้วก่อนหน้านี้ว่า เส้นทางแบบฉบับของอนุภาคประกอบด้วยสองเส้นทางคือ เส้นทางตามแบบอย่างของอนุภาคอิสระและเส้นทางที่ผ่านการสะท้อนกำแพง แต่สำหรับบ่อศักย์จัตุรัสลึกอนันต์ อนุภาคอาจจะกระทบผนังด้านหลังหรือด้านหน้าของกำแพงจากจุด (x_a, t_a) แล้วสะท้อนออกไปยังจุด (x_b, t_b) ด้วยจำนวนครั้งที่ไม่เจาะจง (an arbitrary number of times) เมื่อให้ผนังกำแพงศักย์ทั้งสองด้านเป็นกระจกเงา ดังนั้นเส้นทางแบบฉบับที่เชื่อมต่อกับจุดทั้งสองจุดย่อมมีจำนวนมากมายมหาศาล และสอดคล้องกับจุดภาพกระจกเงาที่ต่อเนื่องกันจนนับไม่ถ้วน(ดังภาพที่ 4.3) โดยพิภคของจุดภาพกระจกเงาดังกล่าวเป็นไปตามสมการ

$$x_r = \begin{cases} rL + x_b & \text{for } r \text{ even } (r = 0, \pm 2, \pm 4, \dots) \\ (r+1)L - x_b & \text{for } r \text{ odd } (r = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots) \end{cases} \quad (4.27)$$

เพื่อให้ r มีค่าเดียวกัน สามารถเขียนสมการ (4.27) ได้ใหม่เป็น

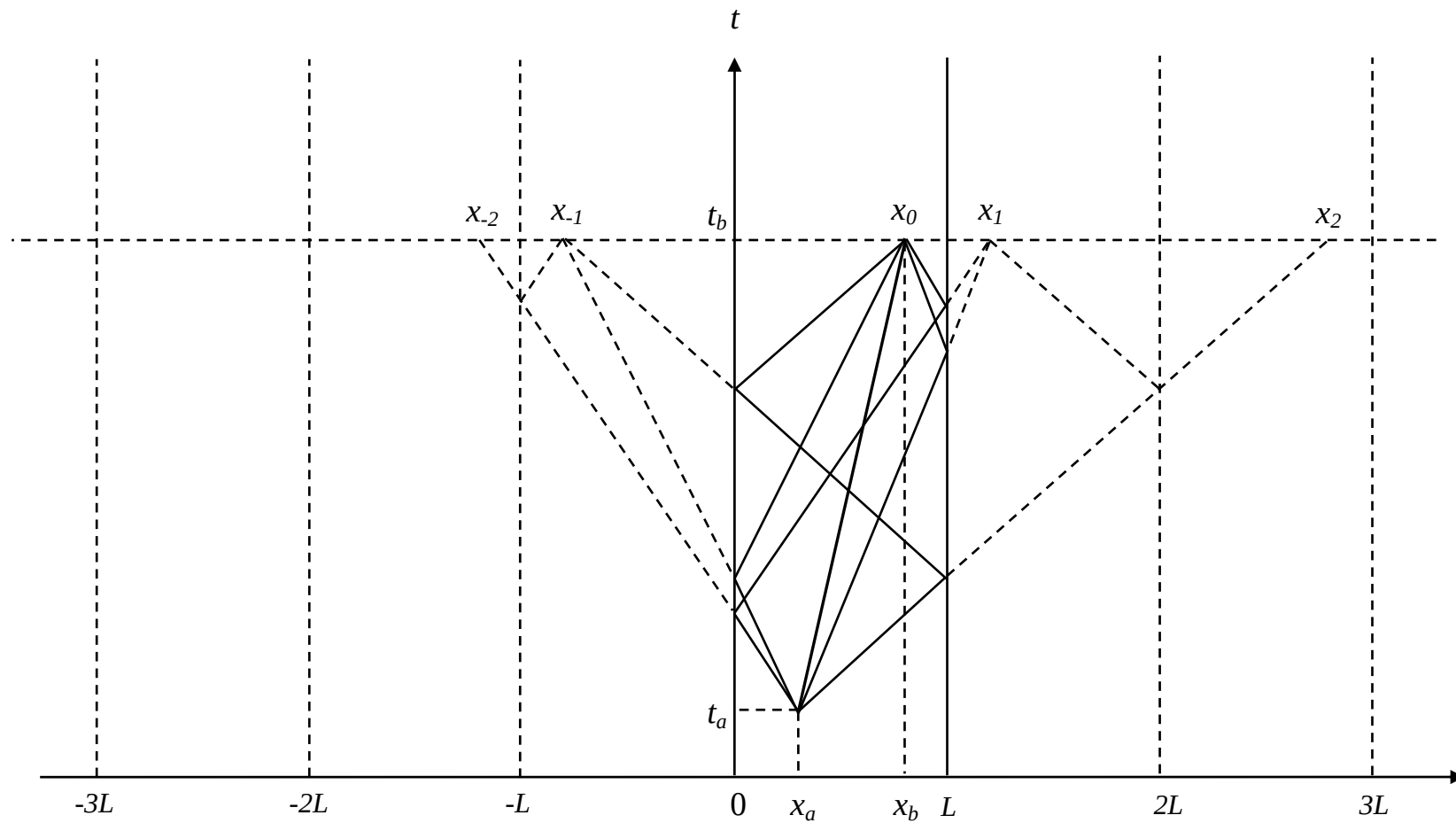
$$x_r = \begin{cases} 2rL + x_b & \text{for } r \text{ even } (r = 0, \pm 1 \pm 2, \pm 3, \dots) \\ 2rL - x_b & \text{for } r \text{ odd } (r = 0, \pm 1 \pm 2, \pm 3, \dots) \end{cases} \quad (4.28)$$

เมื่อ r และ L คือ จำนวนครั้งของการสะท้อน และความกว้างของบ่อศักย์ ตามลำดับ

อนุภาคที่สะท้อนผนังกำแพงศักย์เป็นเลขคู่จะไม่มีการเปลี่ยนแปลงเฟส ส่วนอนุภาคที่สะท้อนผนังกำแพงศักย์เป็นเลขคี่ต้องคูณด้วยตัวประกอบเฟส -1 ดังนั้นเมื่อประยุกต์สมการ (4.23) และ (4.24) จะได้ตัวแผ่กระจายของอนุภาคคือ

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \sum_{\text{even}} K(x_r, t_b; x_a, t_a)_F - \sum_{\text{odd}} K(x_r, t_b; x_a, t_a)_F \quad (4.29)$$

หรือ



ภาพที่ 6 แสดงเส้นทางแบบฉบับจำนวนมากมายมหาศาลที่เชื่อมต่อดูจุด (x_a, t_a) และ (x_b, t_b) พร้อมด้วยจุดภาพกระจกเงาที่คล้องจองกัน

$$\begin{aligned}
K(x_b, t_b; x_a, t_a) = & \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\text{even}} \exp \left(\frac{im}{2\hbar (t_b - t_a)} (x_r - x_a)^2 \right) \\
& - \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\text{odd}} \exp \left(\frac{im}{2\hbar (t_b - t_a)} (x_r - x_a)^2 \right)
\end{aligned} \quad (4.30)$$

เมื่อแทนสมการ (4.28) ลงไป จะได้

$$\begin{aligned}
K(x_b, t_b; x_a, t_a) = & \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{im}{2\hbar (t_b - t_a)} (2rL + x_b - x_a)^2 \right) \\
& - \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{im}{2\hbar (t_b - t_a)} (2rL - x_b - x_a)^2 \right)
\end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned}
K(x_b, t_b; x_a, t_a) = & \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left(\frac{im}{2\hbar (t_b - t_a)} (2rL + x_b - x_a)^2 \right) \right. \\
& \left. - \exp \left(\frac{im}{2\hbar (t_b - t_a)} (2rL - x_b - x_a)^2 \right) \right\}
\end{aligned} \quad (4.31)$$

นี่คือ ตัวแพร่กระจายของอนุภาคภายใต้อิทธิพลของบ่อศักย์จัตุรัสลึกอนันต์

4.2.2 ฟังก์ชันคลื่นและระดับพลังงานที่เป็นไปได้

การคำนวณหาฟังก์ชันคลื่นและระดับพลังงานที่เป็นไปได้ของอนุภาคภายใต้อิทธิพลของบ่อศักย์จัตุรัสลึกอนันต์ ต้องอาศัยตัวแพร่กระจายที่ได้จากสมการ (4.31) และใช้สูตร

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax^2 \pm ibx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{-a}} e^{\frac{b^2}{4a}} \quad \text{หรือ}$$

$$e^{\frac{b^2}{4a}} = \sqrt{\frac{-a}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ax^2 \pm ibx} dx \quad (\text{Gradshteyn. 1965}) \quad (4.32)$$

เพื่อให้อยู่ในรูปแบบอินทิกรัล ต้องจัดสมการ (4.31) เสียใหม่ กล่าวคือ

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left(\frac{i^2 m}{2 \hbar i (t_b - t_a)} (2rL + x_b - x_a)^2 \right) \right. \\ \left. - \exp \left(\frac{i^2 m}{2 \hbar i (t_b - t_a)} (2rL - x_b - x_a)^2 \right) \right\} \quad (4.33)$$

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left(\frac{-m}{2 \hbar i (t_b - t_a)} (2rL + x_b - x_a)^2 \right) \right. \\ \left. - \exp \left(\frac{-m}{2 \hbar i (t_b - t_a)} (2rL - x_b - x_a)^2 \right) \right\} \quad (4.34)$$

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left(\frac{(2rL + x_b - x_a)^2}{-\frac{4i\hbar(t_b - t_a)}{2m}} \right) \right. \\ \left. - \exp \left(\frac{(2rL - x_b - x_a)^2}{-\frac{4i\hbar(t_b - t_a)}{2m}} \right) \right\} \quad (4.35)$$

พิจารณาสมการ (4.35) เฉพาะฟังก์ชันเลขชี้กำลัง(exponential) แล้วเปรียบเทียบกับสมการ (4.32) จะได้

$$a = -\frac{i\hbar(t_b - t_a)}{2m} \quad \text{และ} \quad b = 2rL + x_b - x_a, \quad 2rL - x_b - x_a \quad (4.36)$$

และเขียนสมการ (4.35) เสียใหม่ให้อยู่ในรูปของการอินทิเกรตโดยอาศัยสมการ (4.32) และ (4.36) พร้อมทั้งเปลี่ยนตัวแปรการอินทิเกรตจาก x เป็น $k = \frac{p}{\hbar}$ (เพื่อกำหนดหน่วยที่ปรากฏอยู่ในฟังก์ชันเลขชี้กำลัง) จะได้

$$\begin{aligned}
K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar (t_b - t_a)} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(\frac{i \hbar (t_b - t_a)}{2m\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left(-\frac{i \hbar (t_b - t_a)}{2m} k^2 + i(2rL + x_b - x_a)k \right) \right. \\
&\quad \left. - \exp \left(-\frac{i \hbar (t_b - t_a)}{2m} k^2 + i(2rL - x_b - x_a)k \right) \right\} dk
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{i \hbar (t_b - t_a)}{2m} k^2 \right) \\
&\quad \times \left\{ \exp[ik(2rL + x_b - x_a)] - \exp[ik(2rL - x_b - x_a)] \right\} dk
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{i \hbar (t_b - t_a)}{2m} k^2 \right) \\
&\quad \times \left\{ \exp[ik(x_b - x_a)] - \exp[ik(-x_b - x_a)] \right\} \exp(2irLk) dk
\end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{i \hbar (t_b - t_a)}{2m} \left(\frac{p}{\hbar} \right)^2 \right] \\
&\quad \times \left\{ \exp \left(\frac{ip}{\hbar} (x_b - x_a) \right) - \exp \left(\frac{ip}{\hbar} (-x_b - x_a) \right) \right\} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{2irLp}{\hbar} \right) d \left(\frac{p}{\hbar} \right)
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \frac{1}{2\pi \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a) \right) \\
&\quad \times \left\{ \exp \left(\frac{ip}{\hbar} (x_b - x_a) \right) - \exp \left(\frac{ip}{\hbar} (-x_b - x_a) \right) \right\} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{2irLp}{\hbar} \right) dp
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \frac{1}{2\pi \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a) \right) \\
&\quad \times \exp \left(-\frac{ipx_a}{\hbar} \right) \left\{ \exp \left(\frac{ipx_b}{\hbar} \right) - \exp \left(-\frac{ipx_b}{\hbar} \right) \right\} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{2irLp}{\hbar} \right) dp
\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}
K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \frac{2i}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a)\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{ipx_a}{\hbar}\right) \left\{ \frac{\exp\left(\frac{ipx_b}{\hbar}\right) - \exp\left(-\frac{ipx_b}{\hbar}\right)}{2i} \right\} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{2irLp}{\hbar}\right) dp \quad (4.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \frac{i}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a)\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{ipx_a}{\hbar}\right) \sin\left(\frac{px_b}{\hbar}\right) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{2irLp}{\hbar}\right) dp \quad (4.43)
\end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned}
K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \frac{i}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a)\right) \\
&\quad \times \exp\left(-\frac{ipx_a}{\hbar}\right) \sin\left(\frac{px_b}{\hbar}\right) \sum_{r=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2irLp}{\hbar}\right) dp \quad (4.44)
\end{aligned}$$

(เพราะว่า $\sum_{r=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{2irLp}{\hbar}\right) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2irLp}{\hbar}\right))$

จากสูตรการรวมแบบปัวส์ซอง (poisson summation formula) ที่แสดงในรูปการแปลงฟูเรียร์ (fourier transform) ของฟังก์ชันเดลตา (delta function)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \Leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-i2\pi nT) \quad (\text{Hsu. 1970}) \quad (4.45)$$

เมื่อนำมาประยุกต์ใช้กับสมการ (4.44) ในพจน์ $\sum_{r=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2irLp}{\hbar}\right)$ จะได้

$$\begin{aligned}
\sum_{r=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2irLp}{\hbar}\right) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \exp\left[-i2\pi p\left(\frac{L}{\pi\hbar}\right)\right] \\
&= \frac{\pi\hbar}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(p - \frac{n\pi\hbar}{L}\right) \quad (4.46)
\end{aligned}$$

นำสมการ (4.46) แทนลงในสมการ(4.44) จะได้

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \frac{i}{\pi\hbar} \left(\frac{\pi\hbar}{L} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a)\right) \\ \times \exp\left(-\frac{ipx_a}{\hbar}\right) \sin\left(\frac{px_b}{\hbar}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(p - \frac{n\pi\hbar}{L}\right) dp \quad (4.47)$$

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \frac{i}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} (t_b - t_a)\right) \exp\left(-\frac{ipx_a}{\hbar}\right) \sin\left(\frac{px_b}{\hbar}\right) \delta\left(p - \frac{n\pi\hbar}{L}\right) dp \quad (4.48)$$

จากคุณสมบัติของฟังก์ชันเดลตา ดีแรก (dirac delta function)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a) \quad (\text{Jeffrey, 1995}) \quad (4.49)$$

ดังนั้นอาศัยสมการ (4.49) สามารถคำนวณตัวแปรกระจายจากสมการ (4.48) ได้เป็น

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \frac{i}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p_n^2}{2m} (t_b - t_a)\right) \exp\left(-\frac{ip_n x_a}{\hbar}\right) \sin\left(\frac{p_n x_b}{\hbar}\right) \quad (4.50)$$

$$\text{เมื่อ } p_n = \frac{n\pi\hbar}{L} \quad \text{หรือ}$$

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \frac{i}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n (t_b - t_a)\right) \exp(-ik_n x_a) \sin(k_n x_b) \quad (4.51)$$

$$\text{เมื่อ } E_n = \frac{p_n^2}{2m} \quad \text{และ} \quad k_n = \frac{p_n}{\hbar} = \frac{n\pi}{L}$$

เมื่อจับคู่สมการ(4.51) กันเป็นคู่ๆ เช่น $n = 1$ กับ $n = -1$ เป็นต้น จะได้

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \frac{i}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n(t_b - t_a)\right) [\exp(-ik_n x_a) - \exp(ik_n x_a)] \sin(k_n x_b) \quad (4.52)$$

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \frac{-(2i)}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n(t_b - t_a)\right) \left[\frac{\exp(ik_n x_a) - \exp(-ik_n x_a)}{2i} \right] \sin(k_n x_b) \quad (4.53)$$

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n(t_b - t_a)\right) \sin(k_n x_a) \sin(k_n x_b) \quad (4.54)$$

ดังนั้น จะได้ตัวแพร่กระจายของอนุภาคภายใต้อิทธิพลของบ่อศักย์จัตุรัสลึกอนันต์

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p_n^2}{2m}(t_b - t_a)\right) \sin\left(\frac{n\pi x_a}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_b}{L}\right) \quad (4.55)$$

และเมื่อนำสมการ (4.55) เปรียบเทียบกับสมการ (3.22) จะได้ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคภายใต้อิทธิพลของบ่อศักย์จัตุรัสลึกอนันต์ ดังนี้

$$\left. \begin{aligned} \psi_n(x_a) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x_a}{L}\right) \\ \psi_n^*(x_b) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x_b}{L}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.56)$$

พร้อมด้วยระดับพลังงานที่เป็นไปได้คือ $E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{n\pi\hbar}{L} \right)^2$ ผลลัพธ์ที่ได้ดังกล่าวสอดคล้องกันเป็นอย่างดีกับค่าที่ได้โดยการคำนวณด้วยสมการชเรอดิงเงอร์

บทที่ 5

สรุปและอภิปรายผล

ผลเฉลยของปัญหาบ่อศักย์จัตุรัสสี่กอนั้นเป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้ว ดังนั้นโดยตัวผลเฉลยจึงมิได้มีความสำคัญพิเศษแต่ประการใด ที่สำคัญคืออินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมนสามารถแก้ปัญหาดังกล่าวได้หรือไม่ และสิ่งที่ได้แสดงในการวิจัยนี้คือ การนำแนวคิดวิธีจุดภาพของกระจเงาไปประยุกต์ใช้กับอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมน โดยศึกษาจากปัญหากำแพงศักย์อนันต์ก่อน กล่าวคือ เส้นทางแบบฉบับของอนุภาคประกอบด้วยสองเส้นทาง โดยเส้นทางแรกเป็นเส้นทางของอนุภาคอิสระที่เคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้น (x_a, t_a) ไปยังจุดปลาย (x_b, t_b) โดยตรง ในขณะที่เส้นทางที่สองนั้นเป็นเส้นทางที่อนุภาคอิสระเคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้น (x_a, t_a) ไปกระทบผนังกำแพงศักย์ก่อน แล้วจึงสะท้อนกลับไปยังจุดปลาย (x_b, t_b) ซึ่งเส้นทางที่สองนั้นสมมูลกับเส้นทางของอนุภาคอิสระที่เคลื่อนที่จากจุดเริ่มต้น (x_a, t_a) ไปยังจุด $(-x_b, t_b)$ (ดังภาพที่ 5) แต่สำหรับปัญหาบ่อศักย์จัตุรัสสี่กอนั้น อนุภาคอาจจะกระทบผนังด้านหลังหรือด้านหน้าของกำแพงจากจุด (x_a, t_a) แล้วสะท้อนไปยังจุด (x_b, t_b) ด้วยจำนวนครั้งที่ไม่เจาะจง ดังนั้นเส้นทางแบบฉบับที่เชื่อมต่อกับจุดทั้งสองจุดย่อมมีจำนวนมากมายมหาศาล และสอดคล้องกับจุดภาพกระจกเงาที่ต่อเนื่องกันจนนับไม่ถ้วน โดยที่จุดภาพกระจกเงาเหล่านั้นมีความสัมพันธ์กัน (ดังภาพที่ 6)

จากแนวคิดดังกล่าว ทำให้สามารถคำนวณหาตัวแผ่กระจายของอนุภาคภายใต้อิทธิพลของบ่อศักย์จัตุรัสสี่กอนั้นได้คือ

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{p_n^2}{2m} (t_b - t_a)\right) \sin\left(\frac{n\pi x_a}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_b}{L}\right)$$

พร้อมทั้งฟังก์ชันคลื่นและระดับพลังงานที่เป็นไปได้คือ

$$\psi_n(x_a) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x_a}{L}\right), \quad \psi_n^*(x_b) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x_b}{L}\right)$$

$$\text{และ } E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2 \quad \text{ตามลำดับ}$$

นั่นเป็นข้อดีของตัวแผ่กระจายที่สามารถให้สถานะเจาะจงโมเมนตัมหรือฟังก์ชันคลื่นและระดับพลังงานที่เป็นไปได้ไปพร้อมๆ กัน

ผลเฉลยของปัญหาบ่อศักร์จตุรัสสี่กอนันต์ที่ได้นี้สอดคล้องกันเป็นอย่างดีกับผลเฉลยที่ได้โดยการคำนวณด้วยวิธีการของชเรอดิงเงอร์ทุกประการ แต่พบว่าวิธีการของฟายน์แมนยุ่งยากกว่า และต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ค่อนข้างมาก ทั้งนี้ทั้งนั้นอาจเป็นเพราะว่ารากฐานทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการศึกษาทฤษฎีควอนตัมของชเรอดิงเงอร์ได้พัฒนาไปไกลกว่าอินทิกรัลตามเส้นทางของฟายน์แมน(วีรุพห์ สายคณิต. 2525) อย่างไรก็ตามในบางครั้งเมื่อคำนวณปัญหาที่ยุ่งยากกว่านี้ เช่นปัญหาที่วิธีการของชเรอดิงเงอร์ไม่สามารถหาคำตอบที่แท้จริงได้ ปรากฏว่าวิธีการของฟายน์แมนให้ผลที่ดีกว่า ทั้งยังเป็นทางเลือกใหม่ในการศึกษาวิชากลศาสตร์ควอนตัมอีกด้วย

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- นิคม ชูศิริ. (2539). อินทิกรัลตามเส้นทางของอนุภาคไฟฟ้าภายใต้แรงฮาร์มอนิกและ
สนามแม่เหล็กคงที่. รายงานการวิจัย. สงขลา : มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ภาคใต้.
- นิคม ชูศิริ. (2540). ตัวแผ่กระจายของอิเล็กตรอนภายใต้อิทธิพลของแรงฮาร์มอนิก
สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้า. รายงานการวิจัย. สงขลา : มหาวิทยาลัยทักษิณ.
- นิคม ชูศิริ. (2541). อินทิกรัลตามเส้นทางของก๊าซอิเล็กตรอนในระบบสองมิติภายใต้อิทธิพลของ
แรงฮาร์มอนิก สนามแม่เหล็ก สนามไฟฟ้าและศักย์ที่ไวระเบียน. รายงานการวิจัย.
สงขลา : มหาวิทยาลัยทักษิณ.
- อภัยรัฐย ถาวรสุวรรณ, วิทยา ทิพย์อักษร และ นิคม ชูศิริ. (2549). อินทิกรัลตามเส้นทางสำหรับ
กำแพงศักย์อนันต์. วิทยาศาสตร์ทักษิณ. 3(1), 63 - 70
- เอกพันธ์ จันผง. (2548) . อินทิเกรตตามเส้นทางของอนุภาคไฟฟ้าภายใต้สนามไฟฟ้าค่าคงที่.
โครงการฟิสิกส์. สงขลา : มหาวิทยาลัยทักษิณ.
- วิรุพณ์ สายคณิต. (2525). ทฤษฎีควอนตัม. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- Choosiri, N. and Sayakanit, V. (1984). Path Integrals of the Hydrogen Atom. Thai-
Journal of Physics. 1(1) , 1-13.
- Feynman, R.P. and Hibbs, A.R. (1965). Quantum Mechanics and Path integrals.
New york : McGraw-Hill.
- Goodman, M. (1981). Path Integral Solution of the Square Well. Am.J.Phys.
49(9) , 843 – 847.
- Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. (1965). Table of Integrals, Series and Products.
New York. Academic Press.
- Ho, R. and Inomata, A. (1982). Phys. Rev. Lett. 48(4), 231.
- Hsu, H.P. (1970). Fourier Analysis. New York. Simon and Schuster.
- Jeffrey, A. (1995). Handbook of Mathematical Formulas and Integrals. California.
Academic Press.
- Kleinert, H. (1999). Solution of Coulomb Path Integral in Momentum Space. Physics
Letters A. 252 , 277-280
- Liboff, R.L. (1996). Introductory Quantum Mechanics. New York . Addison-Wesley.

Pauli, W. (1952). Ausgewählte Kapitel der Feldquantisierung(Lecture note). Zurich : ETH.

139.

van Vleck, J.H. (1978). Proc. Natn.Acad. Sci. 14, 178

ภาคผนวก

บ่อศักย์จัตุรัสลึกอนันต์

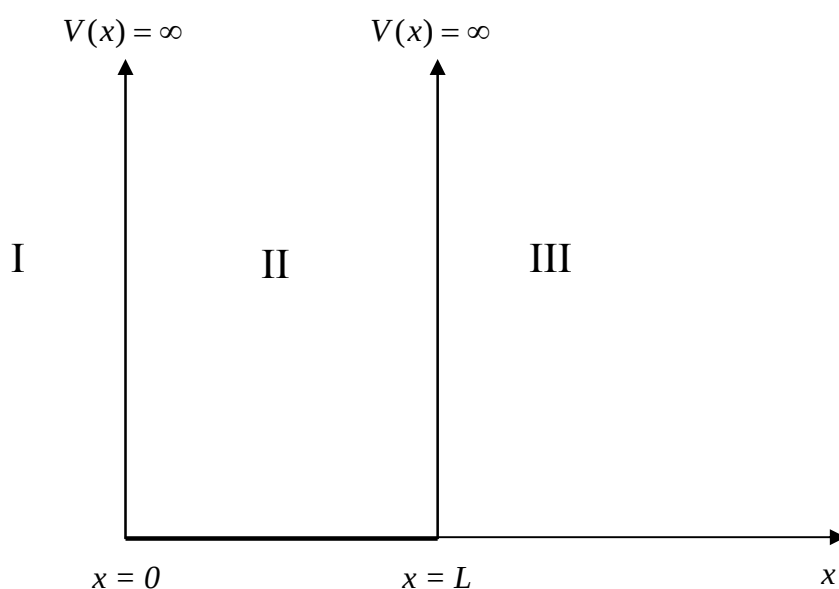
(infinite square potential well)

ภาคผนวก

ปัญหาอนุภาคในกล่องหรือบ่อศักย์จัตุรัสลิแกอนันต์ (infinite square potential well) คือ ปัญหาของอนุภาค(อิเล็กตรอน) มวล m ที่ถูกจำกัดการเคลื่อนที่ตามแนวแกน x ระหว่าง $x = 0$ ถึง $x = L$ (ดังรูป) และพลังงานศักย์ของอนุภาคมีค่าดังนี้

$$V(x) = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < x < L$$

$$V(x) = \infty \quad \text{เมื่อ} \quad x \leq 0 \quad \text{และ} \quad x \geq L$$



ภาพที่ 7 แสดงบ่อศักย์จัตุรัสลิแกอนันต์ (ดัดแปลงจาก Liboff. 1996)

เนื่องจาก V ไม่เป็นฟังก์ชันของเวลาเราจึงได้สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นต่อเวลา

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1)$$

1. พิจารณากายนอกกล่อง เมื่อ $x \leq 0$, $V(x) = \infty$ จะได้

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_1(x) = -(\infty - E)\psi_1(x)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_I(x) = \infty \psi_I(x)$$

$$\psi_I(x) = \frac{\hbar^2}{2m\infty} \frac{d^2}{dx^2} \psi_I(x) = 0 \quad (2)$$

2. พิจารณากายนอกกล่อง เมื่อ $x \geq L$, $V(x) = \infty$

เช่นเดียวกัน

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_{III}(x) + \infty \psi_{III}(x) = E \psi_{III}(x)$$

$$\psi_{III}(x) = \frac{\hbar^2}{2m\infty} \frac{d^2}{dx^2} \psi_{III}(x) = 0 \quad (3)$$

ดังนั้น $\psi_I(0) = \psi_{III}(L) = 0$ ซึ่งหมายถึงไม่พบหรือไม่มีอนุภาคภายนอกกล่อง

3. พิจารณากายในกล่อง เมื่อ $0 < x < L$, $V(x) = 0$

สมการชเรอดิงเงอร์เขียนได้เป็น

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_{II}(x) + 0 \psi_{II}(x) = E \psi_{II}(x)$$

หรือเขียนใหม่ด้วยการละตัวห้อย(subscript) ได้เป็น

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E \psi(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = -k^2 \psi(x)$$

หรือ

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + k^2 \psi(x) = 0 \quad (4)$$

เมื่อ

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (5)$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ(4) คือ

$$\psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx) \quad (6)$$

โดยอาศัยเงื่อนไขขอบเขตตรงรอยต่อ $\psi(0) = 0$ ดังนั้น

$$\psi(0) = A\sin(k0) + B\cos(k0)$$

$$0 = A\sin(0) + B\cos(0)$$

จะได้

$$B = 0 \quad (7)$$

เพราะฉะนั้น

$$\psi(x) = A\sin(kx) \quad (8)$$

และอาศัยเงื่อนไขขอบเขต $\psi(L) = 0$ ดังนั้น

$$\psi(L) = A\sin(kL) = 0$$

ซึ่งอาจเป็นไปได้ว่า $A = 0$ หรือ $\sin kL$ แต่ทว่า A เป็นศูนย์ไม่ได้ มิฉะนั้น ในกล่อง $\psi(x) = 0$ ดังนั้น จึงเลือก

$$\sin(kL) = 0$$

ซึ่งเป็นไปได้ก็ต่อเมื่อ

$$kL = n\pi \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

ดังนั้น

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad (9)$$

และ
$$k^2 = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \quad (10)$$

แทนค่าสมการ (5) ลงไปจะได้

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2$$

หรือ
$$E_n = \frac{1}{2m} \left(\frac{\pi \hbar n}{L} \right)^2 \quad (11)$$

นี่คือระดับพลังงานที่เป็นไปได้ของอนุภาค
จากสมการ (8) และ (9) จะได้

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (12)$$

จะเห็นว่า n เป็นศูนย์ไม่ได้ เพราะถ้า $n = 0$ จะทำให้ $\psi(x) = 0$ ทุกตำแหน่ง หมายความว่าไม่มีอนุภาคอยู่ในกล่องเลย สมการ (12) อาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$\psi_n(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (13)$$

ตัวห้อย (subscript) n คล้องจองกับสถานะพลังงานที่ n หรือระดับพลังงานที่ n นั้นเอง

สำหรับค่าคงตัว A ในสมการ (13) สามารถหาได้โดยทำสมการ (13) ให้เป็นปกติ (normalize) กล่าวคือ

$$\int_0^L |\psi_n|^2 dx = 1 \quad (14)$$

ดังนั้น
$$A^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 1$$

จะได้

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}} \quad (15)$$

เมื่อแทนลงในสมการ (12) จะได้

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (16)$$

และนี่คือ ฟังก์ชันคลื่นสำหรับอนุภาคในกล่องหรือบ่อศักย์จำกัดรัศมีกอนันต์

ប្រភព៖ ព័ត៌មានផ្ទាល់មាត់

ชื่อ-ชื่อสกุล	นายวิทยา ทิพย์อักษร
วันเดือนปีเกิด	12 พฤษภาคม พ.ศ. 2523
สถานที่อยู่ปัจจุบัน	8/3 หมู่ 4 ต.นาชุมเห็ด อ.ย่านตาขาว จ.ตรัง 92140
ประวัติการศึกษา	พ.ศ.2545 วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาฟิสิกส์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

ผลงานทางวิชาการ

1. อัมมวชิย ถาวรสุวรรณ, **วิทยา ทิพย์อักษร** และ นิคม ชูศิริ. (2549). อินทิกวีรกรรม
เส้นทางสำหรับกำแพงค่ายอนันต์. วิทยาศาสตร์ทักษิณ. 3(1), 63 – 70
2. ร่วมเสนอผลงานประเภทโปสเตอร์ในการประชุมวิชาการวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
แห่งประเทศไทย ครั้งที่ 32 (วทท.32) ระหว่างวันที่ 10-12 ตุลาคม 2549 ณ ศูนย์ประชุมแห่งชาติ
สิริกิติ์ เรื่อง อินทิกวีรกรรมเส้นทางสำหรับกำแพงค่ายอนันต์